

動的再配置モデルの解析

紀 一誠

日本電気(株) C & C 情報研究所

概要：本稿では、動的再配置機能をもつ主記憶管理方式のモデル化と解析を行う。主記憶装置は固定した等しい大きさを持つ c ユニットから構成されている。主記憶領域にロードされるプログラムの要求ユニット数 X は $P(X=n) = \alpha_n, 1 \leq n \leq c$ なる分布をもつ離散確率変数とする。プログラムは主記憶領域に空きのあるかぎりその位置関係には無関係にユニットを割り当てられる。要求ユニット数が空きユニット数を越える場合には待ち行列に着き空きを待つ。処理を終えたプログラムは割り当てられていたユニットを全て同時に解放し退去する。本稿ではこの管理方式を集団到着、集団退去のある待ち行列システム ($M^X/G^X/c$) としてモデル化を行う。まず、 $M^X/M^X/2$ システムについて母関数法を用いて解析する。さらに、 $M^X/M^X/c$ システムに関する近似解の提案を行い、両者の比較を行う。また、 $M^X/G^X/2$ システムについての解析を行いスループットの上限値を陽な形に示すとともに、それが保留時間分布に関してコンベックスオーダーリングの意味で確率的順序関係のあることを示す。

Analysis of a Dynamic Storage Allocation Problem

Issei Kino

C & C Information Technology Research Laboratories
Miyazaki 4-1-1, Miyamae-ku, Kawasaki, Kanagawa 213, Japan

Abstract: This paper studies queueing system models for dynamic storage allocation problems which appear in performance evaluation of memory storage management schemes. The models are categorized in the group-arrival group-departure queueing system which has c servers whose customers arrive in groups in accordance with a Poisson arrival process and depart from the system group by group. The service of all customers in an arriving group starts immediately upon their arrival, if the number of free servers is greater than or equal to their population. Otherwise, they join to the end of the waiting line whose queue length has no limitation, thus no customer is lost. Since customers within a same group have an equal service time, they set the servers assigned to them free at the same time after completion of their service time and depart from the system all together. Free servers are assigned to waiting customers according to a groupwise FIFO (first-in-first-out) queue discipline as far as the free servers are available. The service times for customers of successive arriving groups are assumed to be independent identically distributed random variables (i.i.d.r.v.'s) having a general distribution. This system is referred as the $M^X/G^X/c$ queueing system in this paper, where the symbol X describes a random variable associated with the group size. The sizes of successive arriving groups are assumed to be integer valued i.i.d.r.v.'s with a general probability distribution $P(X=n) = \alpha_n, 1 \leq n \leq c$.

In the case of $M^X/M^X/2$, analytic results are derived with generating functions. For the general scale case, i.e. $M^X/M^X/c$, an approximate method is proposed. Numerical results for both the analytic and the approximate cases are presented. Finally, the upper bound of throughput in the $M^X/G^X/2$ system is obtained in a closed form with the supplementary variable method, and it is shown that the upper throughput bound of one system is greater than that of another system, if the service time distribution of the former one is stochastically smaller than that of the latter one in the sense of convex ordering.

1 はじめに

コンピュータシステムの性能評価の際には複数のプロセスから発生するプログラムのロード要求を容量に制限のある主記憶領域にいかにか効率良く割り付けるかという領域割付問題を考察する必要がある。主記憶領域を適当な方式で切り出してきてプログラムに割り付ける方式は動的な記憶領域割付け技法と言われ、Knuth[1]をはじめとし種々の技法が考察されている。本稿ではこの領域割付問題の一つである動的再配置（メモリコンパクション）機能を用いた主記憶領域の管理方式のモデル化と解析を行なう。

動的な記憶領域割付け技法は、連続した領域を割り付ける場合と、不連続な領域でも空きがある限り割付けを行う場合とに分けることができる。後者の場合は、その実現方式として要求がある毎に使用中の領域を連続した領域に再配置して連続した空き領域を確保する方式をとったことから、動的再配置問題と言われている。今日では主記憶領域はページ単位に管理され、実際に再配置が行われることはないが、基本的には同じモデルで考えることができるので、本稿ではこのモデルを動的再配置モデルと言うことにする。

動的再配置モデルはプログラムサイズを到着集団に含まれる客数、領域全体のユニット数をサーバと考え、プログラムの終了時にはそれが占有していたユニットを総て一括返却して退去することに注目すれば、集団到着、集団退去（または集団サービス）のcサーバモデルと考えることができる。集団到着モデルは集団退去型と個別退去型に分けることができる。さらに、それらは要求サーバ数が空きサーバを越えた場合にその集団客が待ち行列に並び空きサーバが現れるまで待つ待時型モデルと待たずに系外に退去して行く即時型モデルに分けられる。

集団到着、個別退去型モデルは[4]をはじめ多数の研究がなされている。即時型の場合ユニットを確保できなかった集団客総てが一括して退去するWBAS方式と確保できなかった客だけが退去するPBAS方式とわかれる([8])。文献[7]では、ポアソン到着過程、一般サービス時間をもつ即時型の集団到着、集団退去型(WBAS)モデルを解析し、積形式解をもつことを示した。文献[6]は2種類の集団到着が混在する即時型システムにおいて、到着をポアソン過程、サービス時間が指数分布に従う仮定のもとに、集団退去、PBAS/WBASの組合せについて積形式解の成り立つ場合条件を示した。文献[2],[3],[5]は待ち行列長が無限の場合の待時型モデルについての解析を行った。

本稿では待時型のモデルのみを扱う。ポアソン到着過程、指数分布に従うサービス時間を仮定し、次章に領域数2の場合の解析を行う。3章において一般の領域数の場合の近似解を示し、数値例による比較を行う。4章においては、待ち行列長を無限大と仮定し、サービス時間分布を一般分布とした場合の解析を領域数2の場合について行い、スループットを求めるとともにそれがサービス時間分布に関してconvex orderingの意味で確率的順序関係があることを示す。

2 モデル

主記憶領域はc個のユニット（ページ）から構成され、主記憶領域を使用するプログラムの要求ユニット数は大小様々にばらついているものとする。本稿では動的再配置モデルを以下に定義される集団到着、集団退去、待時型の待ち行列としてモデルの記述を行う。

系にはc人のサーバが存在し、客は何人かでグループとなって到着するものとする。i番めの到着グループを構成する客数を X_i とする。 X_i は独立に同一の分布、

$$P(X_i = n) = \alpha_n, 1 \leq n \leq c; i = 1, 2, \dots; \sum_{n=1}^c \alpha_n = 1$$

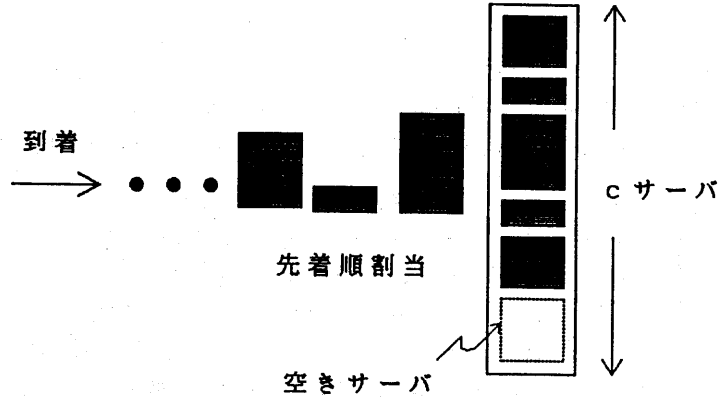


図 1: モデル概念図

に従う離散確率変数とする。到着客はそのグループサイズ以上の空きサーバ数が存在する限りサーバを確保しサービスを受ける。同じグループに属する客のサービス時間は総て同じであるものとする。その結果同一グループの客の退去時刻は同じ時刻となり集団的に退去する。

グループサイズが空きサーバの数を越える場合にはそのグループに属する客全員が待ち行列に着き十分な空きサーバ数になるまで待つ。待ち行列の長さには制限はないものとする。従って失われる (loss) 客は無い。

グループの退去によって空きサーバが現れた場合には待ち行列から先着順にグループサイズを調べて行き、割り当てられる限りサーバをグループに割り当てる。グループの到着時間間隔は独立に同一の分布に従う確率変数とし、グループ毎のサービス時間も独立に同一の分布に従う確率変数とする。また、到着時間間隔とサービス時間は互いに独立であるものとする。

このモデルを本稿では一般到着過程、サービス時間が一般分布に従う場合 $GI^X/G^X/c$ と記すことにする。ここで X は集団のサイズを示す確率変数のシンボルとする。さらに、待時型のモデルにおいて待ち行列中に常に集団客が存在する場合、即ち到着過程において到着率を無限大と考えた場合を $\infty^X/G^X/c$ と表記する。

本稿で考察するモデルの概念図を図 1 に示す。

3 $M^X/M^X/2$ の解析

本章では $M^X/M^X/2$ の解析を母関数法を用いて行う。到着過程はパラメータ λ のポアソン過程であるとし、サービス時間はグループサイズによらないパラメータ μ の指数分布に従うものとする。以下の記号を定義する。

$Y_j(t), j = 1, 2$: 時刻 t でサービス中のグループの中でサイズが j であるものの数、

$N(t)$: 時刻 t における系内滞在グループ数 (サービス中および待ち合わせ中)。

確率過程 $M(t) = (Y_1(t), Y_2(t); N(t))$ はマルコフ過程となる。ここで、 $c = 2$ の場合に限っては、 $(Y_1(t), Y_2(t))$ が与えられると待ち行列の先頭で待つグループのサイズは定まってしまうためマルコフ過程を構成するための情報としては不必要となる点に注意が必要となる。定常分布の存在、 $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = (Y_1, Y_2; N)$ を仮定し、その状態確率を以下のように定義する。

$$P(i, j; n) = P(Y_1 = i, Y_2 = j; N = n); \quad i = 0, 1, 2; \quad j = 0, 1; \quad n = 0, 1, \dots$$

状態方程式は以下のように構成される。ただし、 $\rho = \lambda/\mu$ とする。

$$(2.1) \begin{cases} (1 + \rho)P(0, 1; n) = \rho P(0, 1; n-1) + \alpha_2 P(0, 1; n+1) + P(1, 0; n+1), & 2 \leq n, \\ (1 + \rho)P(1, 0; n) = \rho P(1, 0; n-1) + \alpha_1 \alpha_2 P(0, 1; n+1) + 2\alpha_2 P(2, 0; n+1), & 3 \leq n, \\ (2 + \rho)P(2, 0; n) = \rho P(2, 0; n-1) + \alpha_1^2 P(0, 1; n+1) + 2\alpha_1 P(2, 0; n+1), & 3 \leq n. \end{cases}$$

$$(2.2) \begin{cases} \rho P(0, 0; 0) = P(1, 0; 1) + P(0, 1; 1), \\ (1 + \rho)P(0, 1; 1) = \rho \alpha_2 P(0, 0; 0) + \alpha_2 P(0, 1; 2) + P(1, 0; 2), \\ (1 + \rho)P(1, 0; 1) = \rho \alpha_1 P(0, 0; 0) + \alpha_1 P(0, 1; 2) + 2P(2, 0; 2), \\ (1 + \rho)P(1, 0; 2) = \rho \alpha_2 P(1, 0; 1) + \alpha_1 \alpha_2 P(1, 0; 3), \\ (2 + \rho)P(2, 0; 2) = \rho \alpha_1 P(1, 0; 1) + \alpha_1^2 P(0, 1; 3) + 2P(2, 0; 3). \end{cases}$$

ここで、 $p_0 = P(0, 0; 0), p_1 = P(1, 0; 1)$ と置き、以下の母関数を定義する。

$$(2.3) \begin{cases} P_0(z) = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} P(0, 1; n), \\ P_1(z) = p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} P(1, 0; n), \\ P_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} P(2, 0; n). \end{cases}$$

$P(z) = (P_0(z), P_1(z), P_2(z))$, $p = (p_0, p_1)$ とすると状態方程式 (2.1), (2.2) は以下の形に表現することができる。

$$(2.4) \quad P(z)A(z) = pB(z).$$

ここに、 $A(z), B(z)$ は (2.5), (2.6) に定義される行列とする。

$$(2.5) \quad A(z) = \begin{bmatrix} z(1 + \rho(1-z)) - \alpha_2 & , -\alpha_1 \alpha_2 & , -\alpha_1^2 \\ -1 & , z(1 + \rho(1-z)) & , 0 \\ 0 & , -2\alpha_2 & , z(2 + \rho(1-z)) - 2\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

$$(2.6) \quad B(z)^T = \begin{bmatrix} z(1 + \rho(1-z)) - \alpha_2(1 + \rho z(1-z)) & , -(1 - \alpha_2)z \\ -\alpha_1 \alpha_2(1 + \rho z(1-z)) & , (1 - \alpha_2)(1 + \rho z(1-z))z^2 + \alpha_1 \alpha_2 z \\ -\alpha_1^2(1 + \rho z(1-z)) & , -\alpha_1 z^2(1 + \rho(1-z)) + \alpha_1^2 z \end{bmatrix}.$$

(2.5), (2.6) を解いて $P_0(z), P_1(z)$ を求めることができる。 $P_0(z)$ は以下に与えられる。

$$(2.7) \quad P_0(z) = (g_0(z)p_0 + g_1(z)p_1)/g(z).$$

ここに、 $g_0(z), g_1(z), g(z)$ は以下に示される多項式とする。

$$(2.8) \begin{cases} g(z) = \rho^3 z^4 - 2\rho^2(\rho + 2)z^3 + \rho(\rho^2 + (5 + \alpha_1)\rho + 5)z^2 - ((1 + \alpha_1)\rho^2 + (3 + \alpha_1)\rho + 2)z \\ \quad + \rho \alpha_1(1 - \alpha_1), \\ g_0(z) = \alpha_1 \rho^3 z^4 - \rho^2(2\alpha_1 \rho + 1 + 3\alpha_1)z^3 + \rho(\alpha_1 \rho^2 + (\alpha_1^2 + 3\alpha_1 + 2) + 2\alpha_1 + 3)z^2 \\ \quad - ((1 + \alpha_1^2)\rho^2 + (3 + \alpha_1)\rho + 2)z + \rho \alpha_1(1 - \alpha_1), \\ g_1(z) = -\rho \alpha_1(1 - \alpha_1)z. \end{cases}$$

(2.7) 式の分母に現れる $g(z)$ について次ぎの性質があることが証明できる。

Lemma 2.1: $g(z) = 0$ が $0 < z < 1$ のあいだにただ一つの根をもつための必要十分条件は、 $0 < \rho < \rho^* = 2/(2 - \alpha_1^2)$ となる。

上記の性質から、本システムが定常解をもつための必要十分条件が $0 < \rho < \rho^*$ であることが証明できる。従って、定常条件のもとで求めた $g(z) = 0$ の根を η とすれば、(2.7) の分子について、 $p_0 g_0(\eta) + p_1 g_1(\eta) = 0$ が成り立つことと確率条件から p_0, p_1 を決定することができ、母関数の形を完全に定めることができる。数値計算例については次章に近似解との比較を行う際に示す。

4 $M^X/M^X/c$ の近似解

本章では任意のサーバ数 c をもつシステムの近似解を考える。時刻 t の系内グループ数 $J(t)$ 、サービスを受けているグループ数 $G(t)$ とすると、確率過程 $(J(t), M(t))$ はマルコフ過程にはなっていない。本稿ではまず、 $u_k(t) = E(M(t) | J(t) = k)$ を近似的に構成する。この時、サービス時間分布は指数分布を仮定しているため、状態 $J(t) = k$ における退去率は近似的に $u_j(t)$ と考えることができる。以上より、系内グループ数 $J(t)$ をマルコフ過程と考え、定常状態を仮定し近似解を作る。

次の記号を定義しておく。

$$P(j) = P(J = j), \quad r(j, k) = E(G = k | J = j), \quad S(k) = X_1 + X_2 + \dots + X_k, \\ F_k(c) = P(S(k) \leq c), \quad u_j(c) = F_1(c) + F_2(c) + \dots + F_j(c),$$

$$K(j) = \max(k | X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq c < X_1 + X_2 + \dots + X_k + \dots + X_j).$$

ここで (3.1) の関係が成り立つことから、(3.2) の近似関係式を作ることができる。

$$(3.1) \quad P(K(j) = k) = \begin{cases} P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq c) - P(X_1 + X_2 + \dots + X_{k+1} \leq c), & 1 \leq k \leq j-1, \\ P(X_1 + X_2 + \dots + X_k \leq c), & k = j. \end{cases}$$

$$(3.2) \quad r(j, k) = \begin{cases} F_k(c) - K_{k+1}(c) & 1 \leq k \leq j-1, \\ F_j(c) & k = j. \end{cases}$$

(3.2) より系内グループ数が $J = j$ の場合の平均サービス中グループ数は $E(G | J = j) = \sum_{k=1}^j k r(j, k) = u_j(c)$ となる。 $J = j$ の時の退去率を $u_j(c)$ と考え系内グループ数に関する状態方程式を構成する。

$$(3.3) \quad \begin{cases} \lambda P(0) & = u_1(c) \mu P(1), \\ (\lambda + u_n \mu) P(n) & = \lambda P(n-1) + u_{j+1} \mu P(n+1), \quad 1 \leq n. \end{cases}$$

方程式 (3.3) を解いて以下の定常解を得る。ただし、 m は同時にサービスをされ得る最大のグループ数 ($m = [c / \min(n | \alpha_n \neq 0)]$) とし $\rho = \lambda / \mu$ とする。

$$(3.4) \quad P(n) = \begin{cases} \rho^n P(0) / \prod_{j=1}^n u_j(c), & 1 \leq n \leq m, \\ (\rho / u_m(c))^{n-m} P(m), & m \leq n. \end{cases}$$

ただし、 $P(0)$ は次に示される。

$$(3.4) \quad P(0) = [1 + \sum_{n=1}^{m-1} \{\rho^n / \prod_{j=1}^n u_j(c)\} + \rho^m u_m(c) / \{(u_m(c) - \rho) \prod_{j=1}^m u_j(c)\}]^{-1}.$$

本章に示した近似解と前章に求めた厳密解との数値計算による比較例を表 1 に示す。

5 $\infty^X/G^X/2$ のスループット解析

サイズ i ($i = 1, 2$) のグループのサービス時間を S_i 、その分布関数を $F_i(x)$ 、密度関数 (存在を仮定) を $f_i(x)$ とし、それらの m 回のたたみこみを $F_i^{(m)}(x), f_i^{(m)}(x)$ とする。サーバの占有状態は

ρ	$\alpha_1 = 0.90$		$\alpha_1 = 0.50$	
	Exact	Appr.	Exact	Appr.
0.10	0.10	0.10	0.11	0.11
0.20	0.21	0.21	0.24	0.23
0.30	0.33	0.32	0.40	0.37
0.40	0.46	0.44	0.59	0.54
0.50	0.60	0.56	0.85	0.76
0.60	0.77	0.71	1.20	1.03
0.70	0.96	0.87	1.71	1.40
0.80	1.20	1.06	2.52	1.92
0.90	1.49	1.28	4.00	2.72
1.00	1.86	1.54	7.56	4.17
1.10	2.36	1.88	27.74	7.51
1.20	3.06	2.32	-	-
1.30	4.12	2.92	-	-
1.40	5.95	3.80	-	-
1.50	9.80	5.24	-	-
1.60	23.17	8.04	-	-

表 1: 近似解と厳密解の比較: 平均系内グループ数

図 2 に定義される. 補助変数 R, R_1, R_2 を各状態におけるサービス経過時間とし, 状態確率を次式に定義する.

$$(4.1) \quad \begin{cases} P_1(x)dx & = P(\text{state}(1), x \leq R < x + dx), \\ P_2B(x)dx & = P(\text{state}(2), x \leq R_1 = R_2 < x + dx), \\ P_2(x_1, x_2)dx_1dx_2 & = P(\text{state}(2), x_1 \leq R_1 < x_1 + dx_1, x_2 \leq R_2 < x_2 + dx_2) \\ P_3(x)dx & = P(\text{state}(3), x \leq R < x + dx). \end{cases}$$

状態方程式と境界条件は (4.2), (4.3) のように得られる. ただし, $\mu_i(x) = f_i(x)/F_i(x)$.

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}P_1(x) & = -\mu_2(x)P_1(x), \quad \frac{d}{dx}P_2B(x) = -2\mu_1(x)P_2B(x), \\ (\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2})P_2(x_1, x_2) & = -\{\mu_1(x_1) + \mu_1(x_2)\}P_2(x_1, x_2), \\ \frac{d}{dx}P_3(x) & = -\mu_1(x)P_3(x) \\ & + \alpha_2\{P_2B(x)\mu_1(x) + \int_0^\infty P_2(x, u)\mu_1(u)du + \int_0^\infty P_2(x, u)\mu_1(u)du\}. \end{cases}$$

$$(4.3) \quad \begin{cases} P_1(0) & = \int_0^\infty P_3(u)\mu_1(u)du + \alpha_2 \int_0^\infty P_1(u)\mu_2(u)du, \quad P_2B(0) = \alpha_1^2 \int_0^\infty P_1(u)\mu_2(u)du, \\ P_2(x, 0) & = \alpha_1\{P_2B\mu_1(x) + \int_0^\infty P_2(x, u)\mu_1(u)du\}, \\ P_2(0, x) & = \alpha_1\{P_2B\mu_1(x) + \int_0^\infty P_2(u, x)\mu_1(u)du\}, \\ P_3(0) & = \alpha_1\alpha_2 \int_0^\infty P_1(u)\mu_2(u)du. \end{cases}$$

上式を解き以下の解を得る. ただし, $\bar{F}_i(x) = 1 - F_i(x)$.

$$(4.4) \quad \begin{cases} P_1(x) & = (1 - \alpha_1)\bar{F}_2(x), \quad P_2B(x) = (1 - \alpha_1)\alpha_1^2\bar{F}_1(x)^2, \\ P_2(x_1, x_2) & = (1 - \alpha_1)\alpha_1^3\bar{F}_1(x)\bar{F}_1(x_2)\{\sum_{m=1}^\infty \alpha_1^{m-1}f_1^{(m)}(|x_1 - x_2|) \\ & + \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \alpha_1^{n+m-1} \int_0^\infty f_1^{(m)}(t)f_1^{(n)}(t + |x_1 - x_2|)dt\}, \\ P_3(x) & = \bar{F}_1(x)[\alpha_1(1 - 2\alpha_1) + 2(1 - \alpha_1)^2\alpha_1^2\{\sum_{m=1}^\infty \alpha_1^{m-1}F_1^{(m)}(x) \\ & + \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \alpha_1^{n+m-1} \int_0^\infty f_1^{(m)}(t)F_1^{(n)}(t+x)dt\}] \end{cases}$$

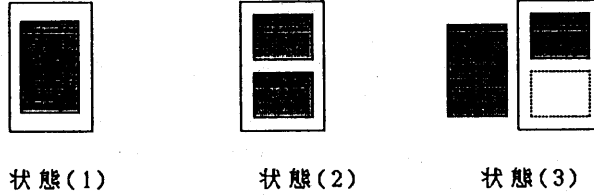


図 2: 状態の定義

以上より任意時点の状態確率 p_1, p_2, p_3 およびスループット λ は以下となる.

$$(4.5) \quad p_1 = \lambda(1 - \alpha_1)E(S_2), \quad p_2 = \lambda\alpha_1^2(1 - \alpha_1)^3G, \quad p_3 = \lambda[\alpha_1E(S_1) - 2\alpha_1^2(1 - \alpha_1)^3G.]$$

$$(4.6) \quad \lambda = \{(1 - \alpha_1)E(S_2) + \alpha_1E(S_1) - \alpha_1^2(1 - \alpha_1)^3G\}^{-1}, \quad G = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1^{n+m-2} \int_0^{\infty} \tilde{F}_1^{(m)}(u) \tilde{F}_1^{(n)}(u) du.$$

(4.6) より, S_2 の分布形はスループットに影響を与えないことが分かる. また期待値が等しく分布形の異なるサービス時間をもつ二つのシステム $\{S_1^{[1]}, S_2^{[1]}\}, \{S_1^{[2]}, S_2^{[2]}\}$ を比較すると以下の Lemma が成り立つことが直接確かめられる. ただし, \leq_c は以下, 即ち convex ordering の意味 [16] とする.

$$S_1^{[1]} \leq_c S_1^{[2]} \Leftrightarrow \int_x^{\infty} \tilde{F}_1^{[1]}(u) du \leq \int_x^{\infty} \tilde{F}_1^{[2]}(u) du, \quad 0 \leq x$$

Lemma 4.1: $E(S_1^{[1]}) = E(S_1^{[2]}), E(S_2^{[1]}) = E(S_2^{[2]})$ かつ $S_1^{[1]} \leq_c S_1^{[2]}$ のとき $\lambda^{[2]} \leq \lambda^{[1]}$ なる関係が成り立つ.

6 まとめ

コンピュータシステムの主記憶領域管理方式の一つである動的再配置方式を集団到着, 集団退去, 待時型の待ち行列としてモデル化を行い, その基本的な性質を調べた. 記憶領域の管理方式には本論で考察した動的再配置方式以外にも仮想記憶によるデマンドページング方式をはじめ様々なものが提案されている. 実際のシステムでの実現方式はそれらを組合せたものが多い. 今後はさらに他の方式と組み合わせた場合のモデル化と解析が必要とされる.

参考文献

- [1] Knuth, D.E.: The art of computer programming, Vol.1, Addison Wesley, 1968.
- [2] Bettridge, T.: Analytic Storage Allocation Model, Acta Informatica, Vol.3, pp.101-122(1974).
- [3] Bryant, R.M.: Maximum Processing Rates of Memory Bound System, J.ACM, Vol.29, No.2, pp.461-477(1982).
- [4] Federgruen, A. and Green, L.: An M/G/c queue in which the number of servers required is random, J. Appl., Vol.21, pp.583-601(1984).
- [5] 伊澤喜美男: 動的再配置の解析と最適システムの設計, 情報処理学会誌, Vol.16, No.5(1975).

- [6] 稻守久由:多呼種集団到着モデルの解析, 信学論, Vol.J71-A, No.8, pp.1632-1641(1988).
- [7] Fakinos, D.: The M/G/k group-arrival group-departure loss system, J. Appl. Prob., Vol. 19, pp.826-834(1982).
- [8] Manifold, D.R. and Tran-Gia: Analysis of a finite storage system with batch input arising out of message packetization, IEEE Tran. Comm., Vol.30, No.3, pp.456(1982).
- [9] 紀一誠: 領域競合をもつ待ち行列の解析, 京大数理解析件講究録 519, pp.99-114(1985).
- [10] 紀一誠: 一般保留時間分布をもつ領域競合型待ち行列の解析, 情報ネットワークのトラヒック評価に関する基礎的研究シンポジウム (科研費 62302059), 報文集 pp.11-19(1988).
- [11] 紀一誠: 領域競合型待ち行列における保留時間分布の影響, 電子情報通信学会第2種研究会, システムのモデリングと性能評価研究会資料, pp.61-66(1988).
- [12] 紀一誠: Basic Equations の応用, 情報ネットワークのトラヒック評価に関する基礎的研究シンポジウム, 科研費 (62302059), 報文集 pp.201-211(1989).
- [13] 紀一誠: 領域競合をもつ待ち行列の解析, 情報処理学会第31回大会, pp.215-216, 昭和60年後期.
- [14] 紀一誠: 一般保留時間分布をもつ領域競合型待ち行列の解析, オペレーションズリサーチ学会, 1988年度春季研究発表会, pp.71-72.
- [15] 紀一誠, 山崎源治: Differential Balance Equations による領域競合型待ち行列の解析, オペレーションズリサーチ学会, 1989年度春季研究発表会, pp.241-242.
- [16] Stoyan, D. and Daley, D.J.: Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models, Jhon Willy & Sons Ltd., 1983.