

Diet-Sugar: ハイブリッド SAT 符号化を実装した SAT 型制約ソルバー

宋 剛秀^{1,a)} 番原 睦則^{1,b)} 田村 直之^{1,c)}

概要: 与えられた命題論理の充足可能性判定問題 (SAT 問題) について, それらを解くプログラムである SAT ソルバーの性能が 2000 年以降大きく向上している. それを背景として, 整数上の制約充足問題 (CSP) を SAT 問題 に変換 (符号化) し, 高速な SAT ソルバーを用いて解く方法が成功を取っている.

CSP の命題論理への符号化としては, 様々な方法がこれまで提案されているが, いずれの符号化も長所と短所が存在する. 例えば, 順序符号化は多くの問題に対して優れた性能を示すが, 与えられた CSP の変数のドメインサイズが大きい場合, 生成される SAT 問題のサイズが巨大になるという問題がある. 対数符号化はコンパクトな SAT 問題を生成することができるが, 桁上げ伝搬のために順序符号化より性能が劣ることがある.

本ポスター発表では, これらの異なる特長を持った順序符号化と対数符号化を融合したハイブリッド SAT 符号化を実装した SAT 型制約ソルバーである Diet-Sugar の説明を行う. また性能評価として Diet-Sugar を最新の SMT ソルバー Z3, Yices, および CSP ソルバー Mistral, Opturion CPX と比較した実験結果を説明する.

キーワード: 制約充足問題, SAT ソルバー, SAT 符号化, ハイブリッド符号化

1. SAT 型制約ソルバー Diet-Sugar

Diet-Sugar は, 制約充足問題 (CSP) を命題論理の充足可能性判定問題 (SAT 問題) に符号化し, 高速な SAT ソルバーを用いて求解を行うシステム (SAT 型制約ソルバー) である. 図 1 は, Diet-Sugar が与えられた CSP の解を計算する手順を記述したものである. CSP から SAT 問題への符号化には, 順序符号化 [1], [2] と対数符号化 [3] に加えてこれら 2 つの符号化を融合したハイブリッド符号化 [5] を利用可能である.

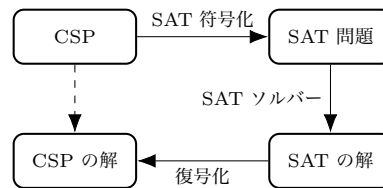


図 1 Diet-Sugar の枠組み

現在 Diet-Sugar は, 入力として XCSP^{*1} 形式もしくは SAT 型制約ソルバー Sugar[6]^{*2} の CSP 記述形式のファイルを受け取り, CSP の解を出力する. 特長は以下になる.

- 複数の符号化を関連付けるためのチャネリン

¹ 神戸大学情報基盤センター

^{a)} soh@lion.kobe-u.ac.jp

^{b)} banbara@kobe-u.ac.jp

^{c)} tamura@kobe-u.ac.jp

^{*1} https://www.cril.univ-artois.fr/CPAI08/XCSP2_1.pdf

^{*2} <http://bach.istc.kobe-u.ac.jp/sugar/>

```

01: (int S 0 9)
02: (int E 0 9)
03: (int N 0 9)
04: (int D 0 9)
05: (int M 0 9)
06: (int O 0 9)
07: (int R 0 9)
08: (int Y 0 9)
09: (alldifferent S E N D M O R Y)
10: (int SEND 1000 9999)
11: (int MORE 1000 9999)
12: (int MONEY 10000 99999)
13: (= SEND (+ (* 1000 S) (* 100 E) (* 10 N) D))
14: (= MORE (+ (* 1000 M) (* 100 O) (* 10 R) E))
15: (= MONEY (+ (* 10000 M) (* 1000 O) (* 100 N) (* 10 E) Y))
16: (= (+ SEND MORE) MONEY)

```

図 2 Diet-Sugar の問題記述例 ($SEND + MORE = MONEY$)

グ制約を使わずにハイブリッド符号化できること。これにより余分な節を出力することなく順序符号化と対数符号化を融合できる。

- CSP の変数毎に順序符号化と対数符号化のどちらを使うのかを選択できること。これにより問題に応じてどの程度どちらの符号化を使うのかを制御できる。

2. 問題記述例

イギリスのパズル作家 H. E. Dudeney が 1924 年に発表した有名な覆面算 $SEND + MORE = MONEY$ を使って、Diet-Sugar の問題記述の例を図 2 に示す。

この例では 1 行目から 8 行目までで、問題の各アルファベットに対応する整数変数を定義している。9 行目では各アルファベットが互いに異なる値をとるという制約を `alldifferent` というグローバル制約を使って定義している。10 行目から 12 行目は $SEND$, $MORE$, $MONEY$ の値を表す整数変数を定義しており、13 行目から 15 行目ではその値を計算する制約を定義している。最終的に 16 行目で覆面算の計算式に対応する制約を定義している。

この入力ファイルに対して Diet-Sugar を実行すると、SAT 問題への符号化、SAT ソルバーの起動、

```

s SATISFIABLE
a S 9
a E 5
a N 6
a D 7
a M 1
a O 0
a R 8
a Y 2
a SEND 9567
a MORE 1085
a MONEY 10652
a

```

図 3 Diet-Sugar の出力例

SAT ソルバーの結果の復号化が行われ、図 3 のように元の問題に対する値割当てが得られる。

3. 性能評価

性能評価は 2009 年の CSP ソルバー競技会のベンチマーク 1458 問を用いて行った。このベンチマークには矩形パッキング、スケジューリング、グラフ彩色問題など様々な組合せ問題が含まれている。各問について制限時間 1000 秒とし、解けた問題数を次に説明する 4 つのシステムと比較した。

- Opturion CPX (1.0.2) は SAT ソルバーと制約ソルバーのハイブリッドソルバーであり、2015 年に行われた制約ソルバーの競技会である Minizinc Challenge 2015 の複数部門で優勝したソルバーである。
- Mistral (1.550) は SAT 型ではない制約ソルバーであり、2009 年の制約ソルバー競技会の複数部門で優勝したソルバーである。
- Yices (2.4.2) と Z3 (4.3.2) は SMT ソルバーであり、2015 年の SMT ソルバー競技会の Quantified Free Linear Integer Arithmetic (QF_LIA) 部門でそれぞれ優勝、準優勝したソルバーである。今回の性能評価では背景理論として QF_LIA を用いた。

性能評価の結果を表したカクタスプロットを図

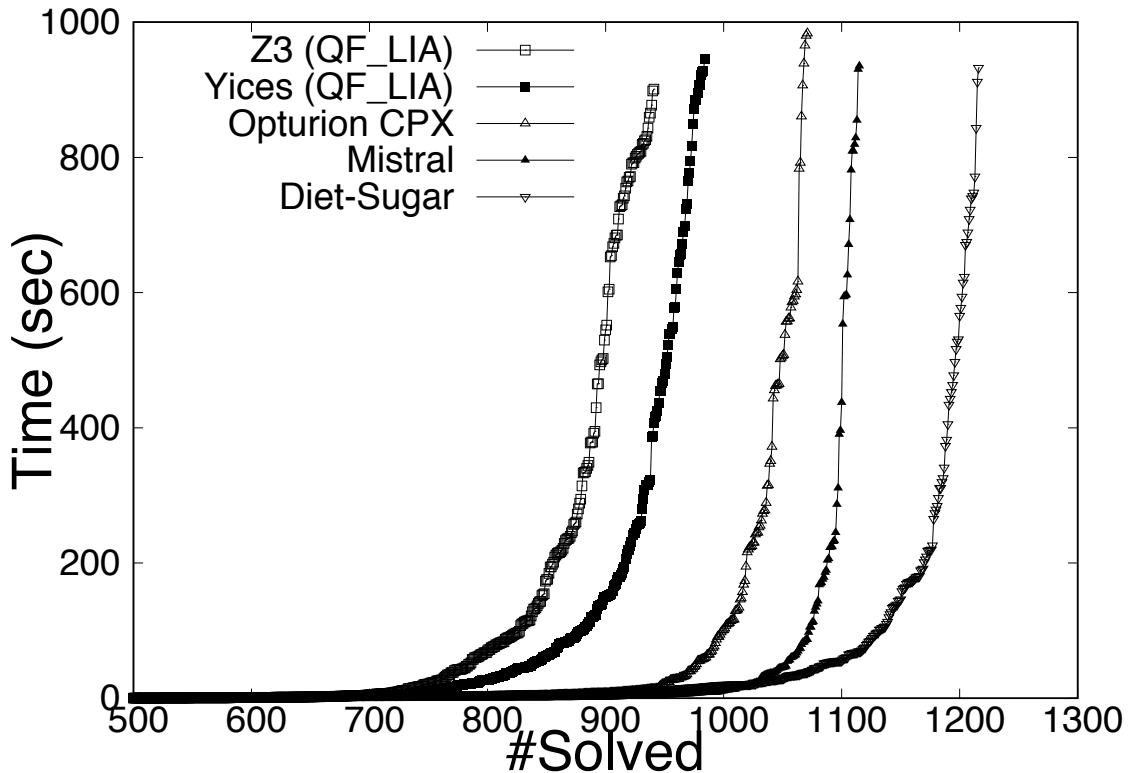


図 4 各システムにおける解けた問題数と計算時間の比較

4 に示す。横軸は制限時間内に解けた累積の問題数、縦軸は CPU 時間を表しており、プロットが右下にあるほど性能が良いことを示している。各システムで解けた問題数は Diet-Sugar (1216 問)、Mistral (1115 問)、Opturion CPX (1071 問)、Yices (984 問)、Z3 (941 問) であった。Diet-Sugar は結果として最も高速に多くの問題を解くことに成功した。表 1 は、問題シリーズ毎に各システムで解けた問題数を示している。多くの問題シリーズで最も多くの問題を解いていることが分かる。

4. おわりに

本稿では SAT 型制約ソルバー Diet-Sugar の概要、問題記述を説明し、求解性能の評価を行った。性能評価で用いた矩形パッキング、スケジューリング、グラフ彩色問題などの組合せ問題を解くには SMT ソルバー、制約ソルバー、SAT 型制約ソルバーを使うなどいくつかの方法が考えられる。

その中で、SAT 型制約ソルバーは原問題を SAT 問題に符号化して解き復号化するという処理が必要であり、一見非効率にみえる。しかし、ハイブリッド符号化のように既存符号化の良いところをうまく組み合わせて高速な SAT ソルバーを利用することで、今回用いた 1458 問のベンチマークについては最新の SMT ソルバー、制約ソルバーを上回る性能を示すことが分かった。

最後に、Diet-Sugar はオープンソースソフトウェアであり、web page^{*3} で公開している。興味のある方は参照頂きたい。

参考文献

- [1] J. M. Crawford and A. B. Baker, "Experimental results on the application of satisfiability algorithms to scheduling problems," in *Proceedings of the 12th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI 1994)*, 1994, pp. 1092-1097.

*3 <http://kix.istc.kobe-u.ac.jp/~soh/dsugar/>

表 1 各システムにおける解けた問題数 (問題シリーズ毎)

| 問題シリーズ | 問題数 | 提案システム | 比較した CSP/SMT ソルバー | | | |
|------------------------|------|-------------|-------------------|-------------|------------|------------|
| | | | Diet-Sugar | Mistral | Opturion | Yices |
| 2D Strip Packing | 20 | 8 (40%) | 5 (25%) | 4 (20%) | 6 (30%) | 6 (30%) |
| All Interval Series | 15 | 9 (60%) | 15 (100%) | 8 (53%) | 7 (47%) | 7 (47%) |
| BIBD | 83 | 79 (95%) | 72 (87%) | 24 (29%) | 66 (80%) | 32 (39%) |
| BMC | 15 | 15 (100%) | 15 (100%) | 15 (100%) | 15 (100%) | 15 (100%) |
| Chessboard Coloration | 15 | 12 (80%) | 11 (73%) | 10 (67%) | 12 (80%) | 12 (80%) |
| Cumulative Job-Shop | 10 | 4 (40%) | 1 (10%) | 3 (30%) | 4 (40%) | 4 (40%) |
| Domino | 10 | 9 (90%) | 10 (100%) | 10 (100%) | 10 (100%) | 10 (100%) |
| Fischer | 25 | 24 (96%) | 14 (56%) | 21 (84%) | 23 (92%) | 23 (92%) |
| Golomb Ruler | 28 | 23 (82%) | 23 (82%) | 20 (71%) | 15 (54%) | 16 (57%) |
| Graph Coloring | 141 | 98 (70%) | 122 (87%) | 81 (57%) | 62 (44%) | 60 (43%) |
| Haystacks | 15 | 3 (20%) | 5 (33%) | 0 (0%) | 0 (0%) | 0 (0%) |
| Job-Shop | 76 | 67 (88%) | 51 (67%) | 64 (84%) | 61 (80%) | 53 (70%) |
| Knights | 10 | 9 (90%) | 7 (70%) | 4 (40%) | 9 (90%) | 9 (90%) |
| Langford | 43 | 27 (63%) | 32 (74%) | 23 (53%) | 24 (56%) | 25 (58%) |
| Latin Square | 10 | 9 (90%) | 6 (60%) | 5 (50%) | 5 (50%) | 5 (50%) |
| Magic Square | 18 | 13 (72%) | 8 (44%) | 9 (50%) | 3 (17%) | 3 (17%) |
| Multi Knapsack | 6 | 6 (100%) | 6 (100%) | 6 (100%) | 6 (100%) | 5 (83%) |
| NengFa | 7 | 7 (100%) | 7 (100%) | 6 (86%) | 6 (86%) | 4 (57%) |
| Open-Shop | 75 | 71 (95%) | 70 (93%) | 71 (95%) | 62 (83%) | 55 (73%) |
| Perfect Square Packing | 74 | 58 (78%) | 42 (57%) | 56 (76%) | 57 (77%) | 51 (69%) |
| Pigeons | 29 | 23 (79%) | 29 (100%) | 11 (38%) | 9 (31%) | 8 (28%) |
| Primes | 76 | 70 (92%) | 70 (92%) | 71 (93%) | 53 (70%) | 33 (43%) |
| Pseudo-Boolean | 363 | 312 (86%) | 249 (69%) | 297 (82%) | 248 (68%) | 282 (78%) |
| Quasigroup Existence | 5 | 5 (100%) | 5 (100%) | 5 (100%) | 5 (100%) | 5 (100%) |
| Queens | 15 | 11 (73%) | 12 (80%) | 9 (60%) | 7 (47%) | 6 (40%) |
| Queens-Knights | 10 | 10 (100%) | 8 (80%) | 10 (100%) | 9 (90%) | 10 (100%) |
| RCPSp | 78 | 78 (100%) | 78 (100%) | 78 (100%) | 77 (99%) | 78 (100%) |
| Rader Surveillance | 65 | 65 (100%) | 65 (100%) | 65 (100%) | 64 (98%) | 65 (100%) |
| Ramsey | 16 | 10 (63%) | 10 (63%) | 9 (56%) | 4 (25%) | 5 (31%) |
| Schurr's Lemma | 10 | 9 (90%) | 8 (80%) | 8 (80%) | 3 (30%) | 2 (20%) |
| Social Golfers | 10 | 6 (60%) | 6 (60%) | 6 (60%) | 1 (10%) | 4 (40%) |
| Super-solutions | 85 | 66 (78%) | 53 (62%) | 62 (73%) | 51 (60%) | 48 (56%) |
| 合計 | 1458 | 1216 (83%) | 1115 (76%) | 1071 (73%) | 984 (67%) | 941 (65%) |

- [2] N. Tamura, A. Taga, S. Kitagawa, and M. Banbara, "Compiling finite linear CSP into SAT," *Constraints*, vol. 14, no. 2, pp. 254–272, 2009.
- [3] K. Iwama and S. Miyazaki, "SAT-variable complexity of hard combinatorial problems," in *Proceedings of the IFIP 13th World Computer Congress*, 1994, pp. 253–258.
- [4] A. V. Gelder, "Another look at graph coloring via propositional satisfiability," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 156, no. 2, pp. 230–243, 2008.
- [5] T. Soh, M. Banbara, and N. Tamura, "A hybrid encoding of CSP to SAT integrating order and log encodings," in *27th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, ICTAI 2015, Vietri sul Mare, Italy, November 9-11, 2015*, 2015, pp. 421–428.
- [6] N. Tamura and M. Banbara, "Sugar: a CSP to SAT translator based on order encoding," in *Proceedings of the 2nd International CSP Solver Competition*, 2008, pp. 65–69.