6M-01

階層型ガウシアンマルコフ確率場を用いた画像ノイズ除去

門馬維紀 †　　安田宗樹 ‡
山形大学大学院理工学研究科 †　　山形大学大学院理工学研究科 ‡

1. はじめに

本研究では図 1 のような確率的画像処理によるノイズ除去手法を扱う．元画像 $\boldsymbol{x}$ にランダムノイズが加わり，劣化画像 $\boldsymbol{y}$ が生成されたと仮定する．既知の劣化画像の情報のみから元画像を推定することで，ノイズ除去した修復画像を得ることができる．このとき，事後確率が最大になる $\boldsymbol{x}$ が最適な修復画像と考え，最大事後確率 (Maximum a posterior (MAP)) 推定によってノイズ除去を行う．その際，事前確率を確率モデルで表すのにガウシアンマルコフ確率場 (Gaussian Markov random field (GMRF)) がしばしば用いられる．GMRF に基づく画像ノイズ除去ではパラメータの設定により精度が左右されるため，最適なパラメータを求めるのにパラメータ推定を行う手法が提案されている [1].

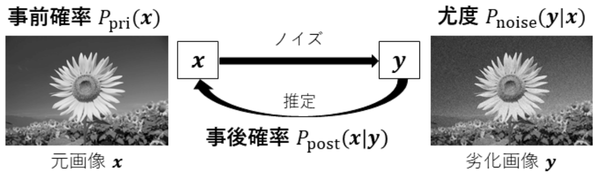

図 1　確率的画像処理によるノイズ除去.

本研究ではこの GMRF の事前分布の超事前分布を考えることによって，階層型に拡張した GMRF に基づく確率的画像処理アルゴリズムを提案する．これを階層型ガウシアンマルコフ確率場 (Hierarchical Gaussian Markov random field (HGMRF)) [2] という．ランダムノイズを加法性ホワイトガウスノイズ（Additive white Gaussian noise (AWGN)）とし，提案法と従来法 [1]，そして非局所平均 (Non-local means (NLM)) フィルタによるノイズ除去を比較して評価を行う．

2．ガウシアンマルコフ確率場

GMRF を用いるために，まず画像をグラフィカルモデルに置き換える．各ピクセルをノード $V \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ として最近接のピクセル同士を無向リンク $E \coloneqq \{\{i,j\} \mid i,j \in V \,\mathrm{are\,adjcent}\}$ で結んだ格子状のグラフを考える．各ノード i 上に確率変数 x_i を割り当て，各確率変数は各ピクセルの輝度値を表すとする．GMRF は次のように定義される．

$$P_{\mathrm{pri}}(\boldsymbol{x} \mid \Theta) \coloneqq \frac{1}{Z_{\mathrm{pri}}(\Theta)} \exp\left(\sum_{i \in V} b_i x_i - \frac{\lambda}{2}\sum_{i \in V} x_i^2 - \frac{\alpha}{2}\sum_{\{i,j\} \in E}(x_i - x_j)^2\right) \quad (1)$$

ただし，$\Theta \coloneqq \{\boldsymbol{b}, \lambda, \alpha\}$ とし，$Z_{\mathrm{pri}}(\Theta)$ は規格化定数とする．式 (1) は次式のように書き換えことができる．

$$P_{\mathrm{pri}}(\boldsymbol{x} \mid \Theta) \coloneqq \frac{1}{Z_{\mathrm{pri}}(\Theta)} \exp\left(\boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{S}_{\mathrm{pri}} \boldsymbol{x}\right) \quad (2)$$

ここで，精度行列 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{pri}} \coloneqq \lambda \boldsymbol{I}_n + \alpha \boldsymbol{\Lambda}$ は n 次の単位行列 $\boldsymbol{I}_n$ とグラフラプラシアン $\boldsymbol{\Lambda}$ で表す．

$$\boldsymbol{\Lambda} \coloneqq \begin{cases} |\partial(i)| & (i = j) \\ -1 & (\{i,j\} \in E) \\ 0 & (\mathrm{otherwise}) \end{cases} \quad (3)$$

このとき，$\partial(i)$ はノード i と隣接するノードの集合とし，$|\partial(i)|$ はノード i と隣接するノード数とする．

GMRF に基づく事前分布のバイアスパラメータ $\boldsymbol{b}$ を定数ベクトルと仮定すると，劣化画像 $\boldsymbol{y}$ が中心化されているとき $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ が最適であると示されている [1].

3．階層型ガウシアンマルコフ確率場への拡張

GMRF による事前分布のバイアスパラメータ $\boldsymbol{b}$ が定数ベクトルでない場合を考える．このとき，真の元画像がわからないと最適な $\boldsymbol{b} = \{b_i \mid i \in V\}$ を求めることができない [2]．階層ベイズの考え方に基づいて，$\boldsymbol{b}$ を設計して周辺化により削除する手法を用いる．本研究では，$\boldsymbol{b}$ はガウス分布に従った確率変数であるとする．このように未知のパラメータに対する事前分布つまり超事前分布を考えることにで，HGMRF とする．

超事前分布をパラメータ $\gamma > 0$ を用いて次のように定義する．

$$P_{\mathrm{bias}}(\boldsymbol{b} \mid \gamma) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(2\pi\gamma)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{b}^t \boldsymbol{b}\right) \quad (4)$$

この超事前分布を用いて事前分布を HGMRF に基づいて再定義する．

$$P^{\dagger}_{\mathrm{pri}}(\boldsymbol{x} \mid \omega_0) \coloneqq \frac{1}{Z^{\dagger}_{\mathrm{pri}}(\Theta)} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{H}_{\mathrm{pri}} \boldsymbol{x}\right) \quad (5)$$

Image Denoising using Hierarchical Gaussian Markov Random Field

† Yuki Momma; Graduate School of Science and Enginnering, Yamagata University
‡ Muneki Yasuda; Graduate School of Science and Enginnering, Yamagata University

ただし，$\omega_0 \coloneqq \{\gamma, \lambda, \alpha\}$ とし，$Z^{\dagger}_{\mathrm{pri}}(\omega_0)$ は規格化定数とする．ここで，精度行列 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{pri}}$ は

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{pri}} \coloneqq \boldsymbol{S}_{\mathrm{pri}} - \gamma(\boldsymbol{I}_n + \gamma \boldsymbol{S}_{\mathrm{pri}}^{-1})^{-1} \tag{6}$$

とする．ノイズの平均 0，分散 σ^2 とすると，尤度は

$$P_{\mathrm{noise}}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}, \sigma^2) \coloneqq \prod_{i \in V} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(y_i - x_i)^2}{2\sigma^2}\Big) \tag{7}$$

である．このときの事後分布は

$$P^{\dagger}_{\mathrm{post}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}, \omega) = \frac{1}{Z^{\dagger}_{\mathrm{post}}(\omega)} \exp\Big(\boldsymbol{g}^t \boldsymbol{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{H}_{\mathrm{post}} \boldsymbol{x}\Big) \tag{8}$$

となる．ただし，$\omega \coloneqq \{\gamma, \lambda, \alpha, \sigma^2\}$ とし，$Z^{\dagger}_{\mathrm{post}}(\omega)$ は規格化定数とする．このとき

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{post}} \coloneqq \frac{\boldsymbol{I}_n}{\sigma^2} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{pri}} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{g} \coloneqq \frac{\boldsymbol{y}}{\sigma^2} \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

とする．事後確率を最大にする $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ とすると

$$\boldsymbol{\rho} \coloneqq \boldsymbol{S}_{\mathrm{pri}}^{-1}(\boldsymbol{g} + \gamma \boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{v} \coloneqq (\boldsymbol{I}_n + \gamma \boldsymbol{S}_{\mathrm{pri}}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\rho} \tag{10}$$

であり，これを平均場方程式（ガウスザイデル法）で解くことによって $O(n)$ 時間で修復画像 $\boldsymbol{m}$ を得ることができる [2].

4．階層型ガウシアンマルコフ確率場のパラメータ推定

HGMRF におけるパラメータ推定では，周辺尤度関数

$$\ell(\omega) \coloneqq \ln \int_{-\infty}^{\infty} P_{\mathrm{noise}}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}, \sigma^2) P^{\dagger}_{\mathrm{pri}}(\boldsymbol{x} \mid \omega_0) d\boldsymbol{x} \tag{11}$$

を最大にするパラメータを求める．これを整理すると

$$\begin{aligned} \ell(\omega) = &-\frac{1}{2n\sigma^2}\|\boldsymbol{y}\|_2^2 + \frac{1}{2n}\boldsymbol{g}^t\boldsymbol{\rho} \\ &+ \frac{1}{2n}\ln\frac{\det \boldsymbol{H}_{\mathrm{pri}}}{\det \boldsymbol{H}_{\mathrm{post}}} - \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．最急上昇法によって各パラメータで ω に関して周辺尤度関数を最大にする点を求める．GMRF と同様に各パラメータにおいて $O(n)$ 時間でパラメータ推定を行うことができる [2].

5．数値実験

提案法である HGMRF によるノイズ除去結果について，従来法である GMRF[1] と NLM フィルタによるノイズ除去結果と比較評価する．NLM フィルタではノイズの分散を真のノイズの値とした最適な修復結果とする．

図 2 はノイズが $\sigma = 40$ のときの修復画像を示す．NLM の結果は GMRF よりも SSIM が高くなっているが，平滑度が高く視覚的にはノイズ除去精度が良いとは言えない．一方で，HGMRF の結果は NLM ほど平滑化による影響はなく，ノイズによる周辺との不自然な色差は減っている．

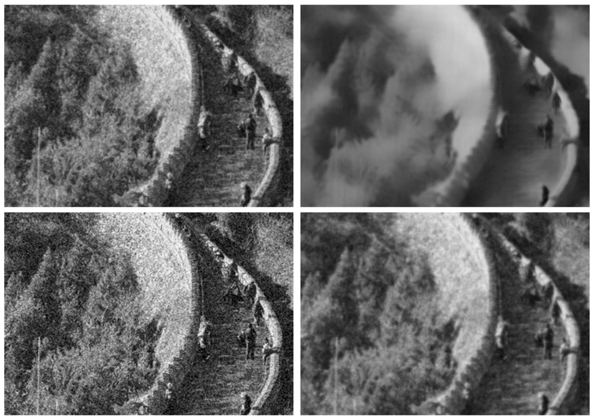

図 2　劣化画像 (左上)，NLM(右上)，GMRF(左下)，HGMRF(右下).

表 1　$\sigma = 40$ のときのノイズ除去精度の数値結果.

	noise	NLM	GMRF	HGMRF
MSE	1328.16	375.724	388.252	**241.982**
PSNR	16.8983	22.3821	22.2397	**24.293**
SSIM	0.246319	0.555166	0.444843	**0.593722**

表 2　$\sigma = 30$ のときのノイズ除去精度の数値結果.

	noise	NLM	GMRF	HGMRF
MSE	790.692	297.348	251.775	**209.503**
PSNR	19.1507	23.3982	24.1207	**24.9189**
SSIM	0.334907	0.595177	0.539334	**0.661807**

表 1，2 は MSE と PSNR，SSIM による評価結果で，noise は劣化画像を示す．すべてにおいて HGMRF の結果が最も良い．

6．まとめ

本研究では，超事前分布を考慮した階層型ガウシアンマルコフ確率場を提案した．この手法では最適なパラメータを自動で求めることができ，更に GMRF[1] や理想的な NLM フィルタによる手法と比べて高いノイズ除去性能をもつことを数値実験により確認した．平滑化のような効果によるぼけを減らすためにエッジをより強調するようなアルゴリズムを組み込むことが今後の課題である．

謝辞

本研究は科研費 （18K11459，18H03303, 21K11778） 及び JST CREST （JPMJCR1402） の助成を受けたものである．

文献

[1] M. Yasuda, J. Watanebe, S. Kataoka, and K. Tanaka. “Linear-Time Algorithm in Bayesian Image Denoising based on Gaussian Markov Random Field,” IEICE Transantions on Information and Systems, Vol. E101-D, No. 6, pp. 1629-1639, 2018.

[2] Y. Monma, K. Aro, and M. Yasuda. “Hierarchical Gaussian Markov Random Field for Image Denoising,” IEICE Transantions on Information and Systems, in press.