ソフトウェア工学 121－6
(1998. 11. 5)

区間変数に関する包含制約の等価変換

赤間 清　　繁田 良則　　宮本 衛市
北海道大学 大学院 システム情報工学専攻
札幌市北区北 13 条西 8 丁目. Tel. 011-706-6814
{akama,miya}@complex.eng.hokudai.ac.jp　shige@sdel.toshiba.co.jp

本論文は 計算を等価変換と見なす 等価変換パラダイムに基づいている. 等価変換パラダイムでは たくさんの等価変換ルールが計算を高速化する可能性がある. 本論文では, 区間変数の領域で 包含制約を等価変換する２つの新しい等価変換ルールのための基礎理論を開発する. そのルールは, 候補の制限ルールと共通性による特殊化変換であり, 大きな追加コストなしに計算の高速化に貢献することができる.

区間変数　意味　包含制約　等価変換

Equivalent Transformation for Member Constraints on an Interval Variable Domain

Kiyoshi Akama　Yoshinori Shigeta　Eiichi Miyamoto
Division of System and Information Engineering, Hokkaido University
North 13 West 8 Kita-ku Sapporo. Tel. 011-706-6814
{akama,miya}@complex.eng.hokudai.ac.jp　shige@sdel.toshiba.co.jp

This paper is based on the equivalent transformation (ET) paradigm, where computation is regarded as "equivalent transformation of declarative descriptions." In the ET paradigm, many ET rules can make execution more efficient. In this paper we develop a theory of two new equivalent transformation rules for member constraints in the interval variable domain: the candidate elimination rule (CE rule) and the common pattern specialization rule (CPS rule). These rules make computation more efficient without much additional cost.

interval variable, meaning, member constraint, equivalent transformation

1 まえがき

1.1 本論文の目的

包含制約とは,「ある対象があるリストの要素である」という形の制約であり, 問題の記述においてよく使われる基本的な制約である. 本論文では, 区間変数を含む領域で 包含制約を等価変換するための理論を与える. 具体的には, 包含制約を等価変換する2つのルール:「候補の制限ルール」と「共通性による特殊化ルール」が等価変換ルールであることを証明する.「候補の制限ルール」は包含制約の候補リストを縮小する. また,「共通性による特殊化ルール」は包含制約の候補の共通一般化を用いて節を特殊化する. これらの2つのルールは, 通常の項の領域では 等価変換ルールであることがすでに証明され, 知識処理の高速化に貢献することが示されている [2]. 本論文の理論は, その成果を 区間変数の領域に拡大する[1] ものである.

1.2 等価変換に基づく問題の表現と解法

等価変換パラダイムにおける 問題解決 [1, 3] の流れは次のようなものである.

1. ある未知の集合を求める問題が与えられたとき,
2. その集合を ある宣言的記述で表現し,
3. その宣言的記述を等価的に簡単化して,
4. 簡単化された宣言的記述から, 答えを得る.

等価変換パラダイムでは, 多様な知識表現を用いることができる. それは, 多様なデータ構造を定式化できる「特殊化システム [3]」という構造を基礎として, 宣言的記述のクラスが定義されているからである. 本論文で 区間変数を理論的に扱う基盤も, この特殊化システムの構造である.

1.3 等価変換ルールのモジュラー性

等価変換パラダイムでは, 多数のルールを適切に用いて効率的な等価変換を行うことを目指す. 等価変換ルールには モジュラー性がある. すなわち, 等価変換ルールの正当性は, 他の等価変換ルールとは無関係に判定でき, 正当な等価変換ルールを使う限り, いろいろな等価変換ルールが実行時に どのような順序で適用されようと, その結果の正当性が保証できる. これは 理論開発においても 実際のシステム構築においても 極めて重要である. それは いろいろな等価変換ルールを個別に正当化し, 蓄積して行けるからである [5]. 本論文で導入する 等価変換ルールも, このモジュラーな構造のもとで 着実な貢献を果たすことができる.

[1]区間変数の存在により 特殊化の作用が部分写像となるため, 項領域の理論の 単純な拡張だけでは 不十分である.

1.4 本論文の構成

2章では, 区間変数を含む項の領域での表現と計算の基礎を与える. 3章では, 等価変換を正当化するための最も基礎的な理論を復習する. 4章では, 区間変数の領域における等式制約を正しく等価変換するための理論を与える. 5章では, 候補の制限による変換を定義し, その正当性を証明する. 6章では, 共通性による特殊化変換を定義し, その正当性を証明する.

2 区間変数領域の表現と計算の基礎

2.1 区間変数

区間変数とは, $B:[2,5]$ のように, タグ (B) と 区間 $([2,5])$ の2項組であり, その区間の範囲の実数 B という直観的意味を持つ. 区間変数は, 文献 [5, 7] の例が示すように, 知識処理の高速化に 著しく貢献する場合がある. 高速化が達成される主要な原因は, 区間変数によって 大まかな制約が伝播されることにより, 最終的に不要となる多くの選択肢が 効果的に枝刈りされることである.

本論文では,「等価変換パラダイム (文献 [1])」のもとで, 区間変数を用いた計算の基礎的な理論を与える.

2.2 区間変数を含む項

プログラムの基本要素として, 3種類の項を導入する. それは, 4のような定数, Y のような純変数[2], それに $B:[2,5]$ のような区間変数である. 純変数と区間変数をあわせて 変数と呼ぶ. 数学的には, $B:[2,5]$ のような区間変数は, B のようなタグ[3] と $[2,5]$ のような 区間の2項組として扱われる. これらの基本要素と f や g のような関数[4] を用いて 再帰的に $f(4,B:[2,5],g(Y))$ のような複合項をつくる. このようにして, 本論文で対象とする「区間変数を含む項」全体の集合が得られる. 本論文では, 簡単のために, 区間変数を含む項を 単に項と呼ぶことがある. 項のうち 変数を含まないものを基礎項と呼ぶ.

[2]純変数とは, いわゆる変数のことであるが, 区間変数と区別するためにこう呼ぶ.
[3]区間変数で使われる変数を特にタグと呼ぶ.
[4]これは 数学上の写像の意味の関数ではなく, 単なる記号である.

2.3 区間変数を含む項に対する基本特殊化

論理プログラミングでは，項は 代入によって変化 (特殊化) させられる [6]. 代入の最も基本的な単位は 束縛 (変数と項のペア) であり，たとえば，$f(X, g(Y))$ は 束縛 $X/h(Z,1)$ によって $f(h(Z,1), g(Y))$ に変化する．束縛の繰り返しによって 任意の代入効果を得ることができる．

しかし 区間変数を含む項の世界は，代入の概念だけでは不十分である．そこで，本論文では，代入の拡張概念である 「特殊化」の概念 (文献 [2, 3]) を用いる．特殊化は，項に対して 任意の変更を可能にする．

まず 区間変数を含む項を変更する基本的な操作として「基本特殊化」を導入する．純変数は，変数代入によって特殊化される．例えば， Z は $(Z, 2)$ という基本特殊化によって 2 へ 特殊化される．区間変数は，タグを変更することによって特殊化される．例えば，$B:[3,8]$ は (B, C) によって $C:[3,8]$ に特殊化される．区間変数は，区間をその部分集合（部分区間）に変更することによって特殊化される．$B:[3,8]$ は $(B,[4,5])$ という基本特殊化によって $B:[4,5]$ に特殊化される．区間変数は 区間に属する定数に特殊化される．$B:[3,7]$ は $(B, 5)$ という基本特殊化によって 5 に特殊化される．

4 種類の基本特殊化のうち，後の 2 種類の基本特殊化は，場合によっては 適用不可能になる．たとえば，$(B,[4,5])$ という基本特殊化は $B:[6,8]$ には 適用できない．これは $[4,5]$ が $[6,8]$ の部分区間ではないからである．同様に，$(B, 5)$ という基本特殊化は $B:[6,8]$ には 適用できない．これは 5 が $[6,8]$ の要素ではないからである．

2.4 区間変数を含む項に対する特殊化

等価変換パラダイムにおける 特殊化の概念は，適用不可能性を 部分写像 の概念によって 正確に扱うことができる．たとえば，$(B, 5)$ という基本特殊化の適用を 1 つの部分写像で表現し，その部分写像は，$B:[4,6]$ を 5 に移すが，$B:[6,8]$ では 未定義であるとする．

特殊化は，基本特殊化の列として定義される．たとえば，$[(Z,2),(B,C),(C,[4,5]),(C,5)]$ や空列 $[]$ は 特殊化の例である．特殊化全体の集合を $\mathcal{S}$ で表す．

特殊化の適用は，特殊化の中の基本特殊化の繰返し適用によって定義される．本論文では，特殊化を θ や σ などのギリシャ文字で表記し，特殊化の作用を (代入と同様に) 後置記法で表す．たとえば，項 t を 空列 $[]$ で特殊化すると t 自身が得られる．これは $t[]=t$ と書ける．また 項 t が $f(Z, B:[3,8])$ であり，特殊化 θ が $[(Z, C:[1,9]),(C,5)]$ であるとき，

$$
\begin{aligned}
t\theta &= f(Z, C:[3,8])[(Z, C:[1,9]),(C,5)] \\
&= f(C:[1,9], C:[3,8])[(C,5)] \\
&= f(5,5)[] \\
&= f(5,5)
\end{aligned}
$$

となる．基本特殊化が 適用不可能な場合が あるので，特殊化についても 適用不可能な場合が 存在する．特殊化が適用可能なのは，それに属する基本特殊化が 順次すべて適用可能なときである．

2.5 区間変数を含むアトムと その特殊化

述語と (区間変数を含む) 項の並びからなる $p(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ の形[5] の表現を 区間変数を含むアトム (または 単にアトム) と呼ぶ．アトムのうち 変数を含まないものを基礎アトムと呼ぶ．

(区間変数を含む) 項 に対する特殊化は 自然に (区間変数を含む) アトムに拡張できる．特殊化の アトムへの作用も 後置記法で表す．変数を含まない (引数が基礎項だけからなる) アトムを 基礎アトムと呼ぶ．

2.6 区間変数を用いた確定節

区間変数を含むアトムを用いて，確定節を作ることができる．たとえば，

$p(X:[2,5]) \leftarrow q(X:[3,8], Y:[2,5])$

は，確定節の例である．通常の理論と同じように，$\leftarrow$ の左を ヘッド，右をボディと呼ぶ．確定節のボディに さらに制約も書きたい場合がある．たとえば，

$p(Z) \leftarrow Z = X:[2,5], q(X:[3,8], Y:[2,5])$

は，等式制約 $Z = X:[2,5]$ をボディの先頭に持つ．

制約を形式的に扱うために，制約対象 a と制約領域 G の組 (a, G) で 制約を表す．この制約 (a, G) の直観的意味は，制約対象 a が 制約領域 G の元だけにしか具体化されないことである．たとえば，上記の等式制約 $Z = X:[2,5]$ を正式に表現するには，制約対象として

$a = equal(Z, X:[2,5])$

を用い，制約領域として

$G = \{equal(g, g) \mid g \text{ は基礎項}\}$

を使えばよい．

制約 (a, G) は，a が基礎アトムであるとき，基礎制約と呼ばれる．$a \in G$ を満たす基礎制約 (a, G) を真な制約と呼ぶ．$a \notin G$ を満たす基礎制約 (a, G) を偽な制約と呼ぶ．

特殊化 θ が制約 (a, G) に適用可能なのは，θ が a に適用可能なときであり，その適用結果 $(a, G)\theta$ は制約

[5]ただし，通常の Prolog の記法にならって，$n = 0$ のときは 括弧は省略し 述語だけを書く．

$(a\theta, G)$ である．このとき (a, G) はθ によって $(a\theta, G)$ に特殊化されるという．

ヘッドがアトムであり，ボディがアトムや制約からなる節を制約つき確定節と呼ぶ．本論文では 制約つき確定節をしばしば 単に確定節，あるいは，節と呼ぶことがある．基礎アトムまたは 基礎制約だけからなる制約つき確定節を 基礎節と呼ぶ．

制約つき確定節

$C = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_n)$

と 特殊化 θ に対して，もし θ が $H, B_1, B_2, \cdots, B_n$ のすべてに適用可能であるならば，θ は C に適用可能で，適用結果 $C\theta$ は

$C\theta = (H\theta \leftarrow B_1\theta, B_2\theta, \cdots, B_n\theta)$

であると定義する．$C\theta = C'$ のとき，C は θ で C' に特殊化される，または，C' は C の例であるという．基礎節 C' が C の例であるとき，C' は C の基礎例であるという．

3 等価変換の正当性のための基礎

本章では，すべてのデータ構造領域に共通に使われる定義 や 命題を復習する．なお，本論文で省略した概念の定義は，文献 [3] に従う．

3.1 記号

区間変数の領域のみならず，多くのデータ構造の領域は，アトム全体の集合 $\mathcal{A}$，基礎アトム全体の集合 $\mathcal{G}$，特殊化全体の集合 $\mathcal{S}$，特殊化の作用を定義する写像 μ の 4 項組で規定できる．その 4 項組を特殊化システムと呼ぶ．本章では，特殊化システム $\Gamma = \langle \mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mu \rangle$ を 任意に 1 つ仮定して 議論する．

a を $\mathcal{A}$ の元とするとき，a の基礎例全体の集合を $rep(a)$ で表す．制約つき確定節 C のヘッドを $head(C)$，ボディ中のアトムの集合を $atom(C)$，ボディ中の制約の集合を $const(C)$ で表す．$Tconst(\Gamma)$ は Γ 上の真な制約全体の集合である．Γ 上の基礎節全体の集合を $Gclause(\Gamma)$ で表す．

3.2 制約つき宣言的プログラムの意味

制約つき宣言的プログラムの意味を定義する．まず 節 C の意味 $\mathcal{M}(C)$ を

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(C) = \{\ & (head(C\theta), atom(C\theta)) \\
& \mid \theta \in \mathcal{S}, \\
& C\theta \in Gclause(\Gamma), \\
& const(C\theta) \subset Tconst(\Gamma)\ \}
\end{aligned}
$$

で定義する．

上の定義中の条件 $const(C\theta) \subset Tconst(\Gamma)$ は，節 C から得られる基礎例 $C\theta$ のうち，$C\theta$ のボディ中の制約がすべて真であるような基礎例だけが C の意味を求める際に考慮されることを要請している．

これを用いて，Γ 上のプログラム P に対して，写像 $T_P : 2^{\mathcal{G}} \to 2^{\mathcal{G}}$ を定義する．

定義 1 【写像 T_P】
$\Gamma = \langle \mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mu \rangle$ とする．写像 $T_P : 2^{\mathcal{G}} \to 2^{\mathcal{G}}$を，任意の $I \subset \mathcal{G}$ に対して

$$
\begin{aligned}
T_P(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid\ & C \in P, \\
& (x, y) \in \mathcal{M}(C), \\
& y \subset I\ \}
\end{aligned}
$$

で定義する． □

次に写像 T_P を使って，プログラム P の意味を定義する．

定義 2 【プログラムの意味】
P を Γ 上のプログラムとする．プログラム P の意味 $\mathcal{M}(P)$ を，

$$
\mathcal{M}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_P]^n(\emptyset)
$$

で定義する．ただし，$[T_P]^0(\emptyset) = \emptyset$，$[T_P]^{n+1}(\emptyset) = T_P([T_P]^n(\emptyset))$ である． □

3.3 節の置き換え

命題 1 P を 制約つき宣言的プログラム，C と C' を 制約つき確定節とする．もし $\mathcal{M}(C) = \mathcal{M}(C')$ ならば，

$\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C'\})$

が成り立つ． □

本論文の証明は 付録で与える．

3.4 節の特殊化

命題 2 P を制約つき宣言的プログラム，C を 制約つき確定節，(A, G) を C 中の制約であるとする．もし 特殊化 θ が，

「$C\sigma \in Gclause(\Gamma)$ かつ $A\sigma \in G$ を満たす任意の $\sigma \in \mathcal{S}$ に対して，$C\sigma = C\theta\rho$ を満たす $\rho \in \mathcal{S}$ が存在する」

を満たすならば，

$\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C\theta\})$

が成り立つ． □

4 区間変数領域の基礎的命題

4.1 記号

定数集合 K は 実数の空でない集合とシンボルの集合の和集合とする．関数集合 F は K と互いに素な集合，変数集合 V は $K \cup F$ と互いに素な 可算無限集合，タグ集合 W は $K \cup F \cup V$ と互いに素な 可算無限集合とする．述語集合 R は 任意の集合とする．F の各要素(関数) にはアリティと呼ばれる非負整数が対応していると仮定する．K, F, V, W, R の組を アルファベット と呼ぶ．このアルファベットから作られるアトム (区間変数を含む項と述語からなる) のなす特殊化システムを $\Gamma = \langle \mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mu \rangle$ で表す．前章までと異なり，本章以後は，$\Gamma = \langle \mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mu \rangle$ は 区間変数領域の特殊化システムに限定される．

区間変数を含む項 全体の集合を $\mathcal{A}_T$ で表す．基礎項全体の集合を $\mathcal{G}_T$ で表す．制約つき確定節 C に含まれる純変数 全体の集合を $pvar(C)$，区間変数 全体の集合を $ivar(C)$ と書く．

4.2 正則な確定節

$u:[2,6]$ と $u:[5,7]$ のように，2つの区間変数が，同一のタグを持ち，しかも異なる区間を持つとき，それらの区間変数は互いに「食い違っている」という．節が正則であるとは，互いに食い違っている区間変数を持たないことである．プログラムは，正則な節だけからなるとき，正則であるといわれる．任意のプログラム に対して，それと等価な 正則プログラムが存在すること[6]が容易に証明できる．

4.3 区間変数領域の等式制約

等号関係を記述する集合 $Equal$ を

$$Equal = \{equal(g,g) \mid g \in \mathcal{G}_T\}$$

とするとき，任意の $x, y \in \mathcal{A}_T$ に対する

$$(equal(x,y), Equal)$$

の形の制約を equal 制約 または等式制約と呼ぶ．簡単のため，$(equal(x,y), Equal)$ を $[x = y]$ と表記することがある．

4.4 区間変数領域の 包含制約

Γ 上のプログラム Q を

$$Q = \{\ member(X,[X|R]) \leftarrow . \quad member(X,[Y|R]) \leftarrow member(X,R).\}$$

とする[7]．包含関係を記述する集合 $Member$ を

$$Member = \mathcal{M}(Q)$$

とするとき，任意の $x, y \in \mathcal{A}_T$ に対する

$$(member(x,y), Member)$$

の形の制約を member 制約 または包含制約と呼ぶ．簡単のため，$(member(x,y), Member)$ を $[x \in y]$ と表記することがある．

4.5 純変数と任意の項の等式制約の処理

命題 3 P を 制約つき宣言的プログラム，C を 正則な制約つき確定節

$$H \leftarrow B_1, \cdots, B_{i-1}, B_i, B_{i+1}, \cdots, B_n$$

C 中の B_iを，純変数 X と 項 β から作られた等式制約 $[X = \beta]$ であるとする．そのとき，もし X が 項 β に出現しないならば，C から B_i を取り除いた 制約つき確定節

$$C' = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_{i-1}, B_{i+1}, \cdots, B_n)$$

と，$\theta = [(X, \beta)]$ に対して，

$$\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C'\theta\})$$

が成り立つ． □

4.6 単一化と等式制約解消特殊化

定義 3 【単一化子 と 基礎単一化子】
α, β を 項とする．$\alpha\theta = \beta\theta$ を満たす 特殊化 θ をα と β の単一化子という．α と β の単一化子が存在するとき，α と β は 単一化可能である．

$\alpha\theta = \beta\theta \in \mathcal{G}_T$ を満たす 特殊化 θ をα と β の 基礎単一化子という．α と β の 基礎単一化子が存在するとき，α と β は 基礎単一化可能である． □

定義 4 【等式の制約解消特殊化】
α, β を 項とする．次の条件を満たす特殊化 θ を $[\alpha = \beta]$ の等式制約解消特殊化という．

> P は 制約つき宣言的プログラム，C は 制約 $[\alpha = \beta]$ をボディに持つ正則な制約つき確定節，C' は C から 制約 $[\alpha = \beta]$ を除いてできる制約つき確定節とする．そのような 任意の P，C，C' に対して，
>
> $$\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C'\theta\})$$
>
> が成り立つ． □

この定義は，等式制約 $[\alpha = \beta]$ から決まる 等式制約解消特殊化 θ を用いれば，どんな「文脈」(P，C，C') のもとでも等式制約 $[\alpha = \beta]$ を解消できることを要請している．

[6]文献 [7] 参照

[7]Prolog の標準的な記法を用いている．$[X|R]$ は，項 $cons(X,R)$ を意味する．

区間変数の領域では，等式制約解消特殊化は 必ず存在することが証明されている [4]．項集合（$\mathcal{A}_T$ の部分集合）は，互いに食い違っている区間変数を含まないとき，正則であると言われる．

定理 1 $\{\alpha, \beta\}$ が 正則な項集合ならば，等式制約 $[\alpha = \beta]$ の等式制約解消特殊化 θ が存在する．このとき θ は α と β の単一化子となる． □

5 候補の制限による変換

5.1 候補の制限による変換の例

候補の制限による変換を 例で説明する．たとえば，確定節のボディに 包含制約

$[X : [2,4] \in [3,5,2]]$

が出現しているとき，区間変数 $X : [2,4]$ は 2 以上 4 以下の値しかとらないので，5 にはなりえない．そこで，候補のリスト [3,5,2] から 候補 5 を削除することができる．

このような変換は，候補が 数以外でも可能である．たとえば，確定節のボディに 包含制約

$[X : [2,4] \in [A : [3,4], B : [5,8], [3, C]]$

が出現しているとき，$B : [5,8]$ と $[3, C]$ は削除できる．区間変数 $X : [2,4]$ を具体化しても 5 以上 8 以下の数にも リストにもなりえないからである．

確定節のボディの 包含制約 $[t \in L]$ において，リスト L から その要素 s を削除できる十分条件の 1 つは，t と s の 基礎単一化が不可能なこと，すなわち $t\theta = s\theta \in \mathcal{G}_T$ を満たす 特殊化 θ が存在しないことである．たとえば，$X : [2,4]$ と $A : [3,4]$ は 基礎単一化可能だが，$X : [2,4]$ と $B : [5,8]$ は そうではない．

5.2 変換の正当性のポイント

候補の制限による変換の正当性のポイントを説明する．

C を，包含制約 $[x \in L]$ をボディに含む節とする．リスト L から，x と基礎単一化可能でない要素を取り除いたリストを L' とし，C の 包含制約 $[x \in L]$ を 包含制約 $[x \in L']$ に置き換えた節を C' とする．

包含制約 $[x \in L]$ がある特殊化で基礎化して真になるのは，$x\theta$ が $L\theta$ の ある要素と一致することである．しかし x と基礎単一化可能でない L の要素は，その真偽に関係しない．したがって，節 C がある特殊化 θ の適用で基礎化して $[x \in L]\theta$ も真になるならば，節 C' も同じ特殊化で基礎化し $[x \in L']\theta$ も真になる．

逆に，節 C' がある特殊化 θ で基礎化して $[x \in L']\theta$ が真になると仮定する．このとき，もし 節 C が θ で基礎化すれば，$[x \in L]\theta$ が真になるのは明らかである．しかし，θ には 次の問題がある．それは，(1)θ は $[x \in L]$ に適用できるか，(2) 適用したとき基礎化するか，の 2 つである．

これを解決するために，θ を元にして，これらの問題を 解決する新しい特殊化をつくり出す．その手順は，(1) θ を簡素化して C' に出現しない変数への操作部分を取り除き，σ を得る．(2) σ を C に適用して，$C\sigma$ を作る．(3) $C\sigma$ 中の変数を基礎化する特殊化 ρ を導入する．このとき，$\sigma \circ \rho$ は節 C を 基礎化し，$[x \in L]\theta$ が真になることが証明できる．

5.3 包含関係

包含制約の制約領域 $Member$ を，より具体的に書き下す準備として，次のように定義する．

任意の自然数 $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して，T_k は 述語が $member$ である基礎アトムで，第一引数が 第 2 引数の第 k 番目の要素と等しいもの全体の集合とする．

$$T_k = \{member(g_k, [g_1, g_2, \cdots, g_k | x]) \mid g_1, g_2, \cdots, g_k, x \in \mathcal{G}_T\}$$

以下で $[T_Q]^n(\emptyset)$ を $T_i \ (i = 1, 2, \cdots)$ と関係付ける．

命題 4 任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して，

$[T_Q]^n(\emptyset) = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$

が成り立つ． □

命題 5 $Member = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ □

命題 6 次の 2 つは同値である．

1. $member(g, [g_1, g_2, \cdots, g_n]) \in Member$
2. $g, g_1, g_2, \cdots, g_n \in \mathcal{G}_T, \bigvee_{i=1}^{n} (g = g_i)$ □

5.4 リストの要素の除去

以下では，

$t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n$

から t_i を抜いた列

$t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_n$

を

$t_1, t_2, \cdots, \hat{t_i}, \cdots, t_n$

と表記する．同様に，

$1, 2, \cdots, \hat{i}, \cdots, n$

は 1 から n までの列から i だけを除いた列を表す．

定理 2 P を Γ 上の制約つき宣言的プログラム，B_i を制約

$(member(x, [t_1, t_2, \cdots, t_i, \cdots, t_n]), Member)$

B_i' を 制約

$(member(x, [t_1, t_2, \cdots, \hat{t_i}, \cdots, t_n]), Member)$

C と C' を Γ 上の制約つき確定節

$C = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_{i-1}, B_i, B_{i+1}, \cdots, B_n)$

$C' = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_{i-1}, B_i', B_{i+1}, \cdots, B_n)$

とする．もし，C が正則で，x と t_i が基礎単一化可能でなければ，

$\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C'\})$

が成り立つ． □

この定理を基にして作られる等価変換ルールを「候補の制限ルール」と呼ぶ．

6 共通性による特殊化変換

6.1 共通性による特殊化変換の例

共通性による特殊化変換を 例で説明する．たとえば，確定節のボディに 包含制約

$[X \in [3,5,2]]$

が出現しているとき，純変数 X は 2 以上 5 以下の値しかとらないことがわかるので，X を $X:[2,5]$ に直すことができる．また，包含制約が

$[Y:[1,4] \in [3,5,2]]$

の場合には，区間変数 $Y:[1,4]$ を $Y:[2,4]$ に直すことができる．

もちろん もっと複雑な場合もありうる．たとえば，包含制約が

$[[3,Z] \in [[X, Y:[2,6]],[3,7]]$

の場合には，純変数 Z は 2 以上 7 以下の値しかとらないことがわかるので，Z を $Z:[2,7]$ に直すことができる．

とりうる範囲を知るために，共通一般化の概念が使える．たとえば，$W:[2,5]$ は 3，5，2 の共通一般化であり，$W:[2,7]$ は $Y:[2,6]$，7 の共通一般化である．上記の第一の例では，X を $W:[2,5]$ と 単一化することによって，X を $X:[2,5]$ に直すことができる．また，第二，第三の例でも，$Y:[1,4]$ や Z を $W:[2,7]$ と 単一化することによって，$Y:[1,4] \rightarrow Y:[2,4]$ や $Z \rightarrow Z:[2,7]$ の変更を知ることができる．

この単一化が失敗する場合には，その包含制約を含む節自体を削除することができる．たとえば，節のボディに 包含制約

$[X:[6,8] \in [3,5,2]]$

が出現しているとき，純変数 X は 2 以上 5 以下の値しかとらないことがわかるので，この節は削除できる．これは，3，5，2 の共通一般化 $W:[2,5]$ が $X:[6,8]$ と単一化しないことによっても説明できる．

6.2 共通性による特殊化変換の定義

π と $t_1, t_2, \cdots, t_n$ を $\mathcal{A}_T$ の元とする．π が $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の共通一般化であるとは，

$\pi\sigma_i = t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

を満たす 特殊化 $\sigma_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が存在することである．

P を Γ 上の制約つき宣言的プログラム，B_i を 制約

$(member(s, [t_1, t_2, \cdots, t_n]), Member)$

C を Γ 上の制約つき確定節

$C = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_i, \cdots, B_n)$

とする．π を $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の共通一般化で，C と共有変数を持たない項とする．このとき，

1. $[\pi = s]$ の 等式制約解消特殊化 θ が存在するならば，$P \cup \{C\}$ を $P \cup \{C\theta\}$ に変換する
2. $[\pi = s]$ の 等式制約解消特殊化 が存在しないならば，$P \cup \{C\}$ を P に変換する

のが，共通性による特殊化変換である．

6.3 変換の正当性のポイント

共通性による特殊化変換の正当性のポイントを説明する．節 C のボディに 包含制約

$[Y:[1,4] \in [3,5,2]]$

が出現しているとする．節 C の中のすべての $Y:[1,4]$ を $Y:[2,4]$ に置き換えてよいことを示すためには，次の道筋で節を変形し，それが等価変換であることが証明すればよい．

まず，節に出現しない純変数 X を用いて，節の中のその包含制約を 新しい包含制約と等式制約

$[X \in [3,5,2]], [X = Y:[1,4]]$

に置き換える．次に X を 3，5，2 の 共通一般化 $W:[2,5]$ に 特殊化する．これは 2つの制約を

$[W:[2,5] \in [3,5,2]], [W:[2,5] = Y:[1,4]]$

に直すことに等しい．そして最後に，等式制約 $[W:[2,5] = Y:[1,4]]$ を解消する．これによって得られる節は，節 C 中のすべての $Y:[1,4]$ を $Y:[2,4]$ に変換して得られる節と一致する．

6.4 共通性による特殊化変換の正当性

上記の Γ，C，B_i，π を基にして，次のような変数，制約，制約つき節，特殊化を導入する．

1. X は，C や π に出現しない変数
2. B_i' は，制約

   $(member(X, [t_1, t_2, \cdots, t_n]), Member)$

3. E は，制約
   $(equal(X,s), Equal)$
4. C'' は C の B_i を B_i' にかえて得られるΓ 上の制約つき確定節
   $C'' = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_i', \cdots, B_n)$
5. C' は C'' に E を付け加えて得られるΓ 上の制約つき確定節
   $C' = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_i', \cdots, B_n, E)$
6. $\{X/\pi\}$ は X に π を代入する基本特殊化 (X,π) だけからなる特殊化 $[(X,\pi)]$

まず，共通性による特殊化変換の正当性を証明するための準備を行なう．

補題 1 $\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C'\})$ □

補題 2 $\mathcal{M}(P \cup \{C'\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C'\{X/\pi\}\})$ □

補題 3 $[\pi = s]$ の 等式制約解消特殊化 θ が存在するとき，$\mathcal{M}(P \cup \{C'\{X/\pi\}\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C\theta\})$ であり，$[\pi = s]$ の 等式制約解消特殊化が存在しないとき，$\mathcal{M}(P \cup \{C'\{X/\pi\}\}) = \mathcal{M}(P)$ が成り立つ． □

これらの補題をもとにして，次の定理が証明できる．

定理 3 P を 制約つき宣言的プログラム，C を 制約つき確定節
$C = (H \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_i, \cdots, B_n)$
このボディの B_i を 制約
$(member(s, [t_1, t_2, \cdots, t_n]), Member)$
とする．π を $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の共通一般化で，C と共有変数を持たない項とする．$[\pi = s]$ の 等式制約解消特殊化が存在するとき，それを θ とすれば，
$\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P \cup \{C\theta\})$
が成り立つ．また，$[\pi = s]$ の 等式制約解消特殊化が存在しないとき，
$\mathcal{M}(P \cup \{C\}) = \mathcal{M}(P)$
が成り立つ． □

この定理を基にして作られる等価変換ルールを「共通性による特殊化ルール」と呼ぶ．

7 むすび

区間変数領域の包含制約を等価変換するための２つの定理を証明した．それらは,「候補の制限ルール」と「共通性による特殊化ルール」という２つの等価変換ルールの正当性を保証している．本論文で提案した２つの等価変換ルールは，ルールの モジュラー性により，他の数多くの等価変換ルール[8] と自由に組み合わせて，計算の効率をあげることができる．

[8] 負制約のための等価変換ルール群，一階論理制約を解消する等価変換ルール群などがある [9].

参考文献

[1] 赤間清, 繁田良則, 宮本衛市：論理プログラムの等価変換による問題解決の枠組, 人工知能学会誌, Vol.12, No.2, pp.90–99 (1997).

[2] 赤間清，川口 雄一，宮本衛市：項領域における包含制約の等価変換, 人工知能学会誌，Vol.13, No.2, pp.112–120 (1998).

[3] 赤間清, 川口 雄一, 宮本衛市：マルチセット領域上の等式制約の等価変換, 人工知能学会誌，Vol.13, No.3, pp.395–403 (1998).

[4] 赤間清：区間変数領域の等式制約解消特殊化, *Hokkaido University Information Engineering Technical Report*, HIER-LI-9803 (1998).

[5] 畑山満美子, 赤間清，宮本衛市：等価変換ルールの追加による知識処理システムの改善, 人工知能学会誌，Vol.12, No.6, pp.861–869 (1997).

[6] Lloyd, J.W.: *Foundations of Logic Programming*, Second edition, Springer-Verlag (1987).

[7] 繁田 良則, 赤間清, 宮本衛市：区間変数を含む項の空間のための特殊化システムと正則な確定節, 電子情報通信学会技術研究報告 SS98-8, pp17–24 (1998).

[8] 吹田 慶子，赤間清，宮本衛市：等価変換による制約充足問題の解法, 電子情報通信学会技術研究報告 SS96-18, pp.1-8 (1996).

[9] Yoshida, T., Akama, K. and Miyamoto, E.: Problem Solving by Equivalent Transformation of First Order Logical Constraints, Preprints Work. Gr. for ICS 98-ICS-114-2, pp7–12 (1998).