

ソフトウェア信頼度成長モデルにおける統合モデルの 曲線の形状について

古山 恒夫

東海大学 理学部

概要：ソフトウェア信頼度成長モデルにおける統合モデルのうち、累積欠陥数の初期値が 0 となるモデルが表す曲線の形状を明らかにした。最初に、(1)統合モデルを表す微分方程式の 4 つのパラメータのうち形状に密接に関係する 2 つのパラメータを変数変換することにより、微分方程式の一般解が見やすくなることを示す。次に、(2)統合モデルがサポートする平均値関数を表すさまざまな曲線の形状の多様性が強度関数の視点から見るとわかりやすくなることを示す。最後に(3)パラメータの値と曲線の形状の関係、すなわち曲線が S 字形となるパラメータの条件及びパラメータがある極限值をとる場合の曲線の形状と一般解の近似式を明らかにする。

On the shapes of curves created by a manifold growth model that unifies software reliability growth models

Tsuneo Furuyama

Tokai University, School of Mathematical Sciences

Abstract: The characteristics of various shapes of the curves created by a manifold growth model that unifies software reliability growth models are clarified. First, it is shown (1) the general solutions of the differential equation that represents a manifold growth model become easily understandable by introducing a new parameter. Next, it is shown (2) variety of the shapes of the curves created by the model is easily explained from the viewpoint of intensity function instead of mean value function of NHPP model. Finally, (3) the relationships between values of the parameters and the shapes of curves are also shown.

1. はじめに

信頼性の高いソフトウェアを予定期間内に開発するためには、残存欠陥数を高い精度で推定することが不可欠である。この課題を解決するために、これまで多くの方法が提案されてきたが、最も広く利用されているのは、試験工程で検出される欠陥の累積値の傾向から残存欠陥数を推定する方法である。すなわち、検出欠陥累積数の特性をもとにしたソフトウェア信頼度成長モデル (SRGM) を利用する方法である。

代表的な SRGM としては、指数形モデル^[1]、超指数形モデル、遅延 S 字形モデル^[2]、習熟 S 字形モデル^[3]などがある。また曲線の形状が累積欠陥数の増加傾向に似ているとして利用されているものにゴンペルツ曲線やロジスティック曲線がある (図 1)。

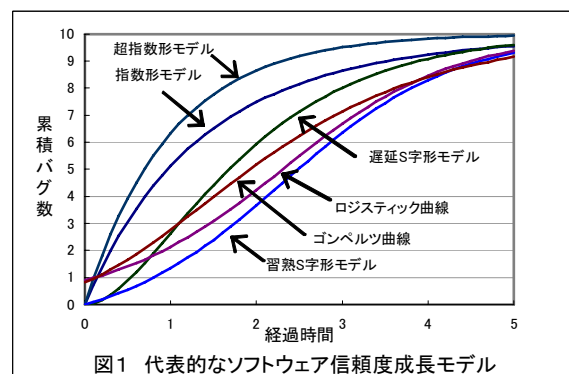


図1 代表的なソフトウェア信頼度成長モデル

統合モデル^{[4], [5]}は、これまで提案された多くのモデルをカバーできるだけでなく、これまでモデル化されていなかった領域もカバーする。そのため、このモデルを用いれば、対象とする累積欠陥データに既存の SRGM をそれぞれ適用して結果を比較することなしに、より高い精度で残存欠陥数を推定するこ

とができる。

統合モデルのカバー範囲、言い換えると統合モデルで表すことのできる曲線の範囲はS字形の曲線から非S字形の曲線まで多様なものであるが、これまで統合モデルで表すことのできる曲線の具体的な形状は明らかにされていなかった。

本論文では、統合モデルのうち、累積欠陥数の初期値が0となるモデルが表す曲線の形状を明らかにする。最初にいくつかの典型的な統合モデルの曲線の例を示す。次にそれらの曲線の形状の多様性が強度関数の視点から見るとわかりやすくなることを示す。さらに曲線の変曲点に着目してS字形の曲線と非S字形曲線を分けるパラメータの条件を明らかにする。最後に形状に影響を与えるパラメータがある極限值をとった場合のモデル式と曲線の形状を示す。

2. 統合モデル

2.1 統合モデルを表す微分方程式と一般解^{[4][5]}

統合モデルは次の微分方程式で表される。

$$\frac{d(y+\delta)}{dt} \cdot (y+\delta)^{\gamma-1} = \alpha \cdot \exp(-\beta t) \quad (1)$$

ここで y は累積欠陥数であり、 t は時刻（あるいは工数やテスト項目消化数）である。

$\gamma \neq 0$ の場合の一般解は次の式で表される。

$$y = \left\{ \frac{\alpha\gamma}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + (y_0 + \delta)^\gamma \right\}^{\frac{1}{\gamma}} - \delta \quad (2)$$

ただし、 y_0 は $t=0$ のときの y の値である。対象とするモデルを $y_0 = 0$ の場合に限定すると、式(2)は次の式になる。

$$y = \left\{ \frac{\alpha\gamma}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \delta^\gamma \right\}^{\frac{1}{\gamma}} - \delta$$

$$= \left\{ \frac{\alpha\gamma + \beta\delta^\gamma}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta^\gamma} e^{-\beta t} \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma}} - \delta \quad (3)$$

4つのパラメータ α 、 β 、 γ 、 δ は複雑に絡み合っているが、主な役割は次のようなものである。

- α : y 軸方向の伸縮に影響を与えるパラメータ。

解が非単調減少であるためには $\alpha > 0$ でなければならぬ。

- β : t 軸方向のスケーリングファクタ。曲線が $t \rightarrow \infty$ のとき一定値に収束するためには $\beta > 0$ でなければならぬ。
- γ : 曲線のたわみを示すパラメータで形状に最も大きな影響を与えるパラメータ
- δ : 一般解の y 軸方向への移動量を表すパラメータ。 $t \geq 0$ で常に $y \geq 0$ となるためには $\delta \geq 0$ でなければならぬ。

2.2 パラメータ変換による一般解の書き換え

式(3)において $t \rightarrow \infty$ のときの y の値が総欠陥数である。総欠陥数を N とすると N は次の式で表される。

$$N = \left(\frac{\alpha\gamma + \beta\delta^\gamma}{\beta} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \delta \quad (4)$$

さらに、次に示す新しいパラメータ λ を導入する。

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha\gamma + \beta\delta^\gamma} \quad (5)$$

式(4)と式(5)を用いて $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 空間上の一般解を $(N, \beta, \gamma, \lambda)$ 空間上で扱うことにすると、式(3)は次のように変形される。

$$y = N \frac{\left(1 - \gamma\lambda e^{-\beta t} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \left(1 - \gamma\lambda \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{1 - \left(1 - \gamma\lambda \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (6)$$

式(6)では、 β が厳密な意味での t 軸（時間軸）方向のスケーリングファクタ、 N が厳密な意味での y 軸（累積欠陥数の軸）方向のスケーリングファクタ、 γ と λ が一般解の形状に影響を与えるパラメータとなっている。なお、 $t \geq 0$ で常に $1 - \gamma\lambda e^{-\beta t} \geq 0$ でなければならぬことから、 $\beta > 0$ の場合 $\gamma\lambda \leq 1$ という条件を満たす必要がある。

$\gamma \rightarrow 0$ の場合は、式(6)から

$$y = N \frac{\exp(-\lambda e^{-\beta t}) - \exp(-\lambda)}{1 - \exp(-\lambda)} \quad (7)$$

が得られる。式(7)は式(1)で $\gamma = 0$ のときの解であ

る。式(7)における λ は式(5)から次の式となる。

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta} \quad (8)$$

$\gamma = 1$ の場合、式(6)は

$$y = N(1 - e^{-\beta t}) \quad (9)$$

となり、 λ の値によらず指数形モデルとなる。

3. 統合モデルの解の形状

3. 1 一般解の形状例

($N, \beta, \gamma, \lambda$) 空間上で曲線の形状を決定するパラメータ γ と λ を変化させたときの解の形状を以下に示す。なお、グラフでは基準として指数形モデルの曲線も図示している。

(1) $\gamma = -1$ の場合

式(6)に $\gamma = -1$ を代入すればわかるように、これは習熟S字形モデルの場合である。このモデルが対象とする曲線群を図2に示す。図2から λ が大きくなると同じ形状の曲線が t 軸の正の方向に移動することがわかる。

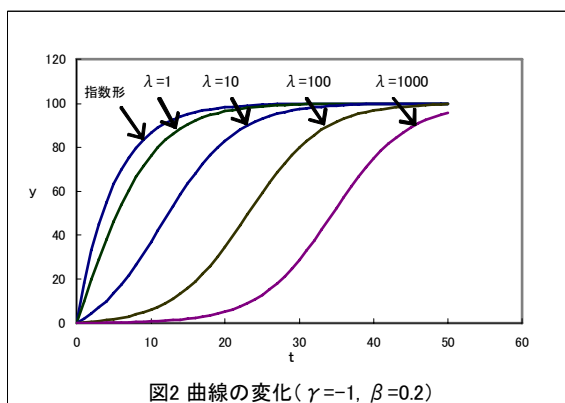


図2 曲線の変化 ($\gamma = -1, \beta = 0.2$)

(2) $\gamma = 0$ の場合

これはゴンペルツ曲線を y 軸方向に平行移動して $y_0 = 0$ となるようにした場合である。式(7)で与えられる曲線の変化を図3に示す。この場合も λ が大きくなると同じ形状の曲線が t 軸の正の方向に移動する。

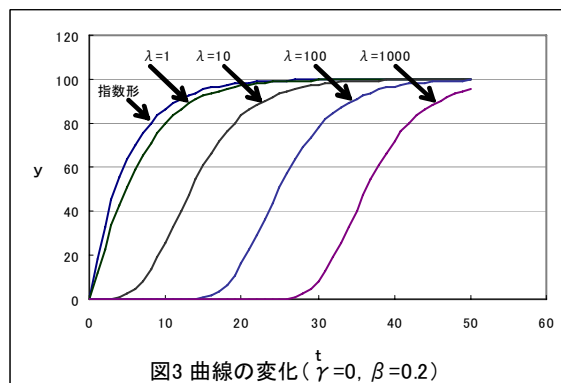


図3 曲線の変化 ($\gamma = 0, \beta = 0.2$)

(3) $\gamma = -10$ の場合

γ を -10 に固定して λ の値を変化させた場合の曲線群を図4に示す。この場合は λ を大きくしても図2、図3で見られたような t 軸の正の方向への平行移動は見られない。

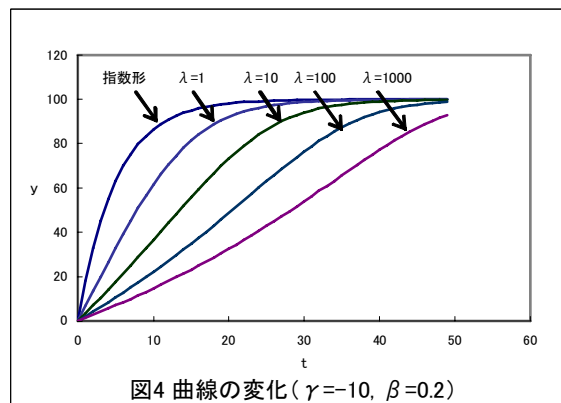


図4 曲線の変化 ($\gamma = -10, \beta = 0.2$)

(4) $\lambda = 1$ の場合

λ を1に固定して γ の値を変化させた場合の曲線群を図5に示す。 γ が小さくなるにつれて曲線の立ち上がりの直線部分が長くなることがわかる。

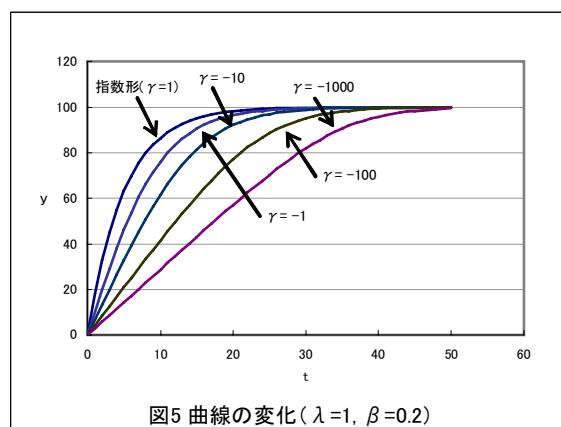
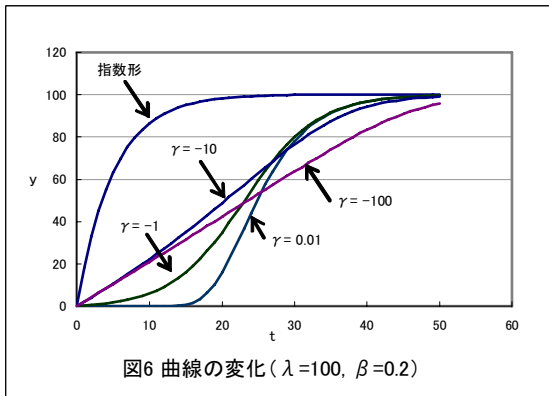


図5 曲線の変化 ($\lambda = 1, \beta = 0.2$)

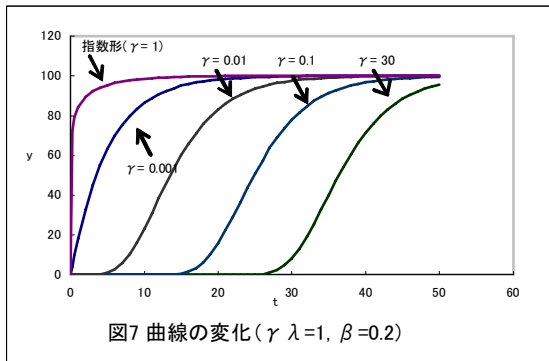
(5) $\lambda = 100$ の場合

λ を 100 に固定して γ の値を変化させた場合の曲線群を図 6 に示す。いずれも γ の値が小さくなる（マイナスで大きな絶対値をとる）にしたがってはじめの直線部分の長さが長くなる。ただし、3. 3 で示すように、図 5 で示した曲線はすべて $t = 23.0$ で変曲点を持ち、直線に見えるものも正確には直線ではない。



(6) $\gamma\lambda = 1$ の場合

$\gamma\lambda = 1$ の条件のもとで γ の値を変化させた曲線群を図 7 に示す。この場合も γ が小さくなる（ λ が大きくなる）と同じ形状の曲線が t 軸の正の方向に移動する。また、超指数形（指数形よりもステップ関数に近い曲線）を含む。



3. 2 統合モデルの強度関数とそのグラフ

統合モデルの強度関数は式 (6) を t で微分したものであり、次の式で示される。

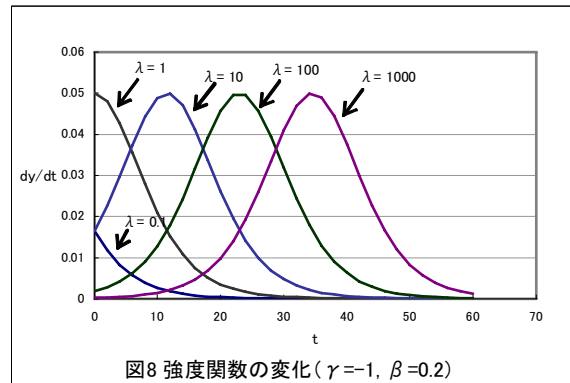
$$\frac{dy}{dt} = N \frac{\beta \lambda e^{-\beta t} (1 - \gamma \lambda e^{-\beta t})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{1 - (1 - \gamma \lambda)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (10)$$

以下にさまざまな γ と λ の値に対する強度関数の

グラフを示す。ただし、以下のグラフでは縦軸の dy/dt を式 (10) において t に依存しない $N / \{1 - (1 - \gamma \lambda)^{1/\gamma}\}$ で正規化してある。

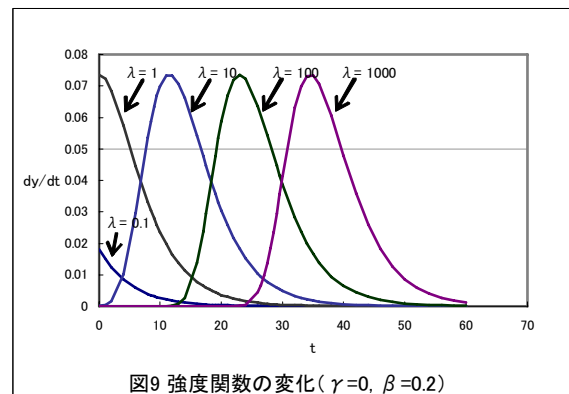
(1) $\gamma = -1$ （習熟 S 字形モデル）の場合（図 8）

典型的な曲線は 4. 2 で示すように左右対称である。



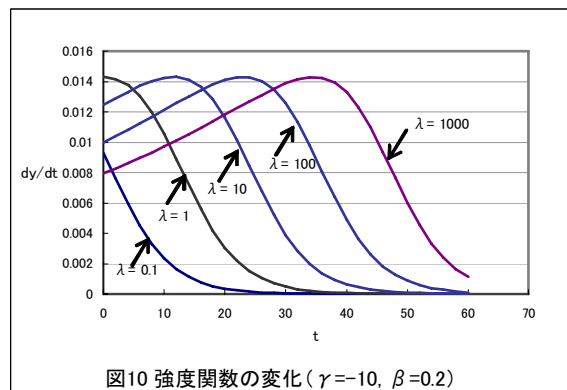
(2) $\gamma = 0$ （平行移動したゴンペルツ曲線）の場合（図 9）

典型的な曲線はやや左に傾いている。



(3) $\gamma = -10$ の場合（図 10）

典型的な曲線は山の左側が高くなる。



(4) $\gamma = -1000$ の場合 (図 11)

典型的な曲線は山の左側が平らになる。

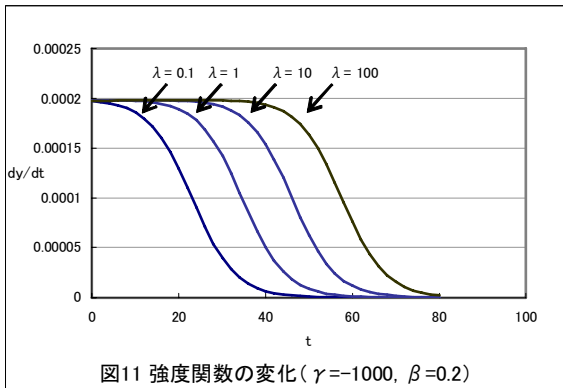


図11 強度関数の変化 ($\gamma = -1000, \beta = 0.2$)

(5) $\lambda = 1$ の場合 (図 12)

3. 3で示すように $\gamma < 1$ の範囲では原点が変曲点となっている。

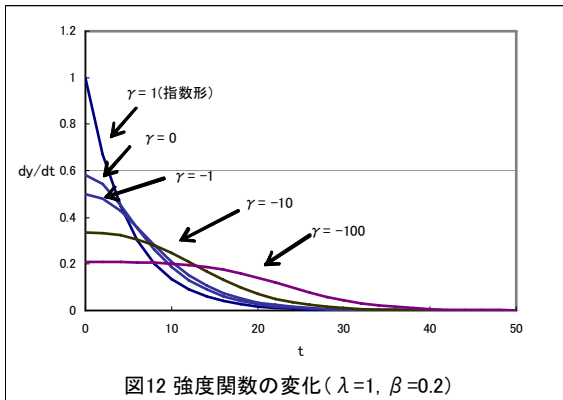


図12 強度関数の変化 ($\lambda = 1, \beta = 0.2$)

(6) $\lambda = 100$ の場合 (図 13)

パラメータ γ の値の変動に応じて立ち上がりとしち下りの傾きが異なる様子が見てとれる。変曲点对应するグラフのピークが同一の t 座標を持つことがわかる。

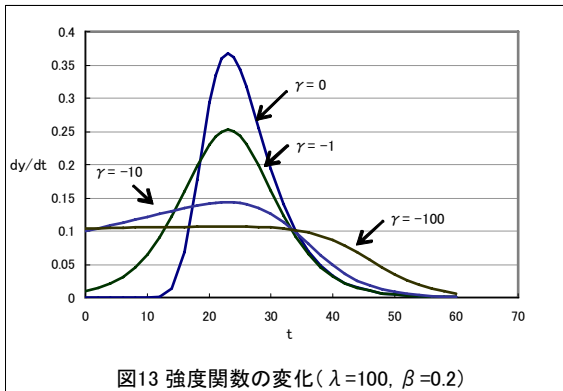


図13 強度関数の変化 ($\lambda = 100, \beta = 0.2$)

(7) $\gamma \lambda = 1$ の場合 (図 14)

典型的な曲線は、 $\gamma = 0$ の場合と類似の、左に傾いたものである。

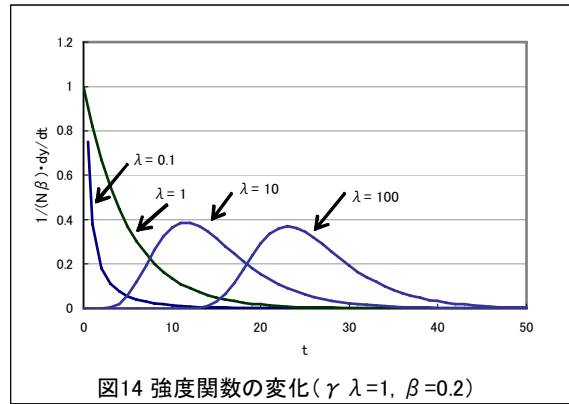


図14 強度関数の変化 ($\gamma \lambda = 1, \beta = 0.2$)

図 8～図 14 を見てわかるように、 λ を変化させると、 γ の値で定まる典型的なモデル (曲線) が平行移動していることがわかる。 λ が小さくなると典型的なモデルの左端が切り取られるため、この曲線を積分した曲線すなわち累積欠陥データが図 1～図 7 で示したようなさまざまな形状をとることがわかる。

3. 3 S字形曲線と非S字形曲線の境界

S字形曲線は、 $t > 0$ の範囲で変曲点が存在する場合である。変曲点は式(6)の2次微分=0となる点を求めることにより得られる。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{N\beta^2 \lambda}{1 - (1 - \gamma\lambda)^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot e^{-\beta t} (1 - \gamma\lambda e^{-\beta t})^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \times (1 - \lambda e^{-\beta t}) \quad (11)$$

$\gamma\lambda < 1$ の場合、 $t > 0$ では常に $1 - \gamma\lambda e^{-\beta t} > 0$ となることから、式(11) = 0 となる点 t_c は $1 - \gamma\lambda e^{-\beta t} = 0$ を満たす、すなわち、

$$t_c = \frac{\log \lambda}{\beta} \quad (12)$$

だけである。式(12)より、 $t_c > 0$ となるためには $\lambda > 1$ であることが必要十分条件となる。このとき変曲点の座標は

$$\left(\frac{\log \lambda}{\beta}, \frac{(1 + \gamma\lambda)^{\frac{1}{\gamma}} - (1 + \gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}{(1 + \gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ (1 + \gamma)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\}} \right)$$

である。変曲点の t 座標の値は γ の値によらない。

4. 考察

4.1 強度関数の平行移動の分析

ここでは、3.2で明らかにした「 γ を固定して λ を変化させると同一形状のグラフが t 軸方向に平行移動する」という現象を数式から明らかにする。 λ がプラスであるので、

$$\lambda = e^{\beta t_0} \quad (13)$$

を満たす t_0 が一意に求まる。式(13)を式(10)に代入すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{N\beta}{1 - (1 - \gamma e^{\beta t_0})^{\frac{1}{\gamma}}} \times \left\{ e^{-\beta(t-t_0)} (1 - \gamma e^{-\beta(t-t_0)})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right\} \quad (14)$$

が得られる。式(14)は、 λ が変化すると定数倍を除いて $t_0 = (\log \lambda) / \beta$ だけ t 軸(横軸)方向に強度関数が平行移動することを示している。3.2ではこのことを明確に図示するために、式(14)の定数倍を除いて表示してある。

4.2 習熟S字形モデルの強度関数

習熟S字形モデルの典型的な強度関数は式(14)に $\gamma = -1$ を代入することにより得ることができる。定数倍を除いて

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{-\beta t}}{(1 + e^{-\beta t})^2} = \frac{e^{\beta t}}{(1 + e^{\beta t})^2} \quad (15)$$

となり、厳密に y 軸対象すなわち左右対称となっていることがわかる。

4.3 パラメータが極限值をとる場合

(1) $\gamma \rightarrow -\infty$ の場合(λ を固定)

$\gamma \rightarrow -\infty$ の場合、式(6)の分子分母ともにゼロに近づくため、曲線を求めることができなくなる。

任意の $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ に対して式(5)を満たす δ を求めることができることから、 λ をある一定の値に固定して $\gamma \rightarrow -\infty$ とすることができるがわかる。式

(6)において $x = -\frac{1}{\gamma}$ と整理すると次の式が得

られる。

$$\frac{y}{N} = \frac{\left(\frac{1 + \frac{\lambda}{x}}{1 + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{x}} \right)^x - 1}{\left(1 + \frac{\lambda}{x} \right)^x - 1} \quad (16)$$

$t = 0$ の場合は式(16)の右辺=0、 $t \rightarrow \infty$ の場合は式(16)の右辺 $\rightarrow 1$ となる。 $x \rightarrow +0$ のときは式(16)の右辺の分子・分母ともゼロに近づくので、式(16)の右辺にロピタルの定理を適用する。すなわち、式(16)の分子・分母をそれぞれ x で微分して次の式を得る(付録参照)。

$$\frac{y}{N} \rightarrow \left\{ 1 - \frac{\log(1 + \psi e^{-\beta t}) - \frac{\psi e^{-\beta t}}{1 + \psi e^{-\beta t}}}{\log(1 + \psi) - \frac{\psi}{1 + \psi}} \right\} \times \frac{1}{\exp\{x \log(1 + \psi e^{-\beta t})\}} \quad (17)$$

ここで $\psi = \lambda/x = -\gamma\lambda$ である。 $0 < e^{-\beta t} \leq 1$ より $1 < 1 + \psi e^{-\beta t} \leq 1 + \psi = 1 - \gamma\lambda$ となる。

$$0 < -\frac{1}{\gamma} \log(1 + \psi e^{-\beta t}) < -\frac{1}{\gamma} \log(1 - \gamma\lambda) \quad (18)$$

より、 λ が一定の場合、 $\gamma \rightarrow -\infty$ のとき式(18)の右辺はゼロに収束する。すなわち、 $\exp\{x \log(1 + \psi)\} \rightarrow 1$ である。したがって、式(17)は次の式で近似できる。

$$\frac{y}{N} \approx 1 - \frac{\log(1 + \psi e^{-\beta t}) - \frac{\psi e^{-\beta t}}{1 + \psi e^{-\beta t}}}{\log(1 + \psi) - \frac{\psi}{1 + \psi}} \quad (19)$$

$\gamma \rightarrow -\infty$ で $\psi \rightarrow \infty$ となるが、 $1 \ll \psi$ (有限の値)と考えた場合、 βt の値の範囲によって式(19)はさらに次の2つの式で近似することができる。

(i) $\psi e^{-\beta t} \gg 1$ の場合

$$\frac{y}{N} \approx 1 - \frac{\log \psi - \beta t - 1}{\log \psi - 1} = \frac{\beta t}{\log \psi - 1} \quad (20)$$

(ii) $\psi e^{-\beta t} \ll 1$ の場合

$$\frac{y}{N} \approx 1 \quad (21)$$

ψ の値が大きいため、 t のわずかな変動で $\psi e^{-\beta t} \gg 1$ から $\psi e^{-\beta t} \ll 1$ に変化する。そのため、この曲線は直線的に増加して突然飽和する。

(2) $\lambda \rightarrow 0$ の場合 (γ を固定)

式(6)の分子第1項をマクローリン展開して整理する。

$$\begin{aligned} (1 - \gamma \lambda e^{-\beta t})^{\frac{1}{\gamma}} &= 1 - \lambda e^{-\beta t} + \frac{(1 - \gamma) \lambda^2}{2} e^{-2\beta t} \\ &\quad - \frac{(1 - \gamma)(1 - 2\gamma) \lambda^3}{3!} e^{-3\beta t} + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

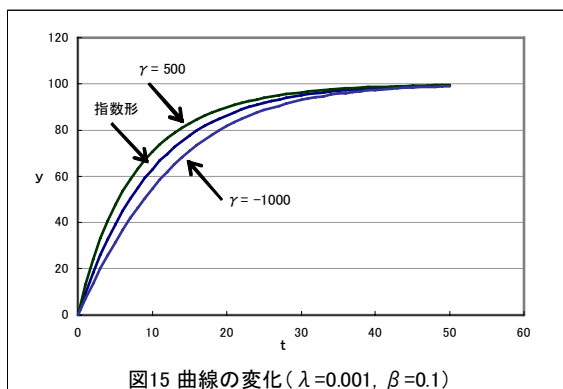
ここで $0 < |\gamma \lambda| \ll 1$ が成立するような λ を選ぶと、式(22)の右辺は $1 - \lambda e^{-\beta t}$ に近づく。同様に

$$(1 - \gamma \lambda)^{\frac{1}{\gamma}} \approx 1 - \lambda \quad (23)$$

となる。これらを式(6)に代入すると

$$y = N(1 - e^{-\beta t}) \quad (24)$$

が得られる。つまり、 γ の絶対値がどんなに大きくても $0 < |\gamma \lambda| \ll 1$ が成立する十分小さな λ を選べば式(6)は指数形モデルに近づく。このことは $\lambda \rightarrow 0$ の極限は指数形モデルであることを意味している。 $\lambda = 0.001$ の場合の曲線の形状を図15に示す。



4. 4 形状パラメータと代表的なモデルの関係

$\gamma \lambda$ 平面上における代表的なモデルの位置関係を図16に示す。解の存在する範囲は $\gamma \lambda \leq 1$ であり、図16の右上の網掛け部分は非単調減少となる一般解が存在しない領域である。

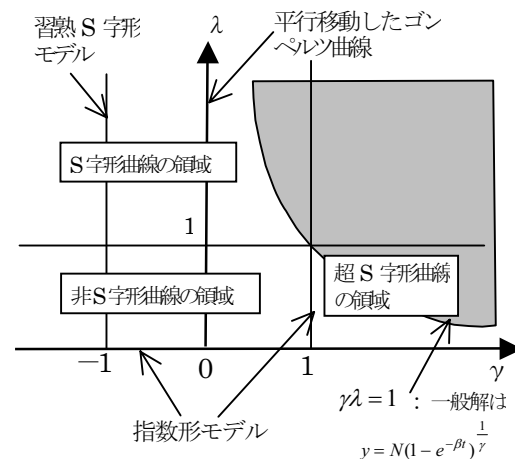


図16 代表的なモデルの位置関係

$\gamma \lambda$ 平面上における各モデルの曲線の特徴を次に示す。

- (1) パラメータ γ は曲線のパラメータ λ は時間軸方向の移動量を表す。 λ が大きくなるに従って、曲線は同一形状を保ったまま t 軸の正の方向に移動し、 λ が十分大きくなるとパラメータ γ で支配される典型的なモデル (曲線) の姿があらわになる。
- (2) 形状に最も大きな影響を与えるパラメータは γ である。 γ を変化させることにより、強度関数を表す曲線の左側 (立ち上がり) の勾配を変化させることができる。
- (3) 習熟 S 字形 ($\gamma = -1$) の強度関数は基本的に左右対称な曲線 (立ち下りの勾配は立ち下りの勾配を丁度反転したもの) である。 γ が -1 より大きくなると立ち上りの勾配が立ち下りの勾配に比べて急峻になり、 -1 より小さいと立ち下りの勾配が立ち上りの勾配に比べて急峻になる。
- (4) 特に γ の値が負の大きな絶対値をとる場合は、強度関数が最初から一定値をとる。 λ が大きくなるに従って、一定値の長さが長くなるため、平均値関数で見ると曲線の直線的な部分が長くなり、最後の飽和の開始が遅くなる。
- (5) $\lambda \rightarrow 0$ の場合は指数形モデルになる。また、 $\gamma =$

- 1 の場合は λ の値によらず指数形モデルになる。
 (6) $\gamma > 1$ かつ $\lambda < 1$ の領域の曲線は超指数形の曲線となる。

5. おわりに

統合モデルのうち累積欠陥数の初期値がゼロとなる解の曲線の形状を明らかにした。

- (1) 新しいパラメータ λ を導入することにより、曲線の形状をパラメータ γ と λ によって記述することができる。
- (2) 曲線の特徴は累積欠陥曲線よりそれを t で微分して得られる強度関数で見た方がわかりやすい。
- (3) パラメータ λ は強度関数の時間軸方向の移動量を表す。 λ が大きくなるとパラメータ γ で支配される典型的な強度関数の姿があらわになる。
- (4) パラメータ γ は強度関数の立ち上がり立ち下りの関係を表す。習熟 S 字形 ($\gamma = -1$ の場合) の典型的な強度関数は左右対称であり、移動ゴンペルツ曲線のような $\gamma > -1$ の場合の強度関数は立ち上がり立ち下りより急峻であ

る。逆に $\gamma < -1$ の場合は立ち下がりに比べて緩やかに立ち上がる。

<参考文献>

- [1] Goel, A.L. and Okumoto, K.: Time-Dependent Error-Detection Rate Model for Software Reliability and Other Performance Measures, *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-28, No. 3, pp. 206-211 (1979).
- [2] Yamada, S., Ohba, M. and Osaki, S.: S-Shaped Reliability Growth Modeling for Software Error Detection, *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-32, No. 5, pp. 475-478 (1983).
- [3] Ohba, M.: Software Reliability Analysis Models, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 28, No. 4, pp. 428-443 (1984).
- [4] 古山恒夫, 中川 豊: ソフトウェア信頼度成長曲線に関する統合モデルと有効性の検証, 情報処理学会ソフトウェア工学研究会, Vol. 97-10, pp. 73-80 (1994).
- [5] Furuyama, T. and Nakagawa, Y.: A Manifold Growth Model that Unifies Software Reliability Growth Models, *Int. J. of Reliability, Quality and Safety Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 161-184 (1994).

<付録>

式(16)で $x \rightarrow +0$ の場合、式(16)の右辺は分子と分母をそれぞれ x で微分した次の式に収束する。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(\frac{1 + \frac{\lambda}{x}}{1 + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{x}} \right)^x - 1}{\left(1 + \frac{\lambda}{x} \right)^x - 1} \rightarrow \frac{\left\{ \log\left(1 + \frac{\lambda}{x} \right) - \frac{\lambda}{\lambda + x} - \log\left(1 + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{x} \right) + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{\lambda e^{-\beta t} + x} \right\} \exp\left\{ x \log\left(1 + \frac{\lambda}{x} \right) - x \log\left(1 + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{x} \right) \right\}}{\left\{ \log\left(1 + \frac{\lambda}{x} \right) - \frac{\lambda}{\lambda + x} \right\} \exp\left\{ x \log\left(1 + \frac{\lambda}{x} \right) \right\}} \\
 & = \left\{ 1 - \frac{\log\left(1 + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{x} \right) - \frac{\lambda e^{-\beta t}}{\lambda e^{-\beta t} + x}}{\log\left(1 + \frac{\lambda}{x} \right) - \frac{\lambda}{\lambda + x}} \right\} \times \frac{1}{\exp\left\{ x \log\left(1 + \frac{\lambda e^{-\beta t}}{x} \right) \right\}} \\
 & = \left\{ 1 - \frac{\log(1 + \psi e^{-\beta t}) - \frac{\psi e^{-\beta t}}{1 + \psi e^{-\beta t}}}{\log(1 + \psi) - \frac{\psi}{1 + \psi}} \right\} \times \frac{1}{\exp\left\{ x \log(1 + \psi e^{-\beta t}) \right\}}
 \end{aligned}$$