



## Tom Goldstein and Stanley Osher : The SplitBregman Method for L1-Regularized Problems

SIAM Journal on Imaging Sciences, 2(2), pp.323-343 (2009)

### 何か難しそうな論文ですが……

本論文は、アメリカの応用数学会 (SIAM) が刊行している「イメージング」に関する学術誌 (SIAM J. Imaging Sciences) に 2009 年に掲載された、スパース最適化 (L1 ノルム正則化) と画像処理 (ノイズ除去・画像再構成) を結びつけたマイルストーンの論文の 1 つである。「ほらまたすぐ数式を出すんだから!」と怒られることの多い筆者であるが、今回は数式を一切用いずに (!) この論文について書き進めてみようと思う。

### スパース? 何それおいしいの?

スパースという言葉に関しては聞いたことがある読者も多いだろう。その厳密な定義には触れないが、「ある対象 (データ) を説明 (表現) するために本質的に必要な要素 (基底) が、対象の数 (次元) に比べて著しく少ない」という性質を指す<sup>☆1</sup>。

画像もそのようなスパース性を持つデータの 1 つである。人間にとって意味を見いだせる画像は、(ランダムノイズ画像に比べて) 全体的に「滑らかである=変動が少ない成分 (低周波成分) で構成される」傾向がある。これはすなわち、画像データが少数の低周波基底の線形結合で近似的に表現できる (スパース!) ことを意味しており、この事実のおかげで我々はスマートフォンで撮影した高解像度の画像

データを気軽に SNS にアップロードできるわけである<sup>☆2</sup>。

### みんな大好き L1 ノルム

訓練された読者諸君であれば、「この性質を利用することで、逆にノイズに埋もれた画像成分を抽出したり、不完全なデータから画像を再構成できそうだな」と感づいたであろう。そのために鍵となるのが、L1 ノルムである。

L1 ノルムは「入力変数 (ベクトルや行列等) の各要素の絶対値の和」として定義される関数<sup>☆3</sup>なのだが、なんと、これを小さくすることでスパース性を (ある程度) 促進することができる<sup>☆4</sup>。しかも、L1 ノルムは一部の特殊な人間が諸手を上げて喜ぶ「凸関数 (convex function)」となっているため、大域的な最適解を効率的に計算できる可能性が高い。

とは言え、L1 ノルムを画像処理にすぐ使えるかというと、そうは問屋が卸さない。その最大の理由は L1 ノルムが微分 “できない” ところにある。つまり微分 (勾配) を用いる最適化手法全般が利用できないのである。さらに、画像のスパース性は何らかの変換を介しないと基本的に抽出できないため、L1 ノルムの中にそういった変換 (行列) が合成されることもある。微分できない関数と行列の合

☆1 しばしば、“オッカムの剃刀” と呼ばれる有名な指針「何かを説明する上で、仮定は必要最小限にすべきである」になぞらえられる。

☆2 気になる読者は画像圧縮フォーマットの 1 つである JPEG について調べてみるとよい。

☆3 どうでもよいが、原著論文の L1 ノルムが絶対値記号  $|\cdot|$  で定義されていることがいまだに納得できない。

☆4 L1 ノルムとスパース性の関係についてより厳密に知りたいという殊勝な読者は参考文献 1) 等を参照されたい。

成関数の存在は最適化を一段と難しくする。加えて、画像処理への応用を考える上で、計算量的な問題も生じる。これは最適化問題の次元が画素数の次元のオーダーになってしまうことによる。

## 温故知新

これらの問題を解決するアルゴリズムを提案しているのが本論文である。Split Bregman Method と名付けられた当該アルゴリズムは、Bregman iteration と呼ばれる最適化技術（原著は1967年！）と変数分離（splitting）のテクニックを組み合わせることで構成されている。アルゴリズムの各ステップでは、ガウス＝ザイデル法や高速フーリエ変換を用いた行列の対角化などの数値計算的技術も駆使されており、結果として画像処理応用で現れる大規模なL1 ノルム最適化問題を非常に効率的に解くことができる（実際の画像データを使った応用例も記載されている）。

このアルゴリズムは、今現在ではよく知られている（?）、交互方向乗数法（ADMM）<sup>☆5</sup> と呼ばれる最適化手法と同じであることが後から指摘された<sup>2)</sup>。そしてADMM自体も、Boydらの論文<sup>3)</sup> がきっかけで人口に膾炙したが、その原典は1970年代に出版されている論文<sup>4)</sup> である<sup>☆6</sup>。

ことほどさように、学術的知見というのは息が長く、過去の研究に対するリスペクトを忘れずに現代の先端情報技術として再構築した本論文の貢献は著しいものであると思う<sup>☆7</sup>。

## 広い視野を持つために

とあるご縁でこの記事の執筆を担当することに

なったが、「どうせなら読者の方々があまり知らなさそうな論文にしよう」と思い、本論文を選んでみた。読者の中には、コンピュータビジョンやパターン認識のような画像データを常日頃扱う分野を専門としている方もいるだろうが、本論文や本論文が掲載されている論文誌（画像データに焦点を当てた数理的な解析やアルゴリズムが主なスコープ）を読んだことのある方は少ないのではないかと思っている（ご存知だったらごめんなさい）。

日々研究スピードが加速してゆく中、自分の専門分野の論文をキャッチアップするだけでも大変なのが現代の研究者の実情だろう。しかし、特定の分野の論文ばかり追っているだけでは、どうしても視野狭窄になり似通ったアイディアしか出せなくなる。「独創的なアイディアとは既存の要素の非自明な組合せである」的なことを実業家ジェームズ・W・ヤング氏は言っていたが、実際に、異分野の知見・技術の組合せが面白い研究の種となることが多い<sup>☆8</sup>。

筆者が修士課程一年生の頃の話の少しさせてほしい。当時、博士課程進学へ向けた研究ネタを自分で見つけるために画像処理系の論文を漁っていたのだが、一向によいアイディアが浮かばず、「つらたん……」という感じの日々を送っていた。そんなとき、当時指導してくれていた助教の宮田高道先生（現在は千葉工大で教授をされている）が「これ読んでみたら」と渡してくれたのが本論文との出会いである。読み始めると、それまで触れたことのないような難解な数式が並んでおり、初めは「日本語でおk」と思うばかりであったが<sup>☆9</sup>、頑張って読み進めるうちに次第に「これすごいんじゃないね?」ということに気づき始め、最終的に面白そうな研究ネタを思いつくに至った（宮田先生改めてありがとうございました）。

☆5 深層学習界隈で有名な ADAM とは違うのでご注意ください。

☆6 より正確には Glowinski らによってフランス語で書かれた75年の論文のほうが古い。

☆7 ちなみに、ADMM系の最適化手法について初学者にも分かるよう優しく解説した和文記事<sup>5)</sup> がなんと無料で読める。

☆8 そして、一見異なる要素を抽象化し、共通項を見つけアイディアへと昇華させる手助けをしてくれるのが数学である（と筆者は考えている）。

☆9 日本語で書かれていたとしても分からなかっただろう。

当時の筆者には応用数学系の論文を読んでみるという発想など皆無だったので、もし自分だけでサーベイを進めていたら、この論文にはきっと出会えず、引き続きネタ探しに苦しみ、研究者に向いていないと考え、博士課程に進学しなかった可能性が高い。この経験以来、筆者は日頃から意識的にいろいろな分野の論文に目を向けるよう心がけており、実際にこれまで数多くの研究テーマの着想に繋がっている。

などという話はいわゆる生存バイアスであるため、単なる1つのサンプル程度に捉えていただくのが賢明だろう。特定の分野の論文をひたすら読み続けることで成された研究のほうが単純な数としては断然多いのではないかと思う。とは言え、ゲーム好きの読者諸君であれば、ダンジョンを散策しているときに、先を急がず寄り道をしていたら思わぬ宝箱を見つける、という類の体験を一度はしたことがあるに違いない。学术界という名の広大なダンジョンで猪突猛進に最奥を目指すのではなく、好奇心に導かれ寄り道をする“冒険者”になってみるのも、たまにはよいかもしれない。

#### 参考文献

- 1) 田中利幸：圧縮センシングの数理，電子情報通信学会基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, Vol.4, No.1, pp.39-47 (2010).
- 2) Esser, E. : Applications of Lagrangian-Based Alternating Direction Methods and Connections to Split Bregman, CAM report, Vol.9, p.31 (2009).
- 3) Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J. : Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers, Foundations and Trends in Machine Learning, Vol.3, No.1, pp.1-122 (2011).
- 4) Gabay, D. and Mercier, B. : A Dual Algorithm for the Solution of Non Linear Variational Problems Via Finite Element Approximation, Computers & Mathematics with Applications, Vol.2, No.1, pp.17-40 (1976).
- 5) 小野峻佑：近接分離アルゴリズムとその応用：信号処理・画像処理の観点から（特集一次法の逆襲），オペレーションズ・リサーチ = Communications of the Operations Research Society of Japan : 経営の科学, Vol.64, No.6, pp.316-325 (2019).

(2021年4月2日受付)



小野峻佑

ono@c.titech.ac.jp

2014年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程修了。博士（工学）。2012～2014年日本学術振興会特別研究員（DC1）。2014年東工大・像情報工学研究所・助教。2019年東工大・情報理工学院・准教授。2016～2020年JST さきがけ個人研究者（兼任）。主として信号処理、画像処理、数値最適化の研究に従事。電子情報通信学会学術奨励賞（2013）、電子情報通信学会論文賞（2014）、IEEE SPS Japan Chapter Outstanding Student Journal Paper Award（2014）、丹羽保次郎記念論文賞（2015）、手島精一記念研究賞博士論文賞（2016）、テレコムシステム技術賞（2016）、船井学術奨励賞（2017）、IEEE SPS Japan Chapter Young Author Best Paper Award（2020）、安藤博記念学術奨励賞（2021）各受賞。

