2R-07

提携値の上下界を利用した提携構造形成アルゴリズム

川元 沙恵
神戸大学海事科学部

平山 勝敏
神戸大学大学院海事科学研究科

沖本 天太
神戸大学大学院海事科学研究科

1 はじめに

協力ゲーム理論における古典的な提携形ゲームは，エージェントの集合 $A = \{1, \ldots, n\}$ およびエージェントの任意の部分集合（提携）の利得を計算する特性関数 $v : 2^A \rightarrow \Re$ で構成され，(A, v) と表記される．古典的な提携形ゲームでは，通常，特性関数の値は一意に定まると仮定されているが，不確実性の高い環境下では特性関数値を一意に定めることは困難である．文献 [1] では，そのような環境下での古典的提携形ゲームの拡張版として，特性関数値の上界と下界が与えられる協力区間ゲーム（Cooperative Interval Game）とその利得分配問題に対する代表的な解概念が紹介されている．一方，協力区間ゲームの文脈において，提携形ゲームのもう一つの計算問題である提携構造形成問題（Coalition Structure Generation Problem: CSG 問題）に関する研究は，著者らの知る限りまだ十分には行なわれていない，本研究では，協力区間ゲームの CSG 問題に対して区間演算を用いた動的計画法に基づくアルゴリズムを提案し，実データによる相乗り問題 [2] を用いてその性能を評価する．

以下，2 節で協力区間ゲームと CSG 問題の定義を与え，3 節で動的計画法に基づくアルゴリズムを導入する．4 節では，実データによる相乗り問題に対して提案アルゴリズムを適用し，その結果を報告する．

2 準備

2.1 協力区間ゲーム

協力区間ゲームは，エージェントの集合 $A = \{1, \ldots, n\}$，および，エージェントの任意の部分集合（提携）に対し，その利得の上界と下界を返す特性関数 $w : 2^A \rightarrow I(\Re)$ の 2 つ組 (A, w) で表記される．ここで，$I(\Re)$ は実数上のすべての可能な閉区間を要素とする集合であり，任意の提携 S に対して特性関数の値 $w(S)$ は $[\underline{w}(S), \overline{w}(S)]$ のような区間値となる．なお，$\underline{w}(S)$ は特性関数値 $w(S)$ の下界，$\overline{w}(S)$ は特性関数値 $w(S)$ の上界を表す．任意の提携 S に対して $\underline{w}(S) = \overline{w}(S)$ を満たす協力区間ゲーム (A, w) は古典的な提携形ゲームとなる．すなわち，協力区間ゲームは古典的な提携形ゲームをその一部として含む．

2.2 提携構造形成問題

古典的な提携形ゲーム (A, v) における CSG 問題とは，利得（社会的余剰）を最大にする提携構造（Coalition Structure）を求める最大化問題である．提携構造 CS とはエージェント集合 A の分割であり，形式的には提携集合 $CS = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ で (i) $\bigcup_{k=1}^{m} S_k = A$，かつ，(ii) $\forall i, j (i \neq j) \in \{1, \ldots, m\}$ に対し $S_i \cap S_j = \emptyset$，を満たすものを指す．提携構造 CS の利得 $V(CS)$ は，その構成要素である提携の特性関数値の総和，すなわち $V(CS) = \sum_{S \in CS} v(S)$ である．最適な提携構造 CS^* とは，任意の可能な提携構造 CS に対して $V(CS^*) \geq V(CS)$ を満たすものであり，これを求めることが CSG 問題の目的となる．

3 提案アルゴリズム

本研究では，協力区間ゲームにおける CSG 問題を解く動的計画法に基づくアルゴリズムを提案する．まず，提案アルゴリズムで必要となる区間演算を導入する．

3.1 区間演算

動的計画法を実行する際に必要となる基本演算は，2 値の和を求める演算と 2 値の最大値を求める演算である．今，$I(\Re)$ を実数上のすべての可能な閉区間を要素とする集合とし，任意の 2 つの閉区間 $I, J \in I(\Re)$ をそれぞれ $I = [\underline{I}, \overline{I}]$ および $J = [\underline{J}, \overline{J}]$ と表記する．任意の 2 つの閉区間の和を求める演算は下式で定義される．

$$I + J = [\underline{I} + \underline{J}, \overline{I} + \overline{J}] \tag{1}$$

また，任意の 2 つの閉区間の最大値を求める演算は下式で定義される．

$$\max\{I, J\} = [\max\{\underline{I}, \underline{J}\}, \max\{\overline{I}, \overline{J}\}] \tag{2}$$

3.2 動的計画法に基づくアルゴリズム

動的計画法では，部分問題の最適値および最適解を用いて，より大きな（部分）問題の最適値および最適解を再帰方程式を用いて順次求める．古典的提携形ゲームの CSG 問題へ動的計画法を適用した研究例が文献 [3][4][5] 等で報告されている．

本研究では，協力区間ゲームにおける CSG 問題に動的計画法を適用する．今，任意のエージェント集合 S（ただし $|S| \geq 2$）を (S', S'') のように 2 分割するものとして，集合 S に対するすべての可能な 2 分割の集合を $\Pi(S)$ と表記する．なお，$\Pi(S)$ を構成する任意の 2 分割 (S', S'') は，$S' \neq \emptyset$，$S'' \neq \emptyset$，$S' \cap S'' = \emptyset$，$S' \cup S'' = S$ を満たすものとする．

任意のエージェント集合 S とその可能な 2 分割 (S', S'') の間で区間演算を用いた以下の再帰方程式を構成できる．

$$\begin{array}{ll} W(S) = w(S), & (|S| = 1) \\ W(S) = \max\{w(S), \max_{(S', S'') \in \Pi(S)} W(S') + W(S'')\}, & (|S| \geq 2) \end{array} \tag{3}$$

さらに，任意のエージェント集合 S について，(3) 式で計算される $W(S)$ の値（閉区間）を $[\underline{W}(S), \overline{W}(S)]$ としたとき，$\underline{W}(S)$ を

与えるに至った 2 分割 $(S'S'')$（または集合 S そのもの）を 1 つ選択して集合族 $\{S', S''\}$（または $\{S\}$）を構成して返す関数を $\underline{F}(S)$ とする．同様に，$\overline{W}(S)$ を与えるに至った 2 分割 $(S'S'')$（または集合 S そのもの）を 1 つ選択して集合族 $\{S', S''\}$（または $\{S\}$）を構成して返す関数を $\overline{F}(S)$ とする．

本研究で提案する動的計画法に基づくアルゴリズムの手続きの概略は以下の通りである．

Step 1. 協力区間ゲーム (A, w) に対し，再帰方程式 (3) により $W(A)$ の値 $[\underline{W}(A), \overline{W}(A)]$ を求める．

Step 2. $\underline{F}(A)$ が返す集合族を $\underline{\mathcal{F}}$ とし，その各要素 $S \in \underline{\mathcal{F}}$ に対して再帰的に $\underline{F}(S)$ を適用することにより，$\underline{W}(A)$ を達成する提携構造 $\underline{CS}^*$ を求める．

Step 3. $\overline{F}(A)$ が返す集合族を $\overline{\mathcal{F}}$ とし，その各要素 $S \in \overline{\mathcal{F}}$ に対して再帰的に $\overline{F}(S)$ を適用することにより，$\overline{W}(A)$ を達成する提携構造 $\overline{CS}^*$ を求める．

なお，Step 2 と Step 3 では，$\underline{W}(A)$ を達成する提携構造 $\underline{CS}^*$ と $\overline{W}(A)$ を達成する提携構造 $\overline{CS}^*$ をそれぞれ独立に求めている．これが可能なのは，式（1）による和演算において，下界は下界の和，上界は上界の和であり，また，式（2）による最大値演算においても，下界は下界の最大値，上界は上界の最大値となるためである．すなわち，区間演算を用いた動的計画法の再帰方程式（3）は，本質的には下界のみを用いた計算と上界のみを用いた計算をそれぞれ独立に行っており，その後に行われる下界を達成する提携構造および上界を達成する提携構造を求める計算も独立に行うことができる．

4 評価実験

実データを用いた相乗り問題に対して提案アルゴリズムを適用し，その結果を報告する．相乗り問題 [2] とは，複数のエージェントがタクシー等に乗り，ある地点からそれぞれ別の地点へ移動する場合，相乗りをすることにより得られる利益を最大化する問題である．その特性関数は，個別にタクシーを利用する場合と比較して各エージェントが協力して乗り合わせることにより，どれだけの費用を節約できるかにより求められる．本研究では，東京の飯田橋駅から 6 人のエージェントがそれぞれ山手線主要 6 駅（東京駅，上野駅，池袋駅，新宿駅，渋谷駅，品川駅）へ向かうと仮定して問題例を作成した．特性関数値については，タクシー料金計算サイト 3 社 (JapanTaxi, TaxiSite, NAVITIME) の費用見積りをもとに節約できる費用の最大値を上界，最小値を下界と設定した．

3 節の提案アルゴリズムを本問題例に適用したところ表 1 のような結果が得られた．すなわち，節約できる総費用の最小値は 440 円でその場合の乗り合わせ方は，東京，上野，池袋駅に向かうエージェントはそれぞれ単独，新宿，渋谷，品川駅に向かうエージェントは 1 台でまとまって移動する．一方，節約できる総費用の最大値は 4940 円，乗り合わせ方は東京，上野駅でまとまって 1 台，新宿，渋谷，品川駅でまとまってさらにもう 1 台，池袋駅に向かうエージェントは単独で移動する．参考として，飯田橋駅と山手線主要 6 駅の位置および節約できる総費用が最大値 4940 円となる提携構造を図 1 に示す．

表 1　相乗り問題例による計算結果

A	{ 東京, 上野, 池袋, 新宿, 渋谷, 品川 }
$[\underline{W}(A), \overline{W}(A)]$	$[440, 4940]$
$\underline{CS}^*$	{{ 東京 }, { 上野 }, { 池袋 }, { 新宿, 渋谷, 品川 }}
$\overline{CS}^*$	{{ 東京, 上野 }, { 池袋 }, { 新宿, 渋谷, 品川 }}

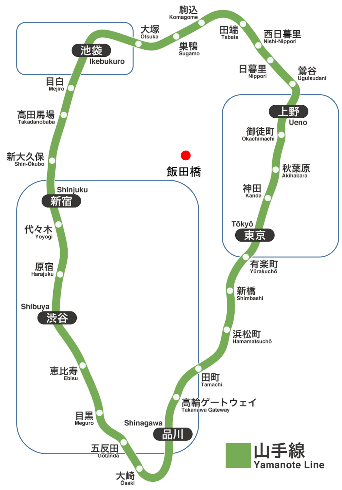

図 1　節約できる総費用が最大値 4940 円となる提携構造

5 おわりに

本研究では，協力区間ゲームの CSG 問題に対して区間演算を用いた動的計画法に基づくアルゴリズムを提案した．今後の課題の一つは，時間経過と共に上界と下界の差が次第に狭まる動的設定への拡張を検討することである．

参考文献

[1] Branzei, R., Branzei, O., Alparslan Gök, S.Z., Tijs S. : Cooperative interval games: a survey. *Cent Eur J Oper Res* 18, pp. 397–411 (2010)

[2] 岸本 信: 協力ゲーム理論入門. オペレーションズ・リサーチ, 60(6), pp. 343–350 (2015)

[3] Rahwan, T., and Jennings, N. R.: An improved dynamic programming algorithm for coalition structure generation. *AAMAS-2008*, pp. 1417–1420 (2008)

[4] Rahwan, T., and Jennings, N. R.: Coalition structure generation: dynamic programming meets anytime optimization. *AAAI-2008*, pp. 156–161 (2008)

[5] Yeh, D. Y.: A dynamic programming approach to the complete set partitioning problem. *BIT Numerical Mathematics* 26, pp. 467—474 (1986)