5B-01

ビットコインボラティリティの実現確率的ボラティリティ変動モデルによるベイズ推定：　ハミルトニアンモンテカルロ法によるアプローチ

高石　哲弥†

広島経済大学†

１．はじめに

金融資産価格時系列の性質には“Stylized facts”と呼ばれる共通に現れる性質が存在することが知られている。例えば、収益率時系列の変動の大きさを表すボラティリティ（分散に対応する）の時間変動は、ボラティリティの大きい時期や小さい時期が繰り返し現れる”ボラティリティクラスタリング“という性質を示すことが知られている。これまでに、ボラティリティクラスタリングの性質を備えたモデルとして、GARCH モデルや確率的ボラティリティ変動(SV)モデル[1]等が提唱されている。

SV モデルのパラメータ推定では、尤度関数が積分形となり、最尤法の実行が困難であることから、マルコフ連鎖モンテカルロ(MCMC)法によるベイズ推定がよく用いられている。SV モデルにおいて、MCMC 法を実行する際にもっとも計算時間がかかる部分はボラティリティ変数のアップデイトである。そのため、効率の良いボラティリティ変数のアップデイトができる MCMC 法の開発研究も行われている。本研究では、ボラティリティのアップデイトにハミルトニアンモンテカルロ（HMC）法[2]を利用する。HMC 法はハイブリッドモンテカルロ法とも呼ばれている。

HMC 法の特徴の１つは、すべての変数を１度にアップデイトできることである。[3]では、SV モデルのアップデイトに HMC 法を利用し、ボラティリティ変数が効率よくサンプルできることが示されている。

本研究では、ビットコインの収益率時系列のボラティリティを実現確率的ボラティリティ変動モデル[4]によって推定する。

２．実現確率的ボラティリティ変動モデル

[4]による実現確率的ボラティリティ変動（RSV）モデルでは、収益率データに加え、実現ボラティリティデータも同時に利用するそのため、より精度よいボラティリティ推定が実行できると考えられている。

「Bayesian inference of Bitcoin volatility through realized stochastic volatility model: An approach by Hamiltonian Monte Carlo method」

†「Tetsuya Takaishi　・Hiroshima University of Economics」

RSV モデルは以下で表される。

$$R_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim N(0,1),\quad t = 1,\cdots,T \tag{1}$$

$$\ln RV_t = \xi + h_t + u_t,\ u_t \sim N(0,\sigma_u^2),\quad t = 1,\cdots,T \tag{2}$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,\ \eta_t \sim N\left(0,\sigma_\eta^2\right),\quad t = 1,\cdots,T-1 \tag{3}$$

$$h_1 = \mu + \eta_0,\quad \eta_0 \sim N\left(0,\frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi}\right). \tag{4}$$

ここで、R_tは日次収益率、RV_tは実現ボラティリティ、h_tは$h_t \equiv \ln(\sigma_t^2)$で定義されるボラティリティを表している。このモデルにおいて、推定すべきパラメータは$\mu,\phi,\sigma_\eta^2,\xi,\sigma_u^2$の 5 つである。そして、$\theta = (\theta_1,\cdots,\theta_5) = (\mu,\phi,\sigma_\eta^2,\xi,\sigma_u^2)$と置くと、ベイズの定理から、h とθの事後確率は$P(\theta,h|R,RV) \sim f(R,RV|\theta,h)\pi(\theta)$で表される。ここで、$f(R,RV|\theta,h)$はモデルの条件付き尤度関数、$\pi(\theta)$はθの事前分布を表す。

ベイズ推定では、パラメータの推定値が期待値として以下のように与えられる。

$$E[\theta_i] = \int \theta_i P(\theta,h|R,RV)\, d\theta dh\, /Z, \tag{5}$$

ここで、Z は規格化定数である。（5）は一般に解析的に求めることができないことから、MCMC 法によって求める。MCMC 法を実行するとき、θ と h をアップデイトしていくことになるが、特に計算時間がかかるのが時系列の長さと同じ個数ある h のアップデイトである。本研究では、h のアップデイトに HMC 法を用いる。

３．ハミルトニアンモンテカルロ法[2]

事後確率をもとに以下のハミルトニアンを定義する。

$$H(h,p) = \frac{1}{2}p^2 - \ln P(\theta,h|R,RV) \tag{6}$$

ここで、$p = (p_{1,\ldots,}p_T)$はボラティリティ変数$h = (h_1,\cdots,h_T)$ に対する共役変数である。H を利用して、(5)は以下のように表すことができる。

$$E[\theta_i] = \int \theta_i \exp(-H(h,p))\, d\theta dh dp\, /\bar{Z} \tag{7}$$

HMC 法では(7)をもとに MCMC 法を実行する。h のアップデイトでは、以下のハミルトン方程式を解いて h の候補を生成し、最後にメトロポリス法を実行する。

$$\frac{dh_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{10}$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial h_i}. \tag{11}$$

ハミルトン方程式は数値的に積分していくが、

その手法として、Minimum-Norm 法[5]が HMC 法において有効であると示されているので、本研究でもその手法を用いた。

４．結果と考察

ビットコインデータは暗号資産の取引所の1つであるCoinbaseで取引された2015年1月～2018年1月までのデータを利用する。収益率は日次収益率データを利用する。上記のデータ区間では、1440 個の日次収益率データが得られる。また、実現ボラティリティには5分ごとの価格データから計算した実現ボラティリティを利用する。図 1は価格データから計算した収益率時系列である。

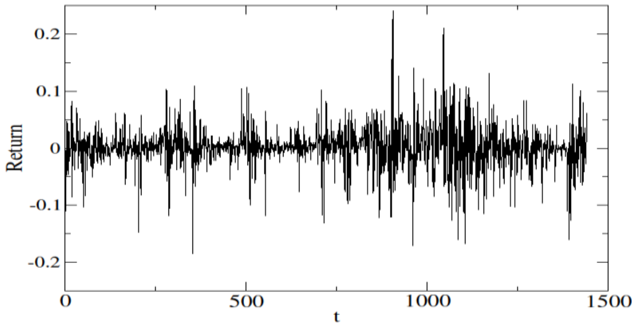

図1　ビットコインの収益率時系列

この収益率データと実現ボラティリティのデータをインプットとして、RSV モデルのベイズ推定を実行する。MCMC 法の実行過程では、最初の 5000 個を Burn-In プロセスとして破棄し、その後の 25000 個をサンプルし、解析に用いた。

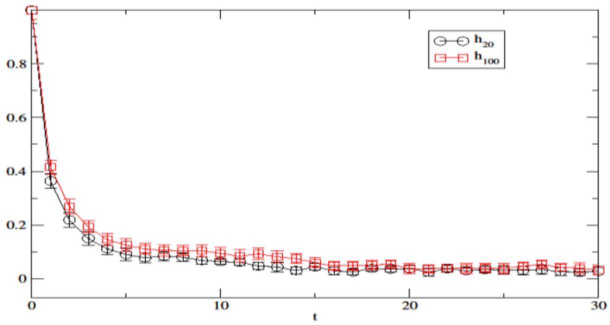

図2　ボラティリティ変数の自己相関関数

図 2 はサンプルされた h_{20} と h_{100} の自己相関を計算したものである。どちらの自己相関も非常に早く消失している。また、積分相関時間は約 6 という値が得られた。一方、[3]によるとメトロポリス法では積分相関時間が約 200 という値が得られているので、HMC 法の相関の方が小さく、HMC 法によって効率良いサンプルができることが示されている。

図 3(a)はサンプルされたボラティリティの平均値の時系列である。ボラティリティは大きい時期や小さい時期が繰り返し現れており、ボラティリティクラスタリングの性質を示している。

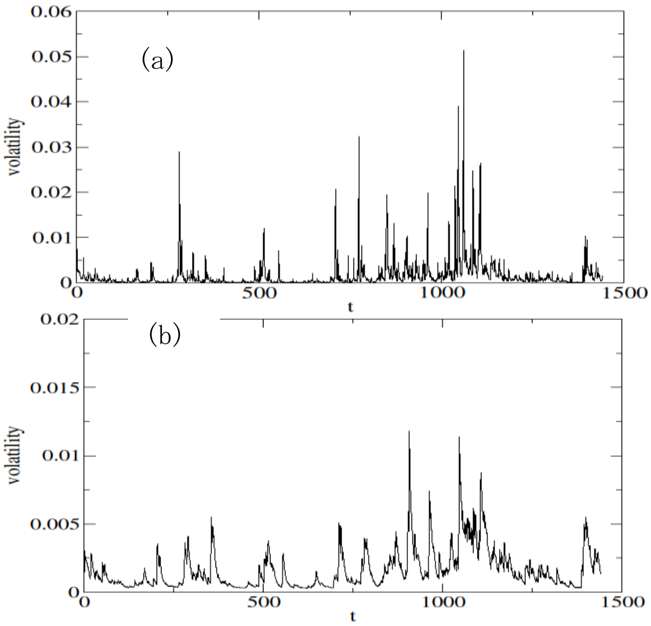

図3　(a) RSV モデル　(b)RGARCH モデル

RSV モデルの結果と他のモデルとの結果を比較するために、RGARCH モデル[6,7]によるボラティリティ推定も実行し、図 3(b)にその結果を表示している。両者の結果は、時間変動の振る舞いは似ているが、ボラティリティ値は正確には一致していない。今後はどのモデルがより精度良い値を求めることができるかを調べていく予定である。

参考文献

[1] S.J. Taylor, Modelling financial time series (John Wiley & Newjersy, 1986).
[2] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, and D. Roweth, Hybrid Monte Carlo, *Phys. Lett. B*, *195*, 1987, 216-222.
[3] T. Takaishi, Bayesian inference of stochastic volatility model by Hybrid Monte Carlo, *J. Circuits Syst. Comput.*, *18*, 2009, 1381-1396.
[4] M. Takahashi, Y. Omori, and T. Watanabe, Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, Comput. Statist. Data Anal., 53, 2009, 2404-2426.
[5] T. Takaishi and P. de Forcrand, Testing and tuning symplectic integrators for hybrid Monte Carlo algorithm in lattice QCD, Phys. Rev. E 73, 2006, 036706.
[6] T. Takaishi, Rational GARCH model: An empirical test for stock returns, Physica A, 473, 2017, 451-460.
[7] T. Takaishi, Volatility estimation using a rational GARCH model, Quant. Finance Econ., 2(1), 2017, 127-136.