4B-02

ポリオミノ型多角形からの多面体の構成 – 折り線の決定

大塚　寛[†]

愛媛大学 大学院理工学研究科(理学系)[†]

はじめに

本講演ではポリオミノ型多角形の辺々接着による凸多面体の構成問題を扱う。多角形からの多面体の構成には、我々の手法では以下の 3 段階を経る。ただし多面体そのものではなく、多面体の展開図を得ることを目標としている。

1. 多角形の辺同士の接着を行い、接着木を構成
2. 接着木を凸多面体グラフに埋め込む
3. 凸多面体グラフを、ちょうど接着木が辺同士の接着に対応するように、多角形に埋め込む

いくつかの文献[2], [3]によると、実際に多角形の紙から多面体を折り上げた結果が紹介されているが、辺を求める作業は手作業によることが述べられている。我々はこの手作業の部分、すなわち上の第 3 段階をコンピュータで行うことに取り組んだので、これについて報告する。

背景

多角形の境界を重複や余りなく貼り合せて多面体を構成する問題は[1]にその詳細がある。この問題では、実際にポリオミノ型の多角形(以下ポリオミノと略記)から多面体を構成する研究[2], [3]がある一方、その構成アルゴリズムについては、上記第 1 段階において動的計画法による接着アルゴリズム[1]が知られている程度である。なお、一般の多角形からの構成アルゴリズムは非常に複雑で、その計算量も以下のように非常に次数の高い多項式である[4]。

$$O\left(n^{456.5}r^{1891}/\varepsilon^{121}\right)$$

ただし、n は頂点数、r は最も遠い頂点間の距離と最も近い頂点間の距離の比、ε は座標の相対的な精度である。

我々は 2 次元である多面体の展開図を構成することを目的としているため、上記のような複雑なアルゴリズムを必要としているわけではないが、それでも一般の多角形を対象とするのは難しい。しかし上の第 3 段階での折り線の決定では、ポリオミノは一般の多角形と異なり、元になる正方形の情報を用いることで、離散的に決定しやすい部分があると考えられる。そのため、対象をポリオミノやポリアモンド型の多角形に限れば、ある程度効率の良いアルゴリズムが得られるのではないかという予想の下、研究を進めた。

なお、第 1 段階はすでに効率の良いアルゴリズムが得られている。第 2 段階は多面体グラフへの埋め込みのため、一般の多角形かポリオミノかによらず得られると想定される。

構成アルゴリズムの概要

まず多角形から多面体を得ることを保証する定理と構成アルゴリズムの各段階を概説する。

アレクサンドロフの定理

任意の多角形の以下の条件を満たす境界の接着(**アレクサンドロフ接着**と呼ぶ)に対して、得られる多面体は一意に定まる。

1. 多角形の境界部分のすべてが接着に使われる
2. 接着される各点での内角の和は 2π 以下である（曲率 = $2\pi -$ 内角の和）
3. 接着で得られる多面体は球面と同相である

そこで、ポリオミノを対象に辺同士の接着(辺々接着)に限って考察する。

第 1 段階

ポリオミノの境界の 2 辺を接着して接着木を得る。接着木の曲率が 0 でない頂点は多面体の頂点になり、多面体の頂点はそれらに限られる(曲率 0 の頂点は多面体の面の内部か辺の内部に現れる)。

第 2 段階

シュタイニッツの定理「グラフ G が凸多面体のグラフであるための必要十分条件は G が単純で平面的かつ 3 連結である」により、第 1 段階で得た接着木を凸多面体グラフへ埋め込む。ただし 2 面角などの 3 次元の情報は扱わないため、多面体は単体的、すなわち凸多面体グラフは 3 角形グラフと仮定する。(3 角形)凸多面体グラフは頂点数が少ない場合は知られており、今回はそれを利用している。この段階のアルゴリズムは完成していないが、埋め込みができたという仮定の下で次の段階に進む。

第 3 段階

Constructing polyhedra from polyomino-type polygons - Determining the crease lines

† Hiroshi Ohtsuka

† Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

接着木を埋め込んだ多面体グラフを、ちょうど接着木が辺同士の接着に対応するように、ポリオミノに埋め込んで、折り線の全体を表す展開図を得る。

折り線をポリオミノに埋め込むにはいくつか仮定を置く。まず多面体の頂点はポリオミノのいくつか(3 個以下)の頂点が集まったものだが、多面体の 2 頂点 x,y を結ぶ辺の長さは、対応するポリオミノの頂点の集合(同じく x,y)間での頂点同士の距離の最小値、すなわち、

$$d(x,y)=\min\left\{d\left(p_x,q_y\right)\middle|p_x\in x,q_y\in y\right\}$$

とする。

また平面上で折り線をそのまま引くと、ポリオミノの中を通らず、外側にはみ出すことがある。この場合ポリオミノが正方形から構成されることを考えると、はみ出した部分が納まる正方形がそのポリオミノの中にあるはずで、それははみ出した部分と交差する接着木の辺を境界に持つ正方形である。そこでその正方形を元の位置から切り離し、接着木の辺と対応するようにポリオミノに貼り合わせて(cut & glue)、はみ出した部分をその正方形の中で特定し、元に戻すことで、切り離された折り線を得る。この手法はポリオミノに限らずポリアモンドなどの平面充填多角形であれば cut & glue の対象となる部分を指定可能であるが、一般の多角形ではできない。

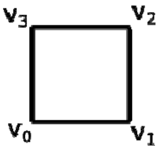
他にも各頂点を結んだ時、頂点間の距離が判るので、有効な 3 角形になっているかの判定もあるが、これは第 2 段階での接着木の多面体グラフへの埋め込みでも利用している。

注意として、3 次元の情報は扱わないため、以下の例のように 2 重被覆多角形も扱う。

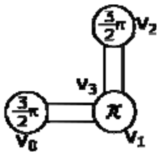
具体例

次数の低いポリオミノに対して、得られた展開図の具体例をいくつか挙げる。

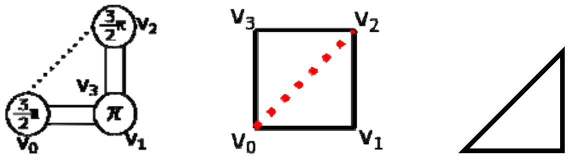
モノミノの場合



$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

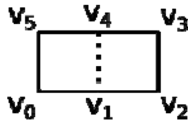


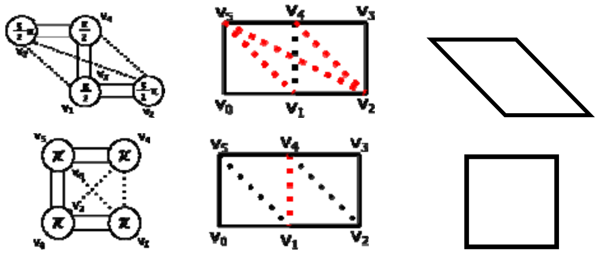
第 1 段階で上図の中央の接着行列を経て右側の接着木を得る(接着木はもう一つある)。頂点数 3 より 3 角形となり、第 2 段階で次の左側の 3 角形グラフを得る。第 3 段階で中央の v_0,v_2 を結んだ折り線(展開図)が得られ、右側の 2 重被覆の 3 角形が得られる。



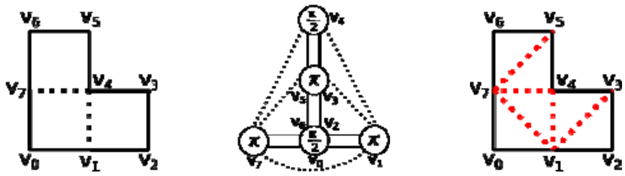
接着木に対して 3 角形グラフは一意であり、また 3 角形グラフに対して折り線および展開図は一意に定まる。しかし一般に、一つの接着木に対し同じ頂点数の多面体グラフは複数存在し、また接着木の一つの多面体グラフへの埋め込みも複数ある。以下の例では、ポリオミノに対し一つの接着木が一つの多面体グラフに埋め込まれた状況で、第 3 段階の展開図がどのように定まるのかを示す。

ドミノの場合、3 頂点の接着木の他に 4 頂点の接着木が同型を除いて 2 種類あり 4 面体のグラフに埋め込められるが、いずれも 2 重被覆多角形の展開図となる。





トロミノは 2 種類あるが、実際に多面体となる例では、頂点数 5 の接着木を同頂点数の 3 角形多面体グラフに埋め込み(他にも埋め込みはある)、この場合は頂点を直接結んだ辺が折り線になり、各面が 3 角形の 6 面体が得られる。



テトロミノ以降の次数が高いポリオミノについては、講演時に紹介する。

参考文献

[1] E. Demaine, J. O'Rourke 著, 上原隆平訳, 幾何的な折りアルゴリズム, 近代科学社, 2009

[2] 正多面体の辺による展開の再折り凸多面体, 伊藤 仁一, 奈良 知恵, 他著, 熊本大学教育学部紀要 自然科学 第 61 号, pp. 65-74, 2012

[3] ペントミノの辺々接着で折る多面体について, 西村 保三, 坂口 一成著, 福井大学教育地域科学部紀要(自然科学 数学編), 6, pp.125-137, 2015

[4] A pseudopolynomial algorithm for Alexandrov's Theorem, D. Kane, et.al 著, LNCS 5664, pp.435-446, 2009