

## 超立方体における Face Magic Graph の構成

杉山 雅英 (会津大学)

**1. まえがき** Sedláček (1963) [1] が Magic Graph を提起して以来, グラフの辺・頂点に着目した Edge Magic[2, 3], Vertex Magic[4], 平面グラフや面で構成されるグラフの面に着目した Face Magic[5, 6, 7, 8, 9] が検討されてきた. 本報告では超立方体 [10] に対する Face Magic について述べる.

**2.  $Q_k$  とその性質** グラフ  $G$  とそのコピー  $G'$  間の対応する頂点を新たな辺で結ぶことで新たなグラフを構成する手順を Copy & Link (CL) 法とよぶことにする.  $Q_0$  を 1 個の頂点とし,  $Q_{k-1}$  から CL 法で再帰的に得られるグラフ  $Q_k$  を  $k$  次元超立方体とよぶ.  $Q_k$  の頂点, 辺, 面の集合を  $V_k, E_k, F_k$ , それらの要素数を  $v_k, e_k, f_k$  とすると  $v_k = 2^k, e_k = k2^{k-1}, f_k = k(k-1)2^{k-3}$  である. オイラーの定理から  $Q_k (k \neq 3)$  は非平面グラフである. グラフの頂点・辺・面間の共有関係を持つ個数を次数とよぶ. 例えば  $v_i$  の辺次数  $\deg_E(v_i)$  とは頂点  $v_i$  を共有する辺の個数であり, 辺  $e_j$  の面次数  $\deg_F(e_j)$  とは辺  $e_j$  を共有する面の個数である.  $Q_k$  の頂点・辺・面次数を表 1 に示す. SAT ソルバーによる探索のために頂点を  $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$  として, 頂点, 辺, 面を番号付けし, 辺・面を構成する 2 つ頂点番号の組  $(i, j)$ , 4 つの頂点番号の組  $(i, j, k, \ell)$  を与える. 命題 1 のように  $V_k, E_k, F_k$  は再帰的に構成できる.

**命題 1**  $V_k, E_k, F_k$  の再帰的構成法

$$\begin{cases} V_{k+1} &= V_k \cup (2^k + V_k) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2^{k+1}}\} \\ E_{k+1} &= E_k \cup (2^k + E_k) \cup \\ &\quad \{(0, 2^k), (1, 2^k + 1), \dots, (2^k - 1, 2^{k+1} - 1)\} \\ F_{k+1} &= F_k \cup (2^k + F_k) \cup \\ &\quad \{\varphi(e_0), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_{k2^{k-1}-1})\} \end{cases}$$

ここで  $c + X = \{c + x \mid x \in X\}$  とし,  $\varphi(e_j)$  は辺  $e_j$  で作成される面とする. 命題 1 で与えた番号付けを用いて構成した Magic Graph の頂点, 辺, 面への配置の数字をベクトル  $v, e, f$  で表す.

表 1:  $Q_k$  の頂点・辺・面次数

	次数		
	頂点	辺	面
頂点	-	$k$	$\frac{k(k-1)}{2}$
辺	2	-	$k-1$
面	4	4	-

**3. Face Magic Graph とその定和** 面で構成されるグラフ  $G = V \cup E \cup F$  から連続する自然数の集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  の分割への写像  $\lambda : G \rightarrow 2^{\{1, 2, \dots, n\}}$  が重複なく全ての数字を配置するものとする.  $G$  の全ての面の次数を一定  $\ell$  とし, 全ての頂点・辺の面次数  $\deg_F(v_i), \deg_F(e_j)$  が一定  $d^{(v)}, d^{(e)}$  と簡単化する. 頂点・辺・面に配置する数字の和を式 (1) で表す.

$$S_V = \sum_{v_i \in V} \lambda(v_i), S_E = \sum_{e_j \in E} \lambda(e_j), S_F = \sum_{f_k \in F} \lambda(f_k) \quad (1)$$

1 から  $n$  までの数字は頂点・辺・面のいずれかに一度だけ配置されるので式 (2) が成り立つ.

$$S_V + S_E + S_F = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = N \quad (2)$$

面  $z$  に対して和 (重み)  $\lambda^*(z)$  を式 (3) で定義する.

$$\lambda^*(z) = \lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in V \cup E}} \lambda(w) \quad (z \in F) \quad (3)$$

ただし式 (1), 式 (3) の  $\lambda(z) (z \in G)$  を含む和の計算は部分集合  $\lambda(z)$  に属する数の和とする. 和  $\lambda^*(z)$  が全ての  $z \in F$  に対して一定値  $S$  の時,  $G, \lambda$  を Face Magic (FM) graph, Face Magic label と呼び, その一定値  $S$  を定和 (magic sum),  $n = \text{order}(\lambda)$  をオーダーとよぶ. 頂点・辺・面に置く数字の個数が各々一定値  $m_v, m_e, m_f (\geq 0)$  の時,  $\mathbf{m} = [m_v, m_e, m_f]$  型<sup>1</sup> Face Magic graph (label) とよぶ [5].  $v = |V|, e = |E|, f = |F|$  とすると  $n = m_v v + m_e e + m_f f$  である.  $\mu \ell = \ell(m_v + m_e) + m_f$  を  $[m_v, m_e, m_f]$  FM  $\lambda$  のサイズとよぶ. ここで FM の定和方程式 (4) が成り立つ.

**命題 2** Face Magic の定和方程式

$$f \cdot S = N + (d^{(v)} - 1)S_V + (d^{(e)} - 1)S_E \quad (4)$$

**命題 3** FM の定和の上限・下限

頂点, 辺の面次数  $d^{(v)}, d^{(e)}$  が  $d^{(v)} - d^{(e)} \geq 0$  の時, 定和  $S$  の上限・下限は式 (5) で与えられる.

$$\begin{cases} S_{\text{sup}} = \frac{1}{f_k} \{d^{(e)} N + (d^{(v)} - d^{(e)}) \max S_V \\ \quad - (d^{(e)} - 1) \min S_F\} \\ S_{\text{inf}} = \frac{1}{f_k} \{d^{(e)} N + (d^{(v)} - d^{(e)}) \min S_V \\ \quad - (d^{(e)} - 1) \max S_F\} \end{cases} \quad (5)$$

<sup>0</sup> Face Magic Graph Construction for Hypercubes, M. Sugiyama (The Univ. of Aizu)

<sup>1</sup>Lih は (a, b, c) 型と呼んでいる [5].

ここで  $S_V, S_F$  の最大・最小は以下で与えられる.

$$\begin{cases} \max S_V = nm_v v - \frac{m_v v(m_v v - 1)}{2}, & \min S_V = \frac{m_v v(m_v v + 1)}{2} \\ \max S_F = nm_f f - \frac{m_f f(m_f f - 1)}{2}, & \min S_F = \frac{m_f f(m_f f + 1)}{2} \end{cases}$$

命題3の式(5)で  $Q_k$  の定和の上限・下限が計算できる. 例えば  $Q_4[1, 1, 1]$  FM の上限・下限・その差は  $S_{\text{sup}} = 432.5, S_{\text{inf}} = 224.5, S_{\text{sup}} - S_{\text{inf}} = 208.0$  である.  $Q_k$  の定和の剰余制約に関する定理1が成り立つ.

**定理1**  $Q_k[m_v, m_e, m_f]$  FM の定和の剰余制約

(1)  $k = p + 2$  ( $p$ : 3以上の素数) の時,  $Q_k[m_v, m_e, m_f]$  FM の定和  $S$  は式(6)を満たす.

$$S \equiv \frac{p+1}{2} \cdot N \equiv \frac{p+1}{2} \cdot \mu_4 \cdot (2\mu_4 + 1) \pmod{p} \quad (6)$$

(2)  $k \equiv 0, 1 \pmod{4}$  の時  $Q_k[m_v, 0, m_f]$  FM の定和は  $S \equiv S_0 \pmod{\frac{k(k-1)}{2} - 1}$  を満たす.

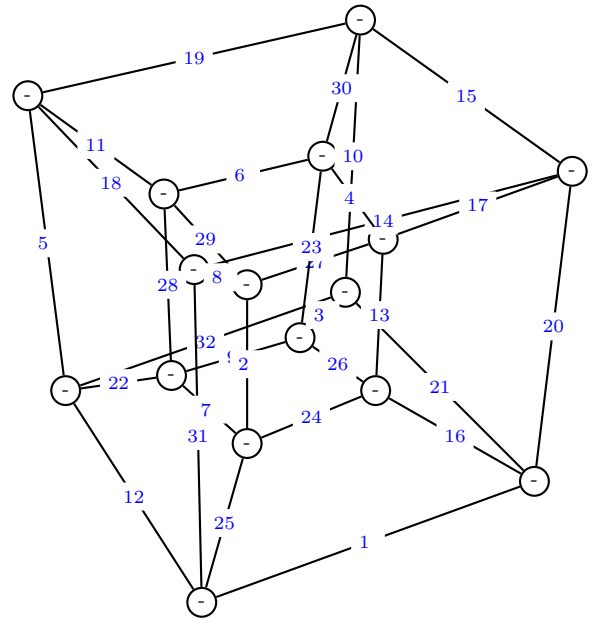


図1:  $Q_4[0, 1, 0]$  FM ( $S : 66$ ) の配置

#### 4. $Q_4$ Face Magic の探索と構成

sugar と minisat[11] を用いた  $Q_4$  FM の探索を行った.  $[1, 0, 0]$  の場合  $n = 16$  で  $S = 34$  の解が,  $[0, 1, 0]$  の場合  $n = 32$  で図1の  $S = 66$  の解が構成できた.

$$\begin{aligned} \lambda_{[1,0,0]}^{S:34} : v &= (3, 6, 10, 15, 14, 11, 7, 2, 13, 12, 8, 1, 4, 5, 9, 16) \\ \lambda_{[0,1,0]}^{S:66} : e &= (1, 32, 12, 21, 14, 19, 18, 15, 31, 20, 5, 10, 24, 9, 7, \\ & 26, 27, 6, 29, 4, 2, 13, 28, 23, 25, 16, 22, 3, 8, 17, 11, 30) \end{aligned}$$

$[1, 0, 1]$  の場合,  $n = 40$ , 定和  $S = 65$  が構成できた. 定和は区間  $[63, 142]$  であり, 定理1から  $S \equiv 0 \pmod{5}$  であるので65は最小定和である.  $[0, 1, 1]$  の場合,  $n = 56$ , 定和  $S = 142$  の FM が構成できた.

$$\lambda_{[1,0,1]}^{S:65} : \begin{cases} v = (1, 25, 9, 3, 4, 13, 11, 8, 15, 6, 2, 12, 17, 7, 10, 5) \\ f = (27, 29, 22, 34, 40, 16, 30, 26, 20, 36, 21, 35, 18, \\ 39, 38, 19, 24, 31, 23, 32, 28, 14, 33, 37) \end{cases}$$

$$\lambda_{[0,1,1]}^{S:142} : \begin{cases} e = (1, 24, 53, 39, 56, 38, 5, 35, 42, 15, 2, 37, 33, \\ 51, 6, 31, 32, 10, 44, 36, 43, 22, 30, 4, 17, 46, 55, 3, 13, \\ 7, 26, 50) \\ f = (25, 8, 28, 41, 40, 16, 21, 20, 12, 47, 19, 49, 45, \\ 9, 11, 23, 34, 18, 54, 14, 27, 52, 29, 48) \end{cases}$$

4つの  $\lambda_{[1,0,0]}^{S:34}, \lambda_{[0,1,0]}^{S:66}, \lambda_{[1,0,1]}^{S:65}, \lambda_{[0,1,1]}^{S:142}$  を用いて他の FM が構成できる. 例えば,  $[1, 1, 0]$  の場合,  $n = 48$  で  $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$  FM  $\lambda_1, \lambda_2$  の合成  $\lambda_1 \oplus \lambda_2$  により定和  $S = 164$  の,  $\lambda_2 \oplus \lambda_1$  により定和  $S = 228$  の  $[1, 1, 0]$  FM を構成でき, これらは最小定和, 最大定和である. 以上の結果から定理2が得られる.

**定理2**  $Q_4$  FM の構成可能性

$Q_4 [m_v, m_e, m_f]$  FM は自明に存在しない  $[0, 0, 0], [0, 0, m_f] (m_f : \text{奇数})$  以外は全て構成可能である.

**5. むすび** 本報告では超立方体のグラフ  $Q_k$  の再帰的構成法, 定和の剰余制約,  $Q_4$  の Face Magic の解の構成可能性を示した. Perfect 性などの定和の分布に関しては今後の課題である.

**謝辞** 4次元超立方体の Edge Magic, Vertex Magic, Totally Magic に関する研究を行った田茂井 圭祐君に感謝します.

#### 参考文献

- [1] J. Sedláček, Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163-164 (June 1963).
- [2] W.D. Wallis, E. T. Baskoro, M. Miller, Edge-magic total labelings, Australasian Journal of Combinatorics, 22, pp.177-190 (Jan. 2000).
- [3] 杉山, Magic Graph の一般化とその性質, IPSJ 論文誌, Vol. 59, No.6, pp.1394-1404 (2018-06).
- [4] J. MacDougall, M. Miller, Slammin, W. D. Wallis, Vertex-Magic Total Labelings of Graphs, Utilitas Math., 61, pp.3-21 (2002).
- [5] Ko-Wei Lih, On Magic and Consecutive Labelings of Plane Graphs, Utilitas Math., 24, pp.165-197 (1983).
- [6] M. Bača, et al, A survey of face-antimagic evaluations of graphs, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 69 (3), pp.382-393 (2017).
- [7] 杉山, 平面 Magic Graph の2つの双対性について, 情報処理学会, 6B-04 (2019-03).
- [8] 杉山, Face Magic の非存在及び剰余制約の面グラフの構成, 電気関係学会東北支部連合大会, 1D04 (2019-08).
- [9] 杉山, 面で構成されるグラフに対する Magic Graph, FIT2019, A-023 (2019-09).
- [10] K. Tamoi, Magic Graph Construction for Hyper Cubes, Master Thesis 5191109 (2019-09).
- [11] 杉山, SAT ソルバーを用いた Magic Graph の構成とその応用, 情報処理学会, 3C-03 (2017-03).