情報処理学会論文誌　数理モデル化と応用　Vol.13　No.1　23–37 (Mar. 2020)

外来患者の待ち時間の分布関数による評価とその診療予約枠の人数決定問題への応用

市原 寛之[1,a)]　鈴木 敦夫[2]　三浦 英俊[2]

受付日 2019年8月27日，再受付日 2019年10月15日 / 2019年11月21日，
採録日 2019年12月13日

概要：本論文では診療予約制を採用している日本の病院における，診察待ち時間の確率モデルを作成し，外来患者の診察待ち時間の分布関数を導出する．さらに，導出した分布関数の診療予約枠の人数を決定する問題への応用方法を示す．具体的には，診察待ち時間の分布関数を用いて，患者の診察待ち時間が一定時間以内になる確率が高くなるような，各予約枠の予約可能な人数の組合せを求める方法を示す．この方法で診療予約枠の人数を決定する問題を解くことにより，遅い時間帯の予約枠の人数を多くすることで，患者の診察待ち時間を短くできることが分かった．また，現実の病院における平均診察待ち時間のデータとこのモデルにより算出された平均診察待ち時間を比較し，モデルの有効性を検証する．

キーワード：診察待ち時間，診療予約制，積率母関数，診察時間，病院経営

Evaluation of the Outpatient's Waiting Time by the Distribution Function and Its Application to the Problem of Deciding the Number of Appointment Patients in Each Appointment Frame

Hiroyuki Ichihara[1,a)]　Atsuo Suzuki[2]　Hidetoshi Miura[2]

Received: August 27, 2019, Revised: October 15, 2019/November 21, 2019,
Accepted: December 13, 2019

Abstract: In this paper, we develop a service waiting time model of a hospital adopting the medical appointment system and derive the distribution function of outpatient's service waiting time. Furthermore, we discuss how to decide the number of appointment patients in each appointment frame by using the distribution function. Specifically, by using the distribution function of the waiting time for each patient, we find out a combination of the number of appointment patients in each appointment frame so that the probability that the waiting time of each patient is less than the given time is higher. Furthermore, comparing the average waiting time in an actual hospital and that calculated by the service waiting time model, we show the effectiveness of our model.

Keywords: waiting time, medical appointment system, moment generating function, service time, hospital management

1. はじめに

近年，病院の診察待ち時間の長期化は日本の多くの病院で問題となっている．平成 26 年度に厚生労働省が実施した受療行動調査 [1] では，診察を受ける時間より，待ち時間のほうが長い患者が過半数を占めている．また「診察までの待ち時間」に対する満足度を見ると満足が 28.0%, 不満が 27.6%となっており，他の項目に比べ満足の割合が最も低く，不満の割合が最も高い．さらに徳永ら [10] は「診察待ち時間」の満足度が他の項目に比べ低いことを示しており，このことからも診察待ち時間の短縮化が最優先で解

[1] 群馬大学社会情報学部
Faculty of Social and Information Studies, Gunma University, Maebashi, Gunma 371–8510, Japan
[2] 南山大学理工学部システム数理学科
Department of Systems and Mathematical Sciences, Nanzan University, Nagoya, Aichi 466–8673, Japan
[a)] ichihara0305@gunma-u.ac.jp

© 2020 Information Processing Society of Japan

決されるべき問題であることが分かる．

診察待ち時間の短縮化のために，診療予約制を導入している病院が増えている．ただし，予約し来院する患者と予約せずに来院する患者が混在する病院においては，予約制を効果的に行うことは困難な問題となる．予約制を効果的に行うことは森川ら [8] によると，学術的にも重要な未解決課題であり，(i) どのように予約を受け入れるかという予約の設定問題，(ii) 予約をせずに来院する患者の到着を考慮し，どのように患者の診察を行うかの運用問題に大別できる，とある．このことは，新たに設立された病院や大規模な改修を行い，コンピュータによる予約システムを導入した病院でも起こりうる．

診察待ち時間の長期化の原因は，ある枠に予約した患者の診察が，その枠の中で終了せずに次の枠に診察を受ける患者に影響することにある．これは，予約可能な患者数や，1 つの枠の長さ等の診察室を設計する要因の設定が，適切でないために起こる．これを解決するために，診察室を設計する要因から外来患者の待ち時間を推定する方法が必要となる．そこで本研究では診療予約制を採用している日本の病院における，診察待ち時間の確率モデルを作成し，各診察室における予約可能な人数や 1 つの枠の長さ，医師の人数を設定し，患者の来院人数や各患者の診察時間等のデータから診察待ち時間を推定することができるツールを作成する．作成したツールは診療予約枠の人数を決定する問題へ応用することができる．この問題の詳細は 5 章で詳しく説明する．

診察待ち時間の確率モデルにおいて，予約可能な患者数や 1 つの枠の長さ，医師の人数等をパラメータとして，各枠内での各患者の診察終了時刻の分布関数を導出する．さらに，この分布関数を用いることにより，診察待ち時間の分布関数を導出する．その際に，本モデルでは診察の空き時間がないことを仮定する．すなわち，ある枠の終了前にその枠の患者の診察が終了したときには，その直後に，次の枠の患者の診察ができることを仮定する．この仮定により各枠における総診察時間の分布を利用し，各枠内での各患者の診察終了時刻の分布が既知の方法を用いて計算できるようになり，診察待ち時間の分布関数を導出できた．実際の病院の現場では診察室は混雑しており，診察の空き時間が生じることは稀なことである．したがってこのような仮定をしても，実際には診察待ち時間の分布にはほとんど影響しないと考えられる．

診察待ち時間の調査報告や研究は過去に様々なものがなされている．石井ら [4] は 2009 年に衣笠病院のある診療科において，予約制を導入し，予約し来院する患者，予約せずに来院する患者の医師への割当て方を工夫することによる，診察待ち時間の短縮化を行っている．

また，待ち行列理論等の数理的な手法を用いた診察待ち時間に関する研究もいくつか存在する．紀永ら [6] は受付，検査，会計等の病院の待ち行列の全体のフローをネットワークモデルで構築し，歩行速度を所与とし，患者が合理的にイベントの間を移動する規則を提案している．森川ら [8] は予約患者と初診患者の待ち時間をともに最小化をするような医師への割当て規則をいくつか提案し，数値実験により各割当て規則の評価を行っている．また，Takagi ら [9] が筑波大学病院の産婦人科における各病棟ごとの入院患者の人数や入院患者の滞在期間を待ち行列理論を用いて分析している．

海外のヘルスケア分野における待ち時間の研究も様々なものがなされている．Dimakou ら [2] は手術の待ち時間をイギリスの病院の統計のデータから経験分布関数を導出し，それを用いて解析している．Joustra ら [5] は放射線治療科において，通常の患者と急病の患者を同じ待ち行列に並ばせるか，異なる待ち行列に並ばせるか議論を行っており，$M/M/1$ のモデルと $M/M/2$ のモデルの待ち時間の結果を利用し，シミュレーションを行っている．また，確率過程を用いる研究もいくつか存在する．たとえば，Franx ら [3] は患者がポアソン到着し，診察時間を一定時間で与えた待ち行列モデル（$M/D/c$）に対して，定常分布の導出を行っている．

文献 [5] は待ち行列理論の既存の結果を用いて診察待ち時間を解析しているのに対し，日本の診察待ち時間に関する研究 [6], [8] は，シミュレーションにより診察待ち時間を解析しているものとなる．これらの研究に対して，我々は新しい診察待ち時間の確率モデルを作成し，診察待ち時間の分布関数を導出し，それを用いて診察待ち時間を推定する．また文献 [9] では入院患者の滞在人数やその変動の解析を行っており，一方，我々は外来患者の診察待ち時間を推定する．

以下に本論文の構成を述べる．2 章で本研究で対象となる病院の予約の仕組みに関して述べる．3 章で診察待ち時間の確率モデルの概要の説明と各患者の診察待ち時間の分布関数の導出に関して述べる．3.1 節で予約患者の待ち時間に関して述べ，その分布関数の形に関して述べる．3.2 節で初診患者の待ち時間に関して述べ，その分布関数を導出する．3.3 節で予約患者の待ち時間の分布関数を導出する際に必要となる確率変数の分布関数を導出する．3.4 節で 3.3 節で導出した関数を用いて，予約患者の待ち時間の分布関数を導出する．4 章で診療予約枠の人数決定問題に関して述べる．5 章で現実の病院における平均診察待ち時間と比較することによる検証に関して述べる．6 章でまとめと今後の課題に関して述べる．付録に 3 章の分布関数の導出の際に必要な計算の補足を載せる．

2. 病院の予約の仕組み

ここで本研究で対象となる病院の予約の仕組みに関して述べる．本研究で対象となる病院は 1 つの予約枠を 30 分

© 2020 Information Processing Society of Japan

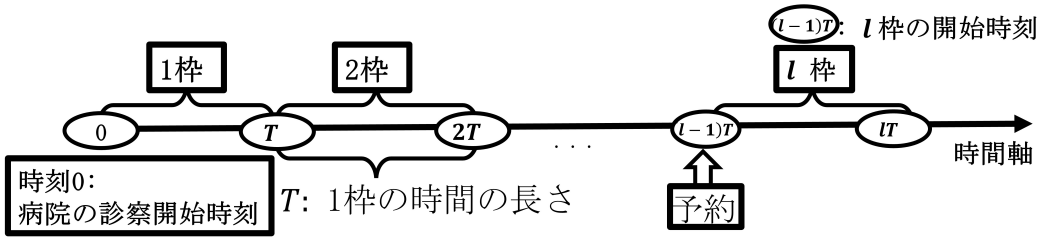


図 2　予約枠
Fig. 2　An appointment frame.

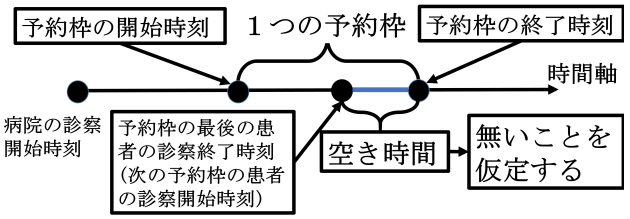


図 1　本研究で対象となる予約枠．予約枠の最後の患者の診察が終了した直後に次の予約枠の患者の診察を行う
Fig. 1　An appointment frame in this research. A doctor begins an examination of the patient in the current frame as soon as he or she finishes the examination of the last patient in the previous frame.

や 60 分等の時間区間で設けており，各診療科は予約枠ごとに予約可能な人数を決めている．また，事前に予約し来院する患者と予約せずに来院する患者をともに診察する．各患者の詳細と受け入れる規則を次に示す．

予約し来院する患者（予約患者）：事前に予約し来院する患者を指す．2 回目以降に来院する患者であるため，診療内容が決まっている場合が多く，診察時間が短くなる傾向がある．本研究では予約患者と呼ぶ．

予約せずに来院する患者（初診患者）：診療所から紹介状をもらい来院する患者を指す．事前に予約せずに来院し，診療内容が決まっていないために，予約患者よりも診察時間が長くなる傾向がある．本研究では初診患者と呼ぶ．

予約患者を受け入れる規則：同じ枠に来院した患者の中で優先的に割り当てる．

初診患者を受け入れる規則：各枠の予約患者の診察後に診察し，各枠の診察終了時刻までに診察可能である人数を設定する．

初診患者を受け入れる規則より，初診患者は来院人数が設定した人数より多い場合，来院した予約枠より後の予約枠で診察を受ける．さらに本モデルでは前述したように診察の空き時間がないことを仮定する（図 1）．

本研究ではこのような予約制を採用している病院の，診察待ち時間の確率モデルを作成し，各患者の診察待ち時間の分布関数を導出する．

3.　各患者の診察待ち時間の分布関数の導出

本章では前章で述べた診療予約制を採用している病院における，診察待ち時間の確率モデルを作成し，各患者の診察待ち時間の分布関数を導出する．

予約可能な予約枠の添え字集合を L（$L = \{1, 2, 3, \ldots, l_{\max}\}$），1 枠の時間を T として定義する（図 2）．時刻 0 を病院の診察開始時刻として定め，予約枠 l（略称 l 枠）（$l \in L$）を時間区間 $[(l-1)T, lT)$ とする．そしてすべての予約枠は予約で埋まっていると仮定する．患者種類の添字集合を I とし，$i = 1$ を予約患者，$i = 2$ を初診患者とする．また同じ枠に来院した患者の中では予約患者が優先的に診察を受けると仮定する．次に各患者の到着の仕方と診察順序を示す．

予約患者：予約患者が l 枠に予約可能である人数を N^l（$l \in L$）とおき，すべての予約枠は予約で埋まっていると仮定する．さらに，前の予約枠に来院した患者の診察がすべて終了する時刻には診察を受けられるように来院しており，遅くとも予約枠の開始時刻には来院していると仮定する．ただし予約患者の待ち時間は，前の枠のすべての患者の診察が次の枠の開始時刻より早く終了した場合，それらの最後の患者の診察終了時刻から始まり，終了していない場合，その患者が予約した予約枠の開始時刻から始まると仮定する．これらの仮定のもとで，前の予約枠のすべての患者の診察が終了した後（1 枠においては時刻 0）に，到着した順に診察を受ける．

初診患者：松田ら [7] に，外来患者はポアソン到着に従い来院することが示されているため，初診患者は到着率 λ_2^l のポアソン到着に従い来院すると仮定する．来院した初診患者は初診患者の待ち行列の最後尾に並び，来院した予約枠のすべての予約患者の診察が終了した後に，到着した順に診察を受ける．また l 枠までに診察可能である累積の初診患者の人数の上限 n_l（$l \in L$）を定め，l 枠の中で，初診患者の累積の来院人数が n_l 人を超えた場合は，来院した予約枠より後の予約枠でその初診患者の診察を開始すると仮定する．以下の記号を定義する．

定数

t_2：初診患者の到着時刻

記号

C_i^{l*}：予約枠 l に到着する，特定の種類 i の患者（$i \in I$, $l \in L$）

© 2020 Information Processing Society of Japan

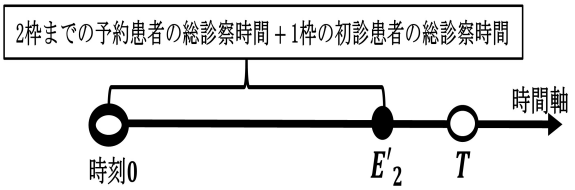


図 3　$E'_2 < T$ である場合
Fig. 3　In case of $E'_2 < T$.

確率変数

S_1^l：予約枠 l に到着する N^l 人の予約患者の中で C_1^{l*} より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間（$l \in L$）

$S_{i,k}$：病院の診察開始時刻から k 番目に到着した種類 i の患者 1 人あたりのサービス時間（$i \in I$）

E_l：予約枠 l にサービスを受けるすべての初診患者のサービス終了時刻（$l \in L$）（ただし，$E_0 := 0$）

E'_l：予約枠 l にサービスを受けるすべての予約患者のサービス終了時刻（$l \in L$）（ただし，$E'_0 := 0$）

$N_2^l(t)$：l 枠開始時刻から t 時間の間に来院した初診患者の人数（$l \in L$）

WT_i^l：C_i^{l*} の待ち時間（$i \in I$，$l \in L$）

パラメータ

(μ_i, α_i)：$S_{i,k}$（種類 i の患者 1 人あたりのサービス時間）が従うアーラン分布のパラメータの組合せ（診察率，次数）（$i \in I$）

λ_2^l：l 枠に来院する初診患者が従うポアソン到着のパラメータ（$l \in L$）

表記

$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$：確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ の関数

$F_{\phi(X_1,X_2,\ldots,X_k)}(t)$：$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ の分布関数

$f_{\phi(X_1,X_2,\ldots,X_k)}(t)$：$\phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ の密度関数

ここで外来患者の診察時間の長さが従う分布は松田ら [7] に，アーラン分布であることが示されていることから，患者 1 人あたりのサービス時間を表す確率変数 $S_{i,k}$ は次数が α_i，平均値が $1/\mu_i$（$i \in I$）のアーラン分布に従うと仮定する．すなわち患者 1 人あたりの診察時間は $F_{S_{i,k}}(t) = 1 - e^{-\alpha_i \mu_i t} \sum_{j=1}^{\alpha_i} (\alpha_i \mu_i t)^{j-1}/(j-1)!$ に従う．

本研究では計算の都合上，診察の空き時間がないことを仮定しているため，E_l と E'_l を各患者の総サービス時間として表す．そのためにいくつかの矛盾が生じる．たとえば，E'_2 が T より小さい確率が正となることがあげられる（**図 3**）．E'_2 が T より小さいとき，2 枠の予約患者は 1 枠に来院し，2 枠開始時刻までに診察が終了している．また，2 枠に来院した初診患者の診察は時刻 E'_2 から始まる．時刻 E'_2 において，2 枠の初診患者は来院していないために，このような場合は本モデルでは扱えない．これは E_l と E'_l を各患者の総サービス時間として表したことにより生じた．

これらの場合を取り扱うことができなくとも，実際の病院の現場では診察室は混雑しているために，事象 $\{E'_2 < T\}$ の確率はきわめて小さいと考えることができる．

また，本研究では患者が到着してから診察開始時刻までの時間を待ち時間として定義する．ここで各患者の待ち時間の分布関数の導出の手順を示す．

予約患者の待ち時間の分布関数の導出の手順

I)　予約患者の待ち時間 WT_1^l を予約患者の診察時間の和を表す確率変数 S_1^l と，各枠に診察を受けるすべての初診患者のサービス終了時刻を表す確率変数 E_{l-1} を用いて表す．

II)　予約患者の待ち時間の分布関数を確率変数 E_{l-1} と S_1^l の分布関数，確率変数 E_{l-1} の密度関数を用いて表す．

III)　確率変数 E_{l-1} と S_1^l の分布関数，確率変数 E_{l-1} の密度関数を導出する．

IV)　**III)** で導出した関数を **II)** の関数に代入し，予約患者の待ち時間の分布関数を求める．

3.1 節において **I)**，**II)** における結果の詳細を記述する．付録 A.1 において **II)** における導出過程の詳細を記述する．3.3 節において **III)** における E_l の密度関数と分布関数の導出，付録 A.2 において **III)** における S_1^l の分布関数の導出をそれぞれ記述する．3.4 節において **IV)** の詳細を記述する．

初診患者の待ち時間の分布関数の導出の手順

I)　初診患者の待ち時間 WT_2^l を診察時間を表す確率変数 $S_{i,k}$（$i \in I$）を用いて表す．

II)　初診患者の待ち時間の分布関数を定義に基づき導出する．

3.2 節において **I)**，**II)** の詳細を記述する．

3.1　予約患者の待ち時間と分布関数の形

ここでは予約患者の待ち時間に関して考察し，予約患者の待ち時間を予約患者の診察時間の和を表す確率変数と，各枠に診察を受けるすべての初診患者のサービス終了時刻を表す確率変数を用いて表す．1 枠に来院する予約患者の待ち時間と 2 枠以降に来院する予約患者の待ち時間は異なるためそれぞれ示す．

1 枠の予約患者は時刻 0 に N^1 人同時到着すると仮定する．また，C_1^{1*} が診察を受ける順番は N^1 人の中で等確率 $1/N^1$ で決まると仮定する．そのため WT_1^1 は N^1 人の中で C_1^{1*} より前に並ぶ予約患者の合計診察時間 S_1^1 となる（**図 4**）．

2 枠以降に来院する予約患者の待ち時間は，確率変数 E_l を用いることにより表すことができ，$(l-1)$ 枠に到着したすべての患者の診察が l 枠開始時刻 $(l-1)T$ までに終了しているときと，終了していないときで異なる．前者のとき，予約患者は時刻 E_{l-1} に N^l 人同時到着すると仮定する．C_1^{l*} が診察を受ける順番は N^l 人の中で等確率 $1/N^l$ で決まると仮定する．そのため，WT_1^l は同時到着した N^l 人の中で，C_1^{l*} より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間 S_1^l となる（**図 5** (a)）．後者のとき，予約患者は時刻 $(l-1)T$

© 2020 Information Processing Society of Japan

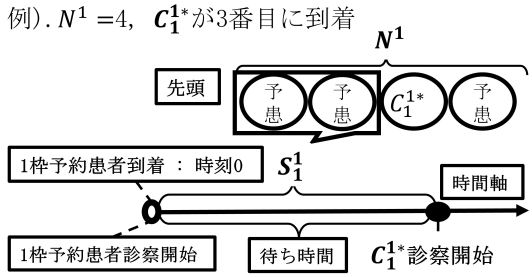
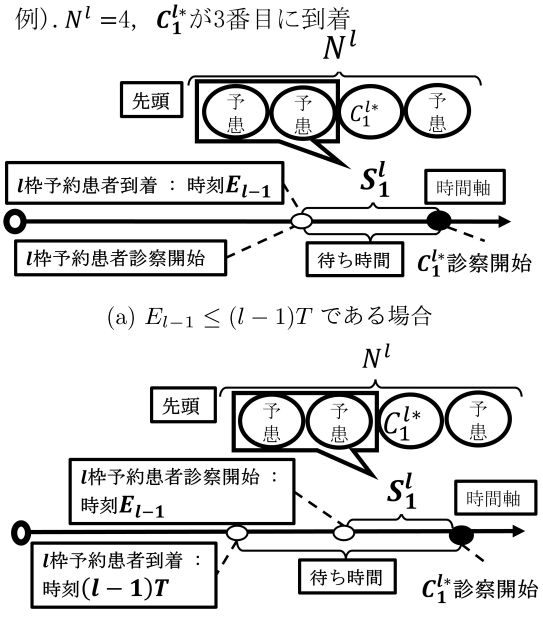


図 4　1 枠に来院する予約患者待ち時間

Fig. 4　The waiting time for an appointment patient of the first frame.



(a) $E_{l-1} \le (l-1)T$ である場合

(b) $E_{l-1} \ge (l-1)T$ である場合

図 5　l 枠（$l \ge 2$）に来院する予約患者の待ち時間

Fig. 5　The waiting time for an appointment patient who arrives in the $l-th (l \ge 2)$ frame.

に N^l 人同時到着すると仮定する．また，時刻 E_{l-1} から l 枠の予約患者の診察を開始する．そのため，WT_1^l は C_1^{l*} の到着時刻 $(l-1)T$ から $(l-1)$ 枠に到着する患者のすべてのサービスが終了する時刻 E_{l-1} までの時間と N^l 人の中で C_1^{l*} より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間 S_1^l の和になる（図 5 (b)）．

それぞれの場合を式で表すと次式となる．

$$WT_1^1 = S_1^1 \tag{1}$$

$$WT_1^l = \begin{cases} S_1^l \quad (l \ge 2, E_{l-1} \le (l-1)T) \\ E_{l-1} - (l-1)T + S_1^l \\ \qquad (l \ge 2, E_{l-1} \ge (l-1)T) \end{cases} \tag{2}$$

式 (1)，式 (2) をまとめると WT_1^l は次式となる．

$$WT_1^l = \max\{E_{l-1}, (l-1)T\} - (l-1)T + S_1^l \quad (l \in L) \tag{3}$$

WT_1^l の分布関数を変形すると次式となる．

$$F_{WT_1^l}(t) = F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T) + \int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t+(l-1)T-x) f_{E_{l-1}}(x)dx \tag{4}$$

式 (4) の変形の過程は付録 A.1 に載せる．式 (4) より，WT_1^l の分布関数を計算するために，確率変数 S_1^l，E_{l-1} の分布関数と E_{l-1} の密度関数を導出する必要がある．E_l の密度関数と分布関数の導出は 3.3 節で行い，S_1^l の分布関数の導出は付録 A.2 で行う．

3.2　初診患者の待ち時間と分布関数の導出

ここでは初診患者の待ち時間に関して考察し，初診患者の待ち時間を診察時間を表す確率変数を用いて表す．本研究では C_2^{l*} を時刻 t_2（$(l-1)T \le t_2 < lT$）に来院した特定の初診患者であると仮定し，WT_2^l を C_2^{l*} の待ち時間と置く．ここで t_2 は定数であると考える．また，当モデルは l 枠までに診察可能である初診患者の累積の人数を設定するために，初診患者は到着した枠より後の枠に診察を開始する場合がある．そこで時刻 t_2 までに来院した初診患者の累積の人数 $\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2-(l-1)T)$ により，C_2^{l*} の診察開始時刻を場合分けし，次の 3 つの場合で待ち時間を考察する．

(i) C_2^{l*} 到着時点で，初診患者の累積の来院人数が l 枠の終了時刻までに診察可能である累積の初診患者の人数より少ない場合 $(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2-(l-1)T) \le n_l)$

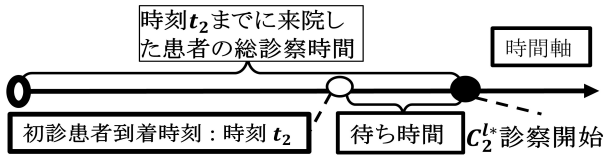
(ii) C_2^{l*} 到着時点で，初診患者の累積の来院人数が l'（$l' \in \{l, l+1, l+2, l+3, l+4\}$）枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の累積の人数より多く，$l'+1$ 枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の累積の人数より少ない場合 $(n_{l'}+1 \le \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2-(l-1)T) \le n_{l'+1}$（$l' \in \{l, l+1, l+2, l+3, l+4\}$））

(iii) C_2^{l*} 到着時点で，初診患者の累積の来院人数が $l+5$ 枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の累積の人数より多い場合（$n_{l+5}+1 \le \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^l(t_2-(l-1)T)$）

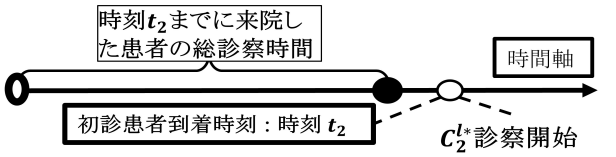
(i) の場合： C_2^{l*} 到着時点で，初診患者の累積の来院人数が n_l 人以下であるため，C_2^{l*} は l 枠に診察を開始する．さらに，C_2^{l*} 到着時点で，時刻 t_2 までに来院した患者の診察がすべて終了していない場合と，診察がすべて終了している場合の 2 通りを考察する．前者のとき，待ち時間は時刻 t_2 までに来院した患者の総診察時間から t_2 時間をひいたものとなる（**図 6** (a)）．後者のとき，待ち時間は C_2^{l*} 到着時点で診察が開始されるため，待ち時間は 0 となる（図 6 (b)）．

(ii) の場合： C_2^{l*} 到着時点で，初診患者の来院人数が $n_{l'}+1$（$l' \in \{l, l+1, l+2, l+3, l+4\}$）人以上で，$n_{l'+1}$ 人以下であるため，C_2^{l*} は l' 枠に診察を開始する．l' 枠に来院す

© 2020 Information Processing Society of Japan



(a) $\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T)+N_2^{l}(t_2-(l-1)T)} S_{2,k} \geq t_2$ である場合



(b) $\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T)+N_2^{l}(t_2-(l-1)T)} S_{2,k} \leq t_2$ である場合

図 6　l 枠（$l \in L$）に来院する初診患者診察待ち時間（(i) の場合）
Fig. 6　The waiting time for a new patient who arrives in the $l-th(l \in L)$ frame (in case of (i)).

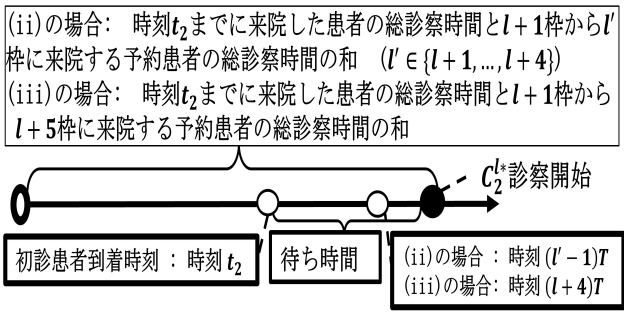


図 7　l 枠（$l \in L$）に来院する初診患者診察待ち時間（(ii)，(iii) の場合）
Fig. 7　The waiting time for a new patient who arrives in the $l-th(l \in L)$ frame (in case of (ii), (iii)).

る初診患者は，l' 枠に来院する予約患者の診察がすべて終了した後に診察を開始するために，C_2^{l*} の診察開始時刻は，時刻 t_2 までに来院した患者の総診察時間に $l+1$ 枠から l' 枠までの予約患者の総診察時間を足したものとして表される．そのために，待ち時間は時刻 t_2 までに来院した患者の総診察時間に $l+1$ 枠から l' 枠までの予約患者の総診察時間を足したものから t_2 時間をひいたものとして表すことができる（**図 7**）．

(iii) の場合：C_2^{l*} 到着時点で，初診患者の来院人数が n_{l+5} 人より多い場合は，C_2^{l*} は $l+5$ 枠に診察を開始すると仮定する．なぜなら，診察待ち時間調査の研究 [4] の著者から提供を受けた基礎データにおいて，l 枠に来院した患者が $l+5$ 枠以降に診察を開始している例が少ないためである．待ち時間は時刻 t_2 までに来院した患者の総診察時間に $l+1$ 枠から $l+5$ 枠までの予約患者の総診察時間を足したものから t_2 時間をひいたものとして表すことができる（図 7）．

(i)，(ii)，(iii) の場合を式で表すと次のようになる．

$$
WT_2^l = \begin{cases}
\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} \\
+\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T)+N_2^{l}(t_2-(l-1)T)} S_{2,k} - t_2,\ 0\} \\
(\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^{l}(t_2-(l-1)T) \leq n_l) \\
\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} \\
+\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T)+N_2^{l}(t_2-(l-1)T)} S_{2,k} - t_2 \\
(l' \in \{l, l+1, \ldots, l+4\}, n_{l'}+1 \leq \\
\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^{l}(t_2-(l-1)T) \leq n_{l'+1}) \\
\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}} S_{1,k} \\
+\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T)+N_2^{l}(t_2-(l-1)T)} S_{2,k} - t_2 \\
(n_{l+5}+1 \leq \sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T) + N_2^{l}(t_2-(l-1)T))
\end{cases}
\quad (l \in L) \qquad (5)
$$

WT_2^l の分布関数の値は事象 (i)，(ii)，(iii) それぞれの確率の和によって求められるため，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
F_{WT_2^l}(t) = &\sum_{i=0}^{n_l} \Bigg[F_{\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k} - t_2,\ 0\}}(t) \\
&\times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^{l}(t_2-(l-1)T)\}^i}{i!} \\
&\times e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^{l}(t_2-(l-1)T)\}} \Bigg] \\
&+ \sum_{l'=l}^{l+4} \sum_{i=n_{l'}+1}^{n_{l'+1}} \Bigg[F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l'} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}}(t+t_2) \\
&\times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^{l}(t_2-(l-1)T)\}^i}{i!} \\
&\times e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^{l}(t_2-(l-1)T)\}} \Bigg] \\
&+ \sum_{i=n_{l+5}+1}^{\infty} \Bigg[F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l+5} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}}(t+t_2) \\
&\times \frac{\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^{l}(t_2-(l-1)T)\}^i}{i!} \\
&\times e^{-\{\sum_{l_1=1}^{l-1} \lambda_2^{l_1} T + \lambda_2^{l}(t_2-(l-1)T)\}} \Bigg]
\end{aligned} \qquad (6)
$$

となる．ここで

$$
F_{\max\{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k} - t_2,\ 0\}}(t)
= \begin{cases}
F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}}(t+t_2) & (t \geq 0) \\
0 & (t < 0)
\end{cases} \qquad (7)
$$

$\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}$ の分布関数は 3.3 節で導出する．

© 2020 Information Processing Society of Japan

3.3　確率変数 E_l の分布関数の導出

ここでは予約枠 l にサービスを受けるすべての初診患者の診察終了時刻 E_l の分布関数の導出を行う．各枠の初診患者の診察終了時刻をサービス時間の確率変数を用いて表す．

$$
\begin{aligned}
E_l &= E_{l-1} + \sum_{k=\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}+1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} \\
&\quad + \sum_{k=\min\{n_{l-1},\sum_{l_1=1}^{l-1} N_2^{l_1}(T)\}+1}^{\min\{n_l,\sum_{l_1=1}^{l} N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \\
&= E_{l-2} + \sum_{k=\sum_{l_1=1}^{l-2} N^{l_1}+1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} \\
&\quad + \sum_{k=\min\{n_{l-2},\sum_{l_1=1}^{l-2} N_2^{l_1}(T)\}+1}^{\min\{n_l,\sum_{l_1=1}^{l} N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{\min\{n_l,\sum_{l_1=1}^{l} N_2^{l_1}(T)\}} S_{2,k} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

E_l の分布関数の導出を行う際に確率密度関数と積率母関数の関係を用いた次の手順で分布関数を導出する．

E_l の分布関数の導出手順を次に示す．

E_l の分布関数の導出手順

1)　E_l の積率母関数を導出する．

2)　積率母関数のパラメータ s を $-s$ と置き，積率母関数を逆ラプラス変換することにより E_l の密度関数を導出する．

3)　密度関数を積分することにより，E_l の分布関数を導出する．

各ステップごとの計算結果を示す．

1)　E_l の積率母関数を導出する．

$$
\begin{aligned}
M_{E_l}(s) = &\left(\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} e^{-\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_l} \left(\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} \left(\frac{\alpha_2\mu_2}{\alpha_2\mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 j} \\
&\times \frac{(\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T} \\
&+ \left(\frac{\alpha_1\mu_1}{\alpha_1\mu_1 - s}\right)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} \left(\frac{\alpha_2\mu_2}{\alpha_2\mu_2 - s}\right)^{\alpha_2 n_l} \\
&\times \left\{1 - \sum_{j=0}^{n_l} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} e^{-\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T}\right\} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

2)　積率母関数のパラメータ s を $-s$ と置き，積率母関数を逆ラプラス変換することにより E_l の密度関数を導出する．

$$
\begin{aligned}
f_{E_l}(t) = &\frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1} (\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} - 1)!} \\
&\times e^{-\alpha_1\mu_1 t - \sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_l} f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{j} S_{2,k}}(t) \\
&\times e^{-\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!} \\
&+ f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{n_l} S_{2,k}}(t) \\
&\times \left\{1 - \sum_{j=0}^{n_l} e^{-\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T} \frac{(\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T)^j}{j!}\right\} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

ここで $\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{j} S_{2,k}$ の密度関数は $\alpha_1\mu_1$ と $\alpha_2\mu_2$ が等しいときと異なるときで形が異なるため，次に示す．

a)　$\alpha_1\mu_1 \neq \alpha_2\mu_2$ の場合

$$
\begin{aligned}
&f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{j} S_{2,k}}(t) \\
&= \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} (\alpha_2\mu_2)^{\alpha_2 j}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} - 1)!(\alpha_2 j - 1)!} \\
&\quad \times \sum_{s=0}^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1} \binom{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} - 1}{s} (-1)^s \\
&\quad \times \left\{ \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} + \alpha_2 j - 2} e^{-\alpha_2\mu_2 t}}{\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2} \right. \\
&\quad + \sum_{w=1}^{s+\alpha_2 j-1} ({}_{s+\alpha_2 j-1}P_w)(-1)^w \\
&\quad \times \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} + \alpha_2 j - 2 - w} e^{-\alpha_2\mu_2 t}}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{1+w}} \\
&\quad + \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} - 1 - s} e^{-\alpha_1\mu_1 t}}{(\alpha_1\mu_1 - \alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2 j}} \\
&\quad \left. \times (-1)^{s+\alpha_2 j}(s + \alpha_2 j - 1)! \right\} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

b)　$\alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2$ の場合

$$
\begin{aligned}
&f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{j} S_{2,k}}(t) \\
&= \frac{t^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} + \alpha_2 j - 1} e^{-\alpha_1\mu_1 t}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} + \alpha_2 j - 1)!} \\
&\quad \times (\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} + \alpha_2 j} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

である．

3)　密度関数を積分することにより，E_l の分布関数を導出する．

$$
F_{E_l}(t) = \frac{\gamma(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}, \alpha_1\mu_1 t) e^{-\sum_{l_1=1}^{l} \lambda_2^{l_1} T}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1} - 1)!}
$$

© 2020 Information Processing Society of Japan

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{n_l} F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k}+\sum_{k=1}^{j} S_{2,k}}(t)\\
&\times \frac{(\sum_{l_1=1}^{l}\lambda_2^{l_1}T)^j}{j!}e^{-\sum_{l_1=1}^{l}\lambda_2^{l_1}T}\\
&+F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k}+\sum_{k=1}^{n_l} S_{2,k}}(t)\\
&\times\left\{1-\sum_{j=0}^{n_l} e^{-\sum_{l_1=1}^{l}\lambda_2^{l_1}T}\frac{(\sum_{l_1=1}^{l}\lambda_2^{l_1}T)^j}{j!}\right\} \quad (13)
\end{aligned}
$$

2) と同様に，$\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k}+\sum_{k=1}^{j} S_{2,k}$ の分布関数が $\alpha_1\mu_1$ と $\alpha_2\mu_2$ が等しいときと異なるときで形が異なるため，次に示す．

a) $\alpha_1\mu_1 \neq \alpha_2\mu_2$ の場合

$$
\begin{aligned}
&F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k}+\sum_{k=1}^{j} S_{2,k}}(t)\\
&=\frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}}(\alpha_2\mu_2)^{\alpha_2 j}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}-1)!(\alpha_2 j-1)!}\\
&\times\sum_{s=0}^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}-1}\binom{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}-1}{s}\\
&\times(-1)^s\left[\frac{\gamma(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}+\alpha_2 j-1,\alpha_2\mu_2 t)}{(\alpha_2\mu_2)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}+\alpha_2 j-1}(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)}\right.\\
&+\sum_{w=1}^{s+\alpha_2 j-1}\left\{\frac{(-1)^w\binom{s+\alpha_2 j-1}{P_w}}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{1+w}}\right.\\
&\times\left.\left.\frac{\gamma(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}+\alpha_2 j-1-w,\alpha_2\mu_2 t)}{(\alpha_2\mu_2)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}+\alpha_2 j-1-w}}\right\}\right.\\
&+\frac{(-1)^{s+\alpha_2 j}(s+\alpha_2 j-1)!}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2 j}}\\
&\times\left.\frac{\gamma(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}-s,\alpha_1\mu_1 t)}{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}-s}}\right] \quad (14)
\end{aligned}
$$

b) $\alpha_1\mu_1=\alpha_2\mu_2$ の場合

$$
\begin{aligned}
&F_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} S_{1,k}+\sum_{k=1}^{j} S_{2,k}}(t)\\
&=\frac{\gamma(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}+\alpha_2 j,\alpha_1\mu_1 t)}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}+\alpha_2 j-1)!} \quad (15)
\end{aligned}
$$

である．

3.4　予約患者の待ち時間の分布関数の導出

ここでは S_1^l の分布関数と E_l の密度関数を用いて式 (A.4) の第 2 項を計算する．

$$
\begin{aligned}
&\int_{(l-1)T}^{\infty} F_{S_1^l}(t+(l-1)T-x)f_{E_{l-1}}(x)dx\\
&=F_{E_{l-1}}(t+(l-1)T)-F_{E_{l-1}}((l-1)T)\\
&\quad-\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x)}\sum_{j=1}^{N^l-1}\sum_{k=1}^{j\alpha_1}\frac{1}{N^l}\\
&\quad\times\frac{(\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x))^{k-1}}{(k-1)!}f_{E_{l-1}}(x)dx \quad (16)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
g_l(t):=&\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T}\sum_{j=1}^{N^l-1}\sum_{k=1}^{j\alpha_1}\frac{e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x)}}{N^l}\\
&\times\frac{(\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x))^{k-1}}{(k-1)!}f_{E_{l-1}}(x)dx \quad (17)
\end{aligned}
$$

と置き，式 (17) に E_{l-1} の密度関数を代入して計算すると，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
g_l(t)=&\frac{1}{N^l}\sum_{j=1}^{N^l-1}\sum_{k=1}^{j\alpha_1}\frac{1}{(k-1)!}\\
&\times\left[\frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l-1}N^{l_1}+k-1}e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T)-\sum_{l_1=1}^{l-1}\lambda_2^{l_1}T}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l-1}N^{l_1}-1)!}\right.\\
&\times\sum_{u=0}^{k-1}\binom{k-1}{u}(t+(l-1)T)^{k-1-u}(-1)^u\\
&\times\left\{\frac{(t+(l-1)T)^{u+\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}}}{u+\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}}\right.\\
&\left.-\frac{((l-1)T)^{u+\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}}}{u+\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l}N^{l_1}}\right\}\\
&+\sum_{j=1}^{n_{l-1}}S_{l,j}(t)e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1}\lambda_2^{l_1}T}\frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1}\lambda_2^{l_1}T)^j}{j!}\\
&\left.+S_{l,n_{l-1}}(t)\left\{1-\sum_{j=0}^{n_{l-1}}e^{-\sum_{l_1=1}^{l-1}\lambda_2^{l_1}T}\frac{(\sum_{l_1=1}^{l-1}\lambda_2^{l_1}T)^j}{j!}\right\}\right] \quad (18)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
S_{l,i}(t)=&\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T}e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x)}\\
&\times(\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x))^{k-1}\\
&\times f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1}N^{l_1}}S_{1,k}+\sum_{k=1}^{i}S_{2,k}}(x)dx \quad (19)
\end{aligned}
$$

式 (19) の計算は付録 A.3 で行う．以上をまとめると，WT_1^l の分布関数は次式となる．

$$
\begin{aligned}
F_{WT_1^l}(t)=&F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T)\\
&+F_{E_{l-1}}(t+(l-1)T)-F_{E_{l-1}}((l-1)T)-g_l(t) \quad (20)
\end{aligned}
$$

ここで E_{l-1} の分布関数は式 (13) の l に $l-1$ を代入したもの，S_1^l の分布関数は式 (A.7)，$g_l(t)$ は式 (18) となる．

4.　診療予約枠の人数決定問題

本章では診察待ち時間モデルを用いた診療予約枠の人数決定問題について述べる．前節で導出した各患者の診察待ち時間の分布関数を用いて，あらかじめ初診患者の単位時間当たりの来院人数や各患者の診察時間を病院のデータか

© 2020 Information Processing Society of Japan

ら推定し，各枠の予約可能人数と医師の数をパラメータとして診察待ち時間が一定時間以内である確率を計算する．パラメータの値を変えてこれを繰り返すことにより，診察待ち時間が一定時間以内である確率が高くなる，各枠の予約可能人数の組合せと医師の数を求めることができる．本研究では前述したことを診療予約枠の人数決定問題と呼ぶ．

診察待ち時間調査の研究 [4] の基礎データを用いて診療予約枠の人数決定問題を解く．すなわち，実際の病院の診察室の状況において，各患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率が高くなるような，各枠の予約可能人数の組み合わせを求める．各患者の診察待ち時間を計算する際に必要なパラメータは [4] の基礎データにおける，1 つの診療科のものから以下のように設定する．

設定するパラメータ

(1) l 枠の予約可能人数 N^l ($l \in L$)（人）：1 枠から 5 枠：3 人，6 枠：1 人
(2) 1 枠の時間 T（分）：30 分
(3) l 枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数 n_l ($l \in L$)（人）：1 枠：1 人，2 枠：2 人,...，5 枠：5 人

データから推定するパラメータ

(4) l 枠の初診患者到着率 λ_2^l ($l \in L$)（人/60 分）：1 枠：2（人/60 分），2 枠：4（人/60 分），3 枠：4（人/60 分），4 枠：2（人/60 分），5 枠以降：0（人/60 分）
(5) 各患者の平均診察時間 $1/\mu_i$ ($i \in I$)（分）：予約患者：10.81 分，初診患者：11.57 分

l 枠に来院する初診患者の到着時刻 t_2（分）は時刻 $(l-1)T$ としておき，各患者の診察時間の長さが従うアーラン分布の次数 α_i ($i \in I$) は $\alpha_1 = 3$，$\alpha_2 = 2$ と設定した．また，上記のパラメータにおける，各枠の予約可能人数は現実の病院において実際に予約があり，来院した人数を設定した．そのため，予約可能人数は実質上限一杯となっている．ここで，5 枠までの累積の予約可能人数 15 人の組合せを 1 枠から 5 枠までの各枠の予約可能人数が 3 人の場合と早い時間帯の予約枠に予約人数が多い場合を 2 通り，遅い時間帯の予約枠に予約人数が多い場合を 2 通りの計 5 通り考察する．各枠で予約可能人数を変更させた場合の組合せをそれぞれ組合せ I，II，III，IV とした．各組合せに対して，各患者の診察待ち時間の分布関数を計算し，これらの値の挙動を数値として見ることにより，診察待ち時間が短くなる組合せを求める．すべての組合せにおいて 6 枠の予約可能人数は 1 人と置く．

表 1，**表 2** にその結果を示す．表 1，表 2 は各枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内，初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率を示している．ここで，平成 26 年受療行動調査 [1] によると，診察待ち時間は 30 分未満が約 50 パーセント，120 分未満が約 85 パーセントであるために，予約患者の診察待ち時間の上限は 30 分に少し余裕を持たせ 40 分，初診患者は予約患者より診察待ち時間が長くなるため，診察待ち時間の上限は 120 分と設定した．表 1，表 2 を見ると，1 枠と 2 枠に予約可能人数を多く設定した場合は，各枠における予約可能人数が同じである場合より，すべての枠において予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が低くなる．これは 3 枠までの各枠における予約可能人数が多いために，3 枠までの各枠に来院するすべての初診患者の診察終了時刻が，各枠の終了時刻より遅くなる確率が高くなるためであると考えられる．すなわち，3 枠のすべての患者の診察終了時刻の遅れが 3 枠より後の枠に来院した患者の診察開始時刻に影響し，各患者の診察開始時刻が遅れる確率が高くなると考えられる．そのため

表 1　各枠の予約可能人数が同じである場合の予約患者の待ち時間が 40 分以内，初診患者の待ち時間が 120 分以内である確率（小数点第 3 位を四捨五入）

Table 1　In case the number of appointment patients in each frame is the same, the probabilities of events that the waiting time of an appointment patient is less than 40 minutes and that the waiting time of a new patient is less than 120 minutes (round off to two decimal places).

	予約可能人数	予約患者	初診患者
枠番号 **1**	3	1.00	1.00
枠番号 **2**	3	0.83	0.97
枠番号 **3**	3	0.63	0.75
枠番号 **4**	3	0.44	0.52
枠番号 **5**	3	0.27	0.53

表 2　各枠の予約可能人数が異なる場合の予約患者の待ち時間が 40 分以内，初診患者の待ち時間が 120 分以内である確率（小数点第 3 位を四捨五入）

Table 2　In case the number of appointment patients in each frame is different, the probabilities of the events that the waiting time of an appointment patient is less than 40 minutes and that the waiting time of a new patient is less than 120 minutes (round off to two decimal places).

	組合せ **I**	予約患者	初診患者	組合せ **II**	予約患者	初診患者
枠番号 **1**	5	0.78	1.00	4	0.90	1.00
枠番号 **2**	5	0.37	0.85	4	0.60	0.94
枠番号 **3**	3	0.07	0.54	3	0.30	0.68
枠番号 **4**	1	0.04	0.45	2	0.18	0.49
枠番号 **5**	1	0.11	0.53	2	0.18	0.53
	組合せ **III**	予約患者	初診患者	組合せ **IV**	予約患者	初診患者
枠番号 **1**	2	0.96	1.00	1	1.00	1.00
枠番号 **2**	2	0.94	0.98	1	1.00	0.99
枠番号 **3**	3	0.84	0.78	3	0.91	0.80
枠番号 **4**	4	0.65	0.53	5	0.63	0.54
枠番号 **5**	4	0.48	0.53	5	0.46	0.53

© 2020 Information Processing Society of Japan

に，4 枠と 5 枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が低くなる．

4 枠と 5 枠に予約可能人数を多く設定した場合は，各枠における予約可能人数が同じである場合より，予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が高くなる．これは 3 枠に来院したすべての患者の診察の終了時刻が，3 枠の終了時刻より早くなることで，予約患者の診察待ち時間は同じ枠に到着した前に並ぶ予約患者の総診察時間となり，初診患者の診察待ち時間は，来院した時点の前に並ぶ予約患者と初診患者の総診察時間になるためであると考えられる．

また組合せ Ⅳ のように各枠の予約可能人数を設定し，モデルを用いて計算を行うと，1 枠に来院する患者が予約患者が 1 人と初診患者が平均 30 分に 1 人であるために，モデルにおいて $E_2' < T$ である確率が非常に高くなる．ただし，表の中の分布関数の値は各枠に来院する患者の診察が連続して行われたときに，ある枠に来院する特定の患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率を意味するため，待ち時間を測る基準の値と考えることができる．

組合せ Ⅳ のように，各枠の予約可能人数を設定すると，4 枠と 5 枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率を除いて，予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が最も高くなっている．ただし，組合せ Ⅳ は 1 枠と 2 枠にそれぞれ 1 人，4 枠，5 枠にそれぞれ 5 人設定するために，各枠の予約可能人数の差が大きくなる．そこで，組合せ Ⅲ により各枠の予約可能人数を設定すると，各枠の予約可能人数の差が少なく，各枠の各患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率を比較的大きくすることができる．

さらに表 2 の組合せ Ⅰ，Ⅱ における結果と組合せ Ⅲ，Ⅳ における結果を比較することにより，早い時間帯の予約枠の予約可能人数を遅い時間帯の予約枠の予約可能人数より少なくすることで，各患者の診察待ち時間を短くできることが分かる．ただし，実際の病院においてこの組合せのもとに各枠に予約可能である人数を設定すると，1 枠のすべての患者の診察が 30 分以内に終了する確率が高くなる．そのために 1 枠のすべての患者の診察が終了した時点で，2 枠の初めの患者が来院していない場合，医師の待ち時間が発生する．当モデルではこのような場合は考えていないが，患者の待ち時間の観点から考えた．

ここで組合せ Ⅲ により予約可能人数を設定した場合を見ると，5 枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率は 0.5 より小さく，初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率は 0.55 より小さいことが分かる．

そこで前述した例の，組合せ Ⅲ において，医師の数を 2 人に増やす．医師が 2 人のモデルとして，医師が 1 人の待ち行列を 2 つ並列させ，予約患者を 1 人目の医師と 2 人目の医師で均等に分ける．ただし，3 枠における予約患者の人数は 2 人目の医師に 1 人多く設定し，6 枠における予約患者の人数は 1 人目の医師に 1 人多く設定する．また，各医師の負担を可能な限り均等にするために，奇数番めに来院した初診患者は 1 人目の医師の待ち行列の最後尾に並び，偶数番めに来院した初診患者は 2 人目の医師の待ち行列の最後尾に並ぶと仮定する．このことより，このモデルにおいては，患者が到着した時点でその患者を診察する医師が決まるために，各医師において l 枠の開始時刻や終了時刻が決まる．**表 3** の計算結果はこのような前提の下で，医師が 1 人の場合と比較するための簡便な方法としてあげたものである．各医師における予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率を計算する．計算する際の各医師におけるパラメータは次のようになる．

表 3　各枠の予約可能人数を組合せ Ⅲ で設定したとき，医師が 1 人のときと医師を 2 人に増やしたときの予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率（小数点第 3 位を四捨五入）

Table 3　In case of setting the number of appointment patients in each frame by the combination Ⅲ, the probabilities of the events that the waiting times of an appointment patient is less than 40 minutes and that the waiting times of a new patient is 120 minutes according as the number of doctors is one or two (round off to two decimal places).

		医師が 1 人		医師が 2 人	
		予約患者	初診患者	予約患者	初診患者
枠番号	1	0.96	1.00	1.00	1.00
	2	0.94	0.98	1.00	1.00
	3	0.84	0.78	0.89	1.00
	4	0.65	0.53	0.90	1.00
	5	0.48	0.53	0.93	1.00

1 人目の医師

設定するパラメータ

(1) l **枠の予約可能人数** N^l（$l \in L$）（人）：1 枠：1 人，2 枠：1 人，3 枠：1 人，4 枠：2 人，5 枠：2 人，6 枠：1 人

(2) **1 枠の時間** T（分）：30 分

(3) l **枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数** n_l（$l \in L$）（人）：1 枠：1 人，2 枠：2 人，...，5 枠：5 人

データから推定するパラメータ

(4) l **枠の初診患者到着率** λ_2^l（$l \in L$）（人/60 分）：1 枠：2（人/60 分），2 枠：4（人/60 分），3 枠：4（人/60 分），4 枠：2（人/60 分），5 枠以降：0（人/60 分）

(5) **各患者の平均診察時間** $1/\mu_i$（$i \in I$）（分）：予約患者：10.81 分，初診患者：11.57 分

© 2020 Information Processing Society of Japan

2 人目の医師

設定するパラメータ

(1) l 枠の予約可能人数 N^l（$l \in L$）（人）：1 枠：1 人，2 枠：1 人，3 枠：2 人，4 枠：2 人，5 枠：2 人，6 枠：0 人

(2) **1** 枠の時間 T（分）：30 分

(3) l 枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数 n_l（$l \in L$）（人）：1 枠：1 人，2 枠：2 人，...，5 枠：5 人

データから推定するパラメータ

(4) l 枠の初診患者到着率 λ_2^l（$l \in L$）（人/**60** 分）：1 枠：2（人/60 分），2 枠：4（人/60 分），3 枠：4（人/60 分），4 枠：2（人/60 分），5 枠以降：0（人/60 分）

(5) 各患者の平均診察時間 $1/\mu_i$（$i \in I$）（分）：予約患者：10.81 分，初診患者：11.57 分

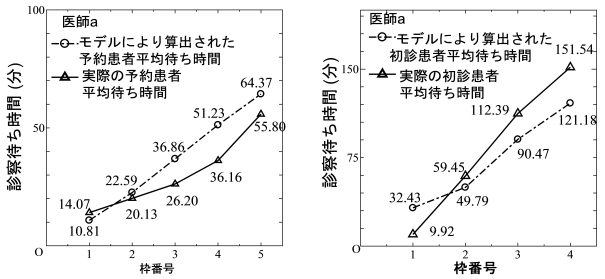
1 人目の医師，2 人目の医師ともに，l 枠に来院する初診患者の到着時刻 t_2（分）は時刻 $(l-1)\,T$ としておき，各患者の診察時間の長さが従うアーラン分布の次数 α_i（$i \in I$）は $\alpha_1 = 3$，$\alpha_2 = 2$ と設定した．

表 3 に医師が 1 人の場合と比較した結果を載せた．医師が 2 人のときは，1 人目の医師と 2 人目の医師において，各医師の各患者の診察待ち時間が一定時間以内である確率を比較し，小さい方の確率を載せた．

表 3 より，各枠の予約可能人数が組合せ Ⅲ であるときに，1 人の医師ですべての患者の診察を行うと，6 枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率が 0.48 以下，初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率が 0.55 以下となるが，医師を 2 人にしたときは，6 枠の予約患者の診察待ち時間が 40 分以内である確率と初診患者の診察待ち時間が 120 分以内である確率はともに 0.95 以上となり，それぞれの確率は増えていることが分かる．したがって，各枠の予約可能人数が組合せ Ⅲ であるとき，医師の数を 2 人にすると，予約患者と初診患者の待ち時間が一定時間以内である確率がおおむね 2 倍になった．

5. 現実の病院における診察待ち時間のデータとの比較

本章では現実の病院における平均診察待ち時間とモデルにより算出された分布関数から求めた平均診察待ち時間を比較して，モデルによる平均診察待ち時間がどの程度現実の病院における平均診察待ち時間を近似しているかを調べる．現実の病院におけるデータは診察待ち時間調査の研究 [4] の基礎データを基に設定し，6 つの診療科に関して比較を行った．ここで現実の病院における予約患者の診察待ち時間は予約時刻から診察開始時刻までの時間，初診患者の診察待ち時間は枠の開始時刻から診察開始時刻までの時間として置いた．本論文には 2 つの診療科（医師 a，医師 b，医師 c）に対しての結果を載せる．



(a) 予約患者平均診察待ち時間の比較　(b) 初診患者平均診察待ち時間の比較

図 8　モデルによる各患者の平均診察待ち時間と現実の病院における各患者の平均診察待ち時間の比較（推定の精度が良い場合）

Fig. 8　Comparison between the average waiting times of the respective patients in the model and an actual hospital (in case of good accuracy of estimation).

各患者の診察待ち時間を計算する際に必要なパラメータは石井ら [4] を基に以下のように設定した．

設定するパラメータ

(1) l 枠の予約可能人数 N^l（$l \in L$）（人）：

医師 a 1 枠から 5 枠：3 人，6 枠：1 人

医師 b 1 枠：2 人，2 枠：4 人，3 枠：3 人，4 枠：2 人，5 枠：1 人，6 枠：0 人

医師 c 1 枠：3 人，2 枠：2 人，3 枠：3 人，4 枠：3 人，5 枠：3 人，6 枠：3 人

(2) **1** 枠の時間 T（分）：**医師 a，b，c** 30 分

(3) l 枠の終了時刻までに診察可能である初診患者の人数 n_l（$l \in L$）（人）：

医師 a，b，c 1 枠：1 人，2 枠：2 人，...，5 枠：5 人

データから推定するパラメータ

(4) l 枠の初診患者到着率 λ_2^l（$l \in L$）（人/**60** 分）：

医師 a 1 枠：2（人/60 分），2 枠：4（人/60 分），3 枠：4（人/60 分），4 枠：2（人/60 分），5 枠以降：0（人/60 分）

医師 b 1 枠：2（人/60 分），2 枠：2（人/60 分），3 枠：0（人/60 分），4 枠：4（人/60 分），5 枠以降：0（人/60 分）

医師 c 1 枠：8（人/60 分），2 枠：4（人/60 分），3 枠：6（人/60 分），4 枠：4（人/60 分），5 枠以降：0（人/60 分）

(5) 各患者の平均診察時間 $1/\mu_i$（$i \in I$）（分）：

医師 a 予約患者：10.81 分，初診患者：11.57 分

医師 b 予約患者：15.74 分，初診患者：16.84 分

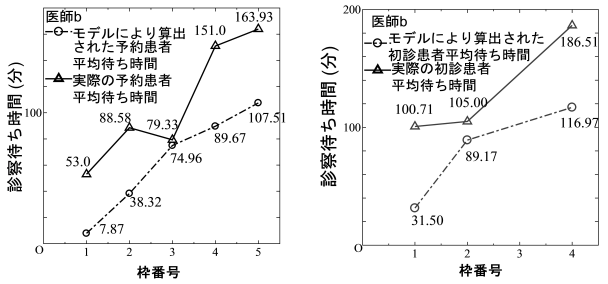
医師 c 予約患者：8.18 分，初診患者：8.75 分

l 枠に来院する初診患者の到着時刻 t_2（分）は時刻 $(l-1)\,T$ としておき，各患者の診察時間の長さが従うアーラン分布の次数 α_i（$i \in I$）は $\alpha_1 = 3$，$\alpha_2 = 2$ と設定した．

平均診察待ち時間の比較結果の考察

図 8 にある平均診察待ち時間の比較結果を見ると，モデルによる平均診察待ち時間は現実の病院における平均診察

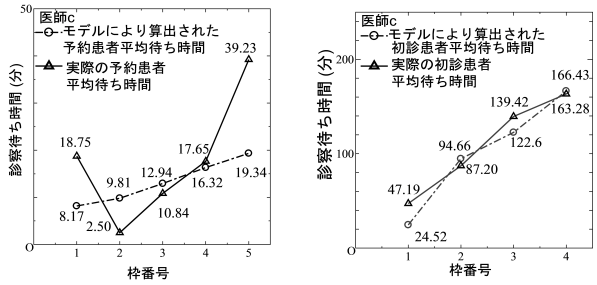
© 2020 Information Processing Society of Japan



(a) 予約患者平均診察待ち時間の比較　(b) 初診患者平均診察待ち時間の比較

図 9　モデルによる各患者の平均診察待ち時間と現実の病院における各患者の平均診察待ち時間の比較（推定の精度が悪い場合）

Fig. 9　Comparison between the average waiting times of the respective patients in the model and an actual hospital (in case of bad accuracy of estimation).



(a) 予約患者平均診察待ち時間の比較　(b) 初診患者平均診察待ち時間の比較

図 10　モデルによる各患者の平均診察待ち時間と現実の病院における各患者の平均診察待ち時間の比較（推定の精度が一部悪い場合）

Fig. 10　Comparison between the average waiting times of the respective patients in the model and an actual hospital (in case of partially bad accuracy of estimation).

待ち時間の傾向をとらえられている．ただし，モデルによる予約患者の平均診察待ち時間が若干長めに算出されている．また初診患者の平均診察待ち時間は現実の病院における平均診察待ち時間より短めに算出されている．医師 a においては患者の診察順序の入れ替えが少なく，診察時間の散らばりは小さい．また，1 人目の患者の診察の開始時刻が早かったため，図 8 のような結果となったと考えられる．

図 9 にある平均診察待ち時間の比較結果を見ると，モデルによる平均診察待ち時間と現実の病院における平均診察待ち時間は乖離が大きい．理由としては，基礎データにおける 1 人目の患者の診察開始時刻が検査や問診等により極端に遅くなっているためであると考えられる．それにともない，2 人目以降の患者の診察開始時刻も遅くなり，現実の病院における各患者の平均診察待ち時間がより長く算出されている．本モデルは診察待ち時間のみに焦点を当てたモデルであり，これらを考慮できていない．また，医師の裁量により，診察の順序が入れ替えが多く起こっていたことや，患者の診察時間の長さのばらつきが大きくなっていたことも原因として考えられる．

図 10 にある予約患者の平均診察待ち時間の比較結果を見ると，モデルによる平均診察待ち時間と現実の病院における平均診察待ち時間は乖離が大きい箇所と小さい箇所がある．特に 5 枠における現実の病院におけるの予約患者の平均診察待ち時間はモデルによる予約患者の平均診察待ち時間の倍以上となる．5 枠の予約患者の基礎データを見ると，5 枠の 1 人目の患者の診察開始時刻と 2 人目の患者の診察開始時刻の間の時間が長い．原因としては 5 枠の 1 人目の患者の診察時間が長い，検査や問診等の対応をしていたためであると考えられる．また，初診患者の平均診察待ち時間の比較結果を見ると，現実の平均診察待ち時間とモデルにより算出された平均診察待ち時間は乖離が小さいことが分かる．

本論文のモデルの検証では実際の病院における待ち時間のデータ数が少なかったために，モデルにおける診察待ち時間との比較において，いずれも乖離があった．データ数を多くすることにより比較の精度は良くなる可能性はあるが，検査等を考慮していないために現実の待ち時間との乖離はあり，完全に一致することは期待できない．

6. まとめと課題

本論文では診療予約制を採用している日本の病院における，診察待ち時間の確率モデルを作成した．このモデルでは予約患者と初診患者の 2 種類の患者が存在し，時間区間を予約枠として設けるものである．また，各患者を受け入れる規則はそれぞれ次のようになる．予約患者は同じ枠の中で優先権を持ち，初診患者は予約患者の診察後に診察が始まり，各枠の診察終了時刻までに診察可能である人数を設定するものである．

このモデルにおける各患者の診察待ち時間の分布関数を導出し，診療予約枠の人数決定問題への応用例を示した．診療予約枠の人数決定問題を解くことで，遅い時間帯の予約枠に予約可能人数を多く設定することにより，各枠の患者の診察待ち時間を短くできることが分かった．さらに，医師の数を 2 人に増やすことにより，診察待ち時間がより短くなることを示した．

モデルの検証として，モデルにより算出された各患者の診察待ち時間の平均値と実際の病院の平均診察待ち時間を比較し，モデルにより算出された値の近似の精度を検証をした．

検査時間を考慮したモデル化を行って，より現実の病院における状況に対応できるようにすることと，導出した診察待ち時間の分布関数を用いることにより，パラメータを入力すると，診察待ち時間が 60 分以内である確率，90 分以内である確率等を自動で計算することのできるツールを作成することの 2 点が今後の課題である．

© 2020 Information Processing Society of Japan

謝辞　本研究を進めるにあたり，現実の病院における診察待ち時間の基礎データを，ヘルスケアビジネス経営人材育成研究所所長の石井富美氏からご提供いただきました．ここに感謝の意を記します．

参考文献

[1] 平成 26 年受療行動調査の概況：厚生労働省ホームページ (2014) 入手先 ⟨http://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/jyuryo/14/⟩.

[2] Dimakou, S., Dimakou, O. and Basso, H.S.: Waiting time distribution in public health care: Empirics and theory, *Health Economics Review* (online), DOI: 10.1186/s13561-015-0061-7 (2015).

[3] Franx, G.J.: A Simple Solution for the M/D/c Waiting Time Distribution, *Operations Research Letters*, Vol.29, No.5, pp.221–229 (2001).

[4] 石井富美，岩崎正信，古屋修身：医療情報システムを利用した外来診療待ち時間調査がもたらした患者満足度向上への取り組み，医療情報学連合大会論文集（医療情報連合大会論文集），pp.678–681 (2009).

[5] Joustra, P., van der Sluis, E. and van Dijk, N.M.: To pool or not to pool in hospitals: A theoretical and practical comparison for a radiotherapy outpatient department, *Annals of Operations Research*, Vol.178, No.1, pp.78–89 (2010).

[6] 紀永　儒，柳川佳也，宮崎茂次：待ち行列理論を用いた病院の外来患者待ち時間短縮の一提案，日本経営工学会論文誌，Vol.60, No.6, pp.297–305 (2010).

[7] 松田光生，本田勝紀，内田勝也，樫田良精：東大病院における外来患者の待時間の問題について，医用電子と生体工学，Vol.5, No.2, pp.139–142 (1967).

[8] 森川克巳，高橋勝彦，広谷大助：外来患者の平均待ち時間を考慮した診察順序決定，日本経営工学会論文誌，Vol.64, No.2, pp.119–127 (2012).

[9] Takagi, H., Kanai, Y. and Misue, K.: Queueig network model for obstetric patient flow in a hospital, *Health Care Management Science*, 2, pp.433–451 (2017).

[10] 徳永　誠，渡邊　進，中根惟武：待ち時間と満足度を組み合わせた外来患者調査，日本医療マネジメント学会雑誌，Vol.7, No.2, pp.324–328 (2006).

付　　録

A.1　予約患者の待ち時間の分布関数の変形

ここでは 3.1 節の式 (4) の変形の過程を載せる．WT_1^l の分布関数を定義に基づき計算することにより

$$F_{WT_1^l}(t) = F_{\max\{E_{l-1}+S_1^l,(l-1)T+S_1^l\}}(t+(l-1)T) \tag{A.1}$$

を得る．式 (A.1) より，$\max\{E_{l-1}+S_1^l,(l-1)T+S_1^l\}$ の分布関数を導出することにより，WT_1^l の分布関数を導出できる．また (E_{l-1},S_1^l) の集合を D と置くと

$$D=\{(E_{l-1},S_1^l)|E_{l-1}+S_1^l\le t,\ (l-1)T+S_1^l\le t\} \tag{A.2}$$

となるため，$x:=E_{l-1}, y:=S_1^l, a:=(l-1)T$ とすると，領域 D は**図 A·1** の網掛けの領域となる．ここで E_{l-1} と

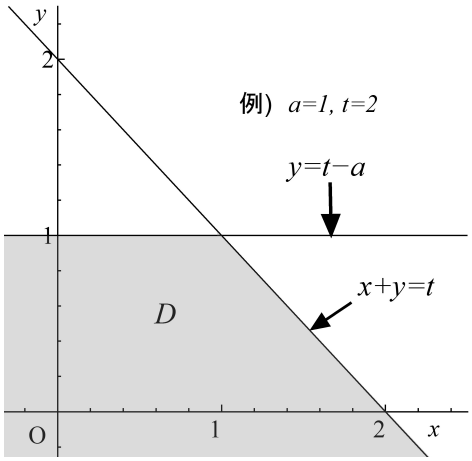


図 A·1　領域 D，$x:=E_{l-1}, y:=S_1^l, a:=(l-1)T$ とする
Fig. A·1　The area D, let $x:=E_{l-1}, y:=S_1^l, a:=(l-1)T$.

S_1^l の独立性より，領域 D 上で積分することにより

$$\begin{aligned}&F_{\max\{E_{l-1}+S_1^l,(l-1)T+S_1^l\}}(t)\\&=F_{S_1^l}(t-(l-1)T)F_{E_{l-1}}((l-1)T)\\&\quad+\int_{(l-1)T}^{\infty}F_{S_1^l}(t-x)f_{E_{l-1}}(x)dx\end{aligned} \tag{A.3}$$

を得る．式 (A.3) を式 (A.1) に代入することにより，WT_1^l の分布関数は次式となる．

$$\begin{aligned}F_{WT_1^l}(t)&=F_{S_1^l}(t)F_{E_{l-1}}((l-1)T)\\&\quad+\int_{(l-1)T}^{\infty}F_{S_1^l}(t+(l-1)T-x)f_{E_{l-1}}(x)dx\end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2　確率変数 S_1^l の分布関数の導出

ここでは予約枠 l に到着する N^l 人の予約患者の中で，C_1^{l*} より前に並ぶ予約患者の合計サービス時間 S_1^l の分布関数を求める．

$$F_{S_1^l}(t)=\frac{1}{N^l}+\sum_{j=1}^{N^l-1}\frac{1}{N^l}F_{\sum_{k=1}^{j}S_{1,k}}(t) \tag{A.5}$$

$S_{1,k}$ は次数 α_1，平均 $1/\mu_1$ のアーラン分布に従う．アーラン分布の再生性より $\sum_{k=1}^{j}S_{1,k}$ は次数 $j\alpha_1$，平均 j/μ_1 のアーラン分布に従う．したがって

$$F_{\sum_{k=1}^{j}S_{1,k}}(t)=1-e^{-\alpha_1\mu_1 t}\sum_{n=0}^{j\alpha_1-1}\frac{(\alpha_1\mu_1 t)^n}{n!} \tag{A.6}$$

となる．式 (A.6) を式 (A.5) に代入しまとめると

$$F_{S_1^l}(t)=1-\frac{e^{-\alpha_1\mu_1 t}}{N^l}\sum_{j=1}^{N^l-1}\sum_{k=1}^{j\alpha_1}\frac{(\alpha_1\mu_1 t)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{A.7}$$

となる．

© 2020 Information Processing Society of Japan

A.3　$S_{l,i}(t)$ の計算

3.4 節の式 (19) の計算を行う．

$$
\begin{aligned}
S_{l,i}(t) = &\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x)} \\
&\times (\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T-x))^{k-1} \\
&\times f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}}(x)dx \\
= &\, e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T)} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \\
&\times (\alpha_1\mu_1)^{k-1}(t+(l-1)T)^{k-1-j} \\
&\times (-1)^j \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^j e^{\alpha_1\mu_1 x} \\
&\times f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}}(x)dx \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

ここで式 (A.8) における積分が $\alpha_1\mu_1$ と $\alpha_2\mu_2$ が等しいときと異なるときで形が異なるため，次に示す．

a)　$\alpha_1\mu_1 \neq \alpha_2\mu_2$ の場合

$$
\begin{aligned}
&\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^j e^{\alpha_1\mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}}(x)dx \\
&= \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} (\alpha_2\mu_2)^{\alpha_2 i}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1)!(\alpha_2 i-1)!} \\
&\times \sum_{s=0}^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1} \binom{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1}{s} \\
&\times (-1)^s \left[\frac{\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{j+\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i-2} e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x}dx}{\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2} \right. \\
&+ \sum_{w=1}^{s+\alpha_2 i-1} (-1)^w \binom{}{s+\alpha_2 i-1}P_w \\
&\times \frac{\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{j+\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i-2-w} e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x}dx}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{1+w}} \\
&+ \left\{ \frac{(t+(l-1)T)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-s+j}}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2 i}} \right. \\
&\left. \left. - \frac{((l-1)T)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-s+j}}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2 i}} \right\} \right. \\
&\left. \times \frac{(-1)^{s+\alpha_2 i}(s+\alpha_2 i-1)!}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-s+j)} \right] \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x}dx \\
&= \int_{0}^{t+(l-1)T} x^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x}dx \\
&\quad - \int_{0}^{(l-1)T} x^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x}dx \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

である．さらに

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{t} x^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x}dx \\
&= \frac{t^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)t}}{\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2} \\
&\quad + \sum_{w=1}^{n} (-1)^w \binom{}{n}P_w \frac{t^{n-w} e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)t}}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{1+w}} \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1} n!}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{n+1}} \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x}dx \\
&= \frac{(t+(l-1)T)^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)(t+(l-1)T)}}{\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2} \\
&\quad - \frac{((l-1)T)^n e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)(l-1)T}}{\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2} \\
&\quad + \sum_{w=1}^{n} \frac{(-1)^w \binom{}{n}P_w}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{1+w}} \\
&\quad \times \{(t+(l-1)T)^{n-w} e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)(t+(l-1)T)} \\
&\quad - ((l-1)T)^{n-w} e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)((l-1)T)}\} \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

b)　$\alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2$ の場合

$$
\begin{aligned}
&\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^j e^{\alpha_1\mu_1 x} f_{\sum_{k=1}^{\sum_{l_1=1}^{l-1} N^{l_1}} S_{1,k} + \sum_{k=1}^{i} S_{2,k}}(x)dx \\
&= \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i-1)!} \\
&\quad \times \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+j-1}dx \\
&= \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i-1)!} \\
&\quad \times \frac{1}{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+j} \\
&\quad \times \{(t+(l-1)T)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+j} \\
&\quad - ((l-1)T)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+j}\} \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

したがって式 (A.8) は $\alpha_1\mu_1$ と $\alpha_2\mu_2$ が等しいときと異なるときで，それぞれ次のようになる．

a)　$\alpha_1\mu_1 \neq \alpha_2\mu_2$ の場合

$$
\begin{aligned}
S_{l,i}(t) = &\, e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T)} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \\
&\times (\alpha_1\mu_1)^{k-1}(t+(l-1)T)^{k-1-j} \\
&\times (-1)^j \left[\frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}} (\alpha_2\mu_2)^{\alpha_2 i}}{(\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1)!(\alpha_2 i-1)!} \right. \\
&\times \left. \sum_{s=0}^{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1} \binom{\alpha_1\sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-1}{s} (-1)^s \right.
\end{aligned}
$$

© 2020 Information Processing Society of Japan

$$\times \left\{ \frac{\int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{j+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i-2} e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x} dx}{\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2} \right.$$
$$+ \sum_{w=1}^{s+\alpha_2 i-1} \frac{(-1)^w {}_{(s+\alpha_2 i-1}P_w)}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{1+w}}$$
$$\times \int_{(l-1)T}^{t+(l-1)T} x^{j+\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i-2-w} e^{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)x} dx$$
$$+ \left\{ \frac{(t+(l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-s+j}}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2 i}} \right.$$
$$\left. \left. - \frac{((l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-s+j}}{(\alpha_1\mu_1-\alpha_2\mu_2)^{s+\alpha_2 i}} \right\} \right.$$
$$\left. \times \frac{(-1)^{s+\alpha_2 i}(s+\alpha_2 i-1)!}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}-s+j)} \right\} \Bigg] \tag{A.14}$$

b)　$\alpha_1\mu_1 = \alpha_2\mu_2$ の場合

$$S_{l,i}(t) = e^{-\alpha_1\mu_1(t+(l-1)T)} \sum_{j=0}^{k-1} [\binom{k-1}{j} (-1)^j$$
$$\times \frac{(t+(l-1)T)^{k-1-j}}{(\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i-1)!}$$
$$\times \frac{(\alpha_1\mu_1)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+k-1}}{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+j}$$
$$\times \{(t+(l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+j}$$
$$- ((l-1)T)^{\alpha_1 \sum_{l_1=1}^{l} N^{l_1}+\alpha_2 i+j}\}] \tag{A.15}$$

市原 寛之　（正会員）

1990 年生．2012 年南山大学数理情報学部情報システム数理学科卒業．2014 年同大学大学院博士前期課程修了．2019 年群馬大学社会情報学部研究員，博士（数理科学），日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本経営工学会各会員．

鈴木 敦夫

1958 年生．1981 年東京大学工学部計数工学科卒業．1983 年同大学大学院工学研究科計数工学専攻修士課程修了．1999 年南山大学教授，工学博士．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本経営工学会，スケジューリング学会各会員．

三浦 英俊

1967 年生．1991 年筑波大学第三学群社会工学類卒業．1996 年同大学大学院博士課程社会工学研究科修了．明海大学講師，同大学助教授を経て，2011 年南山大学教授，博士（都市・地域計画）．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本都市計画学会，地理情報システム学会各会員．

© 2020 Information Processing Society of Japan