

融資を利用した分散投資問題

田川 聖治^{1,a)} 折登 由希子²

概要：本稿では、投資のリータンが目標値を下回る確率で評価したリスクを制約条件とし、固定金利の融資で得た資金を複数のリスク資産に投資することで、リータンの目標値を最大化する分散投資問題を機会制約問題に定式化する。次に、融資が利用される金利の範囲を明らかにして、分散投資問題の解法を示す。最後に、東証 33 業種を対象とした業種別インデックス投資において、提案法の有効性を確認する。

Diversified Investment Problem using Loan

TAGAWA KIYOHARU^{1,a)} ORITO YUKIKO²

1. はじめに

超低金利時代において、限られた富裕層のみならず、将来に不安を抱く多くの人々が、株式などリスク資産に高い関心を持っている [1]。超低金利時代では融資の金利も低いため、それを利用したリスク資産への投資には現実性がある。例えば、不動産担保（自宅、遊休地など）は融資の審査が通る可能性が高く、資金の使途も自由である。

先行研究 [2] では、金利の低い融資を利用することで、投資のリータンが増えることを示した。一方、金利が低いと貸し手は儲からず、金利の高い融資は利用されない。

本稿では、先行研究の内容を発展させ、借り手と貸し手の双方に有益となる融資の金利の範囲を明らかにする。

2. 分散投資問題の定式化

2.1 ポートフォリオの定義

資産数 n で 1 期間のポートフォリオを組む。資産 i への投資比率を $x_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, n$ とすると、

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \quad (1)$$

となる。また、空売りは禁止して $0 \leq x_i$ とする。

¹ 近畿大学 理工学部

School of Science and Engineering,
Kindai University, Higashi-Osaka 577-8502 Japan

² 広島大学 大学院社会科学部

Graduate School of Social Sciences,
Hiroshima University, Higashi-Hiroshima 739-8525 Japan

^{a)} tagawa@info.kindai.ac.jp

本稿では、ポートフォリオを n 個の資産への投資比率 $x_i \in \mathcal{R}$ のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ で表現する。

資産 i の収益率 $\xi_i \in \mathcal{R}$ は、正規分布に従う確率変数としてモデル化できる [3]。本稿でも、収益率 $\xi_i \in \mathcal{R}$ は、以下のような平均 μ_i で分散 σ_i^2 の正規分布に従うとする。

$$\xi_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2) \quad (2)$$

式 (2) の収益率 $\xi_i \in \mathcal{R}$ のベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{R}^n$ は、以下のような平均を $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{R}^n$ 、共分散行列を $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ とした多変量の正規分布に従う。

$$\boldsymbol{\xi} \sim \text{Normal}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) \quad (3)$$

ポートフォリオ $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ によるリターンは

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x} \quad (4)$$

となる。

ここで、式 (3) の $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{R}^n$ は確率変数であるため、リターン $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}$ も確率変数となる。さらに、正規分布の線形性から、 $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}$ は以下の正規分布に従う。

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \text{Normal}(\mu_r(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x})) \quad (5)$$

式 (5) の正規分布の平均（期待値）は

$$\mu_r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} \quad (6)$$

である。また、式 (5) の正規分布の分散は

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathbf{C} \mathbf{x}^T \quad (7)$$

である。

2.2 分散投資の機会制約問題

式 (5) のリターンが与えられた目標値 γ_0 を下回る確率を任意の危険率 α で制限し、目標値 γ_0 を最大化する分散投資は、以下のような機会制約問題に定式化できる [4]。

$$\begin{cases} \max & \gamma_0 \\ \text{sub. to} & \Pr(r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma_0) \leq \alpha, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

ただし、リスクの範囲は $\alpha \in (0, 0.5]$ とする。

2.3 融資を利用した分散投資問題

自己資金に対する融資額の比率を $x_0 \in \mathbb{R}$ とする。また、融資の上限は自己資金の m 倍までとする。そこで、融資比率 $x_0 \in \mathbb{R}$ を加味したポートフォリオの制約条件は

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ -m \leq x_0 \leq 0, 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

となる。また、融資比率 $x_0 \in \mathbb{R}$ は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ から

$$x_0 = 1 - \mathbf{1} \mathbf{x}^T \quad (10)$$

である。ただし、 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ とする。

融資の金利を $L \in \mathbb{R}$, $L \geq 0$ とする。融資を利用した投資のリターンは、式 (4) と式 (10) から

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + L x_0 \\ &= \boldsymbol{\xi} \mathbf{x}^T + L (1 - \mathbf{1} \mathbf{x}^T) \\ &= (\boldsymbol{\xi} - L \mathbf{1}) \mathbf{x}^T + L \end{aligned} \quad (11)$$

となり、 $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}$ は以下の正規分布に従う。

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \text{Normal}(\mu_g(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x})) \quad (12)$$

式 (12) の正規分布の平均 (期待値) は

$$\mu_g(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\mu} - L \mathbf{1}) \mathbf{x}^T + L \quad (13)$$

である。また、分散 $\sigma^2(\mathbf{x})$ は式 (7) となる。

式 (9) の制約条件から、式 (10) で求まる融資比率 x_0 を消去すると、融資を利用した分散投資問題は

$$\begin{cases} \max & \gamma \\ \text{sub. to} & \Pr(g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \leq \alpha, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq m + 1, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (14)$$

となる。ただし、リターンの目標値は γ とする。

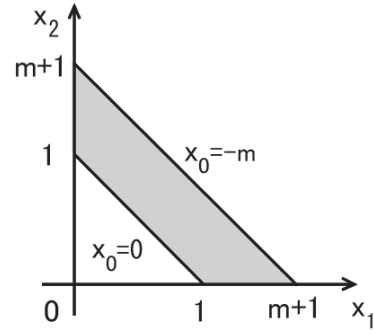


図 1 式 (17) の分散投資問題の実行可能領域

3. 分散投資問題の解法

3.1 分散投資問題の等価問題

以下のように式 (12) の $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ を標準化する。

$$\Pr\left(\frac{g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mu_g(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})} \leq \frac{\gamma - \mu_g(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}\right) \leq \alpha \quad (15)$$

式 (15) は標準正規分布の分布関数を Φ とすると、

$$\Phi\left(\frac{\gamma - \mu_g(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}\right) \leq \alpha \quad (16)$$

となる。このため、式 (14) の等価問題は

$$\begin{cases} \max & \gamma(\mathbf{x}) = \mu_g(\mathbf{x}) + \Phi^{-1}(\alpha) \sigma(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq m + 1, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (17)$$

となる。 γ の値は $\mathbf{x}$ に依存するため $\gamma(\mathbf{x})$ と表記する。

図 1 に資産数 $n = 2$ の場合における式 (17) の分散投資問題の実行可能領域 (灰色の部分) を示す。融資を利用しない解 (ポートフォリオ) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は、融資比率が $x_0 = 0$ であり、超平面 $\mathbf{1} \mathbf{x}^T = 1$ 内に存在する。一方、融資を上限まで利用する解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は、融資比率が $x_0 = -m$ であり、超平面 $\mathbf{1} \mathbf{x}^T = m + 1$ 内に存在する。

定理 1 式 (17) の分散投資問題は凸計画問題である。

証明 1 参考文献 [2] の定理 1 より、式 (17) の目的関数 $\gamma(\mathbf{x})$ は凸関数である。さらに、式 (17) の制約条件は線形であるため、実行可能領域は凸集合となる。したがって、式 (17) の分散投資問題は凸計画問題である。□

3.2 有効な融資金利の範囲

金利の低い融資は利用されるが、金利の高い融資は利用されない。そこで、融資が利用される金利の範囲を考える。まず、式 (8) に示した融資を利用しない分散投資問題の等価問題は、式 (15) と同様に $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ を標準化すると、

$$\begin{cases} \max & \gamma_0(\mathbf{x}) = \mu_r(\mathbf{x}) + \Phi^{-1}(\alpha) \sigma(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (18)$$

となる。定理 1 から、式 (18) も凸計画問題である。

定理 2 式 (18) の融資を利用しない分散投資問題の最適解を $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ とする。金利 L を式 (19) の範囲で与えると、式 (17) の分散投資問題の最適解は融資を利用する。

$$\bar{L}(\alpha) > L \geq 0 \quad (19)$$

ただし、金利 L の上限を $\bar{L}(\alpha) = \gamma_0(\mathbf{x}^*)$ とする。

証明 2 融資を利用しない分散投資問題の最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ に対して、新たな解 $\hat{\mathbf{x}} = \kappa \mathbf{x}^*$, $\kappa > 0$ を考える。新たな解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ による式 (10) の融資比率 $x_0 \in \mathbb{R}$ は

$$x_0 = 1 - \mathbf{1} \hat{\mathbf{x}} = 1 - \kappa \mathbf{1} \mathbf{x}^* = 1 - \kappa < 0 \quad (20)$$

であり、新たな解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ は融資を利用する。ここで、解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ のリターンは、式 (13) と $\mathbf{1} \mathbf{x}^{*T} = 1$ より

$$\begin{aligned} \gamma(\hat{\mathbf{x}}) &= (\boldsymbol{\mu} - L \mathbf{1}) \hat{\mathbf{x}}^T + L + \Phi^{-1}(\alpha) \sigma(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \kappa (\boldsymbol{\mu} - L \mathbf{1}) \mathbf{x}^{*T} + L + \kappa \Phi^{-1}(\alpha) \sigma(\mathbf{x}^*) \\ &= \kappa \gamma_0(\mathbf{x}^*) + L(1 - \kappa) \end{aligned} \quad (21)$$

となる。解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ と $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ のリターンの差 ε_0 は

$$\varepsilon_0 = \gamma(\hat{\mathbf{x}}) - \gamma_0(\mathbf{x}^*) = (\kappa - 1)(\gamma_0(\mathbf{x}^*) - L) \quad (22)$$

となる。式 (19) の範囲で金利 L が与えられるなら $\varepsilon_0 > 0$ となり、解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ の方がリターンは大きくなる。□

式 (18) の分散投資問題の最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ は、指定された危険率 α に依存することに注意されたい。また、式 (18) のリターンが $\gamma_0(\mathbf{x}^*) \leq 0$ なら、投資を行う意味はない。

定理 3 式 (17) の分散投資問題の最適解が融資を利用するとき、融資は上限まで利用され、その最適解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ による式 (10) の融資比率は $x_0 = -m$ となる。

証明 3 定理 2 より、 $\gamma(\mathbf{x}) > \gamma_0(\mathbf{x}^*)$ となる式 (17) の分散投資問題の実行可能解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在する。そこで、新たな解 $\hat{\mathbf{x}} = \kappa \mathbf{x}$, $\kappa > 0$ を考える。式 (10) から、解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ の融資比率 x_0 と解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ の融資比率 $\hat{x}_0$ の関係は

$$\hat{x}_0 = 1 - \mathbf{1} \hat{\mathbf{x}}^T < 1 - \mathbf{1} \mathbf{x}^T = x_0 < 0 \quad (23)$$

となり、新たな解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ の方が多くの融資を受けている。また、解 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ のリターンの差 ε は

$$\varepsilon = \gamma(\hat{\mathbf{x}}) - \gamma(\mathbf{x}) = (\kappa - 1)(\gamma(\mathbf{x}) - L) \quad (24)$$

となる。リターンの差 ε を係数 κ で微分すると、

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa} = (\gamma(\mathbf{x}) - L) \quad (25)$$

となる。式 (19) の範囲で金利 L が与えられるなら、

$$\gamma(\mathbf{x}) > \gamma_0(\mathbf{x}^*) > L \quad (26)$$

である。すなわち、式 (24) のリターンの差 ε は係数 κ に比例して大きくなる。したがって、解 $\hat{\mathbf{x}} = \kappa \mathbf{x}$ のリターン

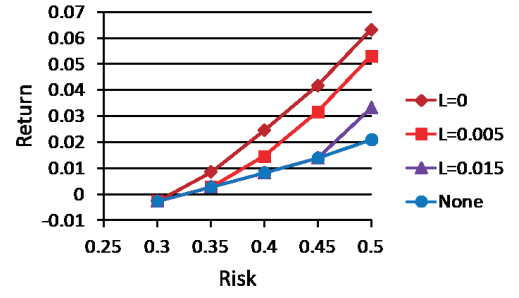


図 2 金利 L に対する危険率とリターンの関係

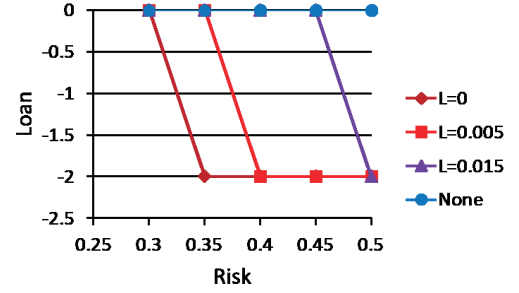


図 3 金利 L に対する危険率と融資比率の関係

は、融資を上限まで利用するとき最大となる。□

定理 3 から、金利 L が式 (19) に示した範囲で与えられるとき、式 (17) の融資を利用する分散投資問題は

$$\begin{cases} \max & \gamma(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}_g(\mathbf{x}) + \Phi^{-1}(\alpha) \sigma(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m + 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \cdots, n \end{cases} \quad (27)$$

となる。定理 1 から、式 (27) も凸計画問題である。

4. 適用例

4.1 収益率のモデル

東証 33 業種に対する業種別インデックス投資を考える。過去 5 年間 (2013 年から 2017 年) の月足データに基づく 33 業種の収益率 [5] を使用する。各収益率 $\xi_i \in \mathbb{R}$ の正規性を Shapiro-Wilk 検定 [6] で調べたところ、以下の 7 業種については「収益率は正規分布に従う」という帰無仮説が有意水準 5% で棄却され、正規性が確認できなかった。

水産・農林	ガラス・土石	医療品	化学
証券・商品先物	その他金融	建設	

今回、東証 33 業種の大半の収益率では正規性が否定されなかった。また、モデルとは過去の収益率を正確に表現するためのものではなく、将来の収益率を予測するものである。このため、東証 33 業種の全収益率を式 (3) に示した正規分布でモデル化しても支障はないと思われる。

しかし、本稿では、上記の 7 業種を除いて資産数を $n = 26$ とし、式 (3) の正規分布で収益率のモデルを構築した。

表 1 危険率 α に対する金利 L の設定

α	0.35	0.4	0.45	0.5
$\bar{L}(\alpha)$	0.0028	0.0081	0.0138	0.0210
L	0.001	0.004	0.006	0.010

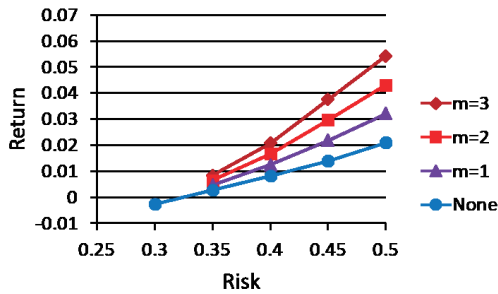


図 4 融資の上限 m に対する危険率とリターンの関係

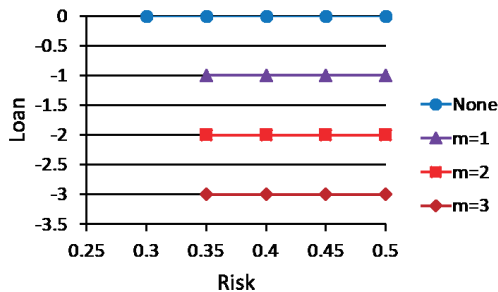


図 5 融資の上限 m に対する危険率と融資比率の関係

4.2 分散投資問題に対する最適化手法

各分散投資問題の求解には、MATLAB の最適化ツール [7] から、凸計画問題に有効な内点法を使用した。また、内点法の探索性能を向上させるため、各分散投資問題の目的関数の勾配ベクトルを解析的に導出して利用した。

式 (17) と式 (27) の目的関数の勾配ベクトルは

$$\nabla \gamma(x) = (\mu - L \mathbf{1}) + \Phi^{-1}(\alpha) \frac{x C}{\sqrt{x C x^T}} \quad (28)$$

となり、式 (18) の目的関数の勾配ベクトルは

$$\nabla \gamma_0(x) = \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \frac{x C}{\sqrt{x C x^T}} \quad (29)$$

となる。さらに、内点法で得られた解 $x \in \mathcal{R}^n$ の最適性は、最適解が以下の何れかを満たすことから確認した [8]。

- $\nabla \gamma(x) = \mathbf{0}$ ，または、 $\nabla \gamma_0(x) = \mathbf{0}$ である。
- 活性的な制約条件が存在する。

4.3 融資による効率的フロンティアの改善

式 (17) の分散投資問題において、融資の金利を $L = 0$ ， $L = 0.005$ ， $L = 0.015$ とし、融資の上限を $m = 2$ とした。図 2 に危険率 α を変えて得られたポートフォリオに対するリターンを示す。図 2 には融資を利用しない式 (18) の分散投資問題におけるリターン (None) も示す。図 2 はリス

クとリターンのトレードオフの関係を示した効率的フロンティア [9] と同等である。図 2 から、融資を利用することで、効率的フロンティアが改善することが確認できる。

図 2 の各解 $x \in \mathcal{R}^n$ における融資比率 $x_0 \in \mathcal{R}$ を図 3 に示す。図 3 から、金利 L が低い場合は $x_0 = -m$ であり、融資が上限まで利用される。一方、金利 L が高く危険率 α が小さい場合は $x_0 = 0$ であり、融資は利用されない。

4.4 金利の調整による融資の活用

図 2 に示した融資を利用しない場合のリターン (None) から、各危険率 α に対する金利の上限 $\bar{L}(\alpha) = \gamma_0(x^*)$ を求めた。表 1 に金利の上限 $\bar{L}(\alpha)$ と選択した金利 L を示す。 $\alpha = 0.3$ では $\gamma_0(x^*) < 0$ から投資は無意味である。

式 (27) の分散投資問題において、融資の上限を $m = 1$ ， $m = 2$ ， $m = 3$ とし、表 1 の金利 L を使用した。図 4 に各危険率 α と金利 L の下で得られたポートフォリオに対するリターンを示す。図 4 から、金利が同じでも融資の上限が大きいくほど効率的フロンティアが改善している。

図 4 の各解 $x \in \mathcal{R}^n$ における融資比率 $x_0 \in \mathcal{R}$ を図 5 に示す。図 5 から、危険率 α の大きさに関わらず $x_0 = -m$ であり、融資が上限まで利用されることが確認できる。

5. おわりに

本稿では、融資を利用した分散投資問題を機会制約問題に定式化するとともに、融資が利用される金利 L の範囲を明らかにした。また、分散投資問題の解法を示した。

今後の課題は、以下の通りである。

- 定理 2 が示す金利 L の範囲から、妥当な金利 L を決めるためのシステムティックな手法を考案する。
- 収益率に正規性が認められない資産を含むポートフォリオを対象とした分散投資について検討する。

参考文献

- [1] 日本証券業協会：個人投資家の証券投資に関する意識調査，入手先 (<http://www.jsda.or.jp/>) (参照 2019-12-13)。
- [2] 田川聖治：銀行預金と銀行融資を利用した機会制約ポートフォリオ最適化問題の適応型差分進化に基づく解法，情報処理学会論文誌・数理モデル化と応用，Vol. 12, No. 2, pp. 59–68 (2019)。
- [3] Luenberger, D. G.: *Investment Science, International Edition*, Oxford University Press (2009)。
- [4] Kataoka, S.: A stochastic programming model, *Econometrica*, Vol. 31, No. 1-2, pp. 181–196 (1963)。
- [5] 株式会社ミカブ・ジ・インフォノイド：株式の銘柄探索サイト，<https://kabutan.jp/>。
- [6] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B.: An analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika*, Vol. 52, No. 3/4, pp. 591–611 (1965)。
- [7] López, C. P.: *MATLAB Optimization Techniques*, Springer (2014)。
- [8] 坂和正敏，西崎一郎：数理計画法入門，共立出版 (2004)。
- [9] 枇々木規雄：金融工学と最適化，朝倉書店 (2001)。