Vol.2020-AL-176 No.7
2020/1/30

単位円グラフのL(2,1)-ラベリングのための8近似アルゴリズム

小野 廣隆[1,a)]　山中 寿登[†1,b)]

概要：グラフの $L(2,1)$-ラベリングは，距離 2 以内の頂点間のラベル値に制約が課されたラベル付けであり，特に使用ラベル範囲の最小化問題は無線周波数割当に応用がある．単位円グラフは平面上に配置された単位円の集合を頂点とみなし，重なりがある単位円同士に辺を引いて作られるグラフである．本発表では単位円グラフの $L(2,1)$-ラベリングに対する 8 近似アルゴリズムを提案する．

1. はじめに

与えられたグラフの頂点への非負整数の割り当てをラベリングという．特に, 任意の頂点 u, v に対して, u と v が隣接するとき $|\ell(u) - \ell(v)| \geq 2$ を, u と v の距離が 2 のとき $\ell(u) \neq \ell(v)$ を満たすような, 頂点への非負整数の割り当て ℓ を $L(2,1)$-ラベリングという．本論文で扱う $L(2,1)$-ラベリング問題とは, 割り当て ℓ のラベル値の範囲 (つまり $\max_{u \in V}(\ell(u)) - \min_{u \in V}(\ell(u)) + 1$) を最小化するものである．

この問題の背景として無線の周波数割り当て問題がある [1], [2]. 無線の基地局 A, B, C があったとして, A と B, B と C はそれぞれ交信しているとする．また, A と C は直接的な交信はないとする．このような場合, A と B, B と C は交信するために十分離れた周波数を使用しなければならない．また, B における混信を避けるため, 直接交信しない A と C も異なる周波数を使用する必要がある．基地局を頂点とみなし, 直接交信している基地局間に辺を結ぶことで, このような状況をグラフとしてモデル化することができる．直接交信している場合を (直接辺で結ばれていることを意味する) 距離 1, 直接的な交信はないが, 一つの基地局のみを介して交信する場合を (辺を 2 本たどることで結ばれていることを意味する) 距離 2 とみなすことで, 無線の周波数割り当て問題を $L(2,1)$-ラベリング問題として定式化することができる．

この問題は一般には NP 困難 [3] であり, 対象とするグラフを最大次数 4 の平面グラフに限定したとしても NP 困難である [4]. さらに直並列グラフに限定しても NP 困難であるが [5], 外平面グラフに対しては多項式時間アルゴリズムが [6], 木グラフに対しては線形時間アルゴリズムが知られている [7].

また, 本論文で扱う単位円グラフに対する $L(2,1)$-ラベリング問題は, 単位円グラフに対する $L(1,1)$-ラベリング問題が NP 困難であることから [8], NP 困難であると予想されており, Fiala らによって 12-近似アルゴリズム, 10.6-近似アルゴリズムが提案されている [9].

本論文ではこの問題に対する 8-近似アルゴリズムを提案する．提案アルゴリズムは Fiala らの 12-近似アルゴリズムと同様の分割統治法に基づくが, Fiala らのアルゴリズムが平面を短冊状に分割するのに対し, 提案アルゴリズムでは平面を正方形のブロック状に分割する．それに加え, ラベリングスパンの下界に注目し, 下界に応じて 2 種類のラベリング手法を使い分けることにより, 提案アルゴリズムは近似率を 8 まで改善する．

本アルゴリズムの基本的な枠組みは, 同じ著者らによる [10] で提案された 116/13-近似アルゴリズムで使用されているものと同一である．近似率の改善は, 分割統治法で使用するラベル値の集合をより良いものに改善することによって達成されている．

以下では 2 節で単位円グラフや $L(2,1)$-ラベリングなど関連する用語, 基礎的な結果について説明し，3 節で提案アルゴリズムの詳細を説明する．

2. 準備

2.1 単位円グラフ

D をユークリッド平面上の円盤の集合とする．全ての円

1　名古屋大学大学院情報学研究科
〒 464–8601，名古屋市千種区不老町
†1　現在，構造計画研究所
a)　ono@nagoya-u.jp
b)　hisato-yamanaka@kke.co.jp

盤はその中心の位置と直径の値によって定義される．D の円盤からなる交差グラフ G を円グラフと呼び, D をその円盤表現と呼ぶ．D の円盤の直径の値に関して, 最大のものを d_{max}, 最小のものを d_{min} とし, d_{max}/d_{min} の値を D の直径比率と呼び, $\rho(D)$ と定義する．ρ を定数とし, 直径比率 $\rho(D) \in (1, \rho]$ となるような円盤表現 D が存在するとき円グラフ G を ρ-円グラフと呼ぶ．$\rho(D) = 1$ のとき, グラフ G のことを単位円グラフと呼ぶ [9]．本論文では, 便宜上, 単位円盤の直径の値を 1 とする．

定義より, 円盤表現からグラフを構成することは容易であるが, その逆は自明ではない．実際には, 単位円グラフの認識問題は NP 困難であることが知られている [11]．しかしながら, 本研究の背景として周波数割り当て問題があり, 基地局からの通信可能範囲は入力として与えられる．ゆえに, 本研究においては基地局からの通信可能範囲を円盤表現と見ることができるため, グラフ表現または円盤表現が与えられるものとする．以上より, 本研究では単位円グラフは頂点の座標データとともに, その隣接リストの形で与えられるものとする．

2.2 $L(2,1)$-ラベリング

本研究が対象とするグラフは無向グラフとする．与えられたグラフに対する $L(2,1)$-ラベリングを次のように定義する．

定義 1. ([7]) グラフ $G = (V, E)$ の $L(2,1)$-ラベリングとは頂点集合 $V(G)$ に対して非負整数を割り当てる関数 ℓ で以下のすべてを満たすもののことを言う：任意の頂点 u, v に対して, u と v が隣接する (u と v の距離が 1 となる) とき $|\ell(u) - \ell(v)| \geq 2$, u と v とは隣接しておらず, それぞれが共通の隣接する頂点を持つ (u と v の距離が 2 となる) とき $|\ell(u) - \ell(v)| \geq 1$．また, この 2 つの条件のことを $L(2,1)$-制約と呼ぶ．

また, グラフ G に対する $L(2,1)$-ラベリングにおいて, 使用するラベルの範囲を最小化するラベリングを最適なラベリングと呼ぶ．使用するラベルの範囲の最小値を $\sigma_{2,1}(G)$ で表し, ラベリングスパンと呼ぶ．また, 最適なラベリングをしたときのラベルの最大値を $\lambda_{2,1}(G)$ で表し, ラベリング数と呼ぶ．定義より, $\sigma_{2,1}(G) = \lambda_{2,1}(G) + 1$ である．

本論文では近似アルゴリズムを考えており, ラベルの最小値に 0 を使うため, 近似率の計算にラベリング数 $\lambda_{2,1}(G)$ を用いることはふさわしくない．したがって近似率の計算にはラベリングスパン $\sigma_{2,1}(G)$ を用いる．また, 以下では $\sigma_{2,1}(G)$ を $\sigma(G)$ で表す．

与えられたグラフ $G = (V, E)$ に対して, 頂点集合 $K \subseteq V$ の任意の 2 頂点全てが隣接しているとき, K をグラフ G のクリークと呼ぶ．また, グラフ G における最大クリークのサイズを $\omega(G)$ とする．一般に最大のクリークを求める問題は NP 困難であるが, 単位円グラフが座標により与えられたときは, その最大クリークのサイズは多項式時間で得られることが Clark と Colbourn によって示されている [12].

3. 提案アルゴリズム

この節では主結果である単位円グラフに対する $L(2,1)$-ラベリングの 8-近似アルゴリズムについて説明する．提案アルゴリズムは, 最大次数 Δ が小さいときには Chang と Kuo によるアルゴリズム ([13], [14]) を適用し，Δ が大きいときには正方形のブロック状に平面を分割したアルゴリズム (正方分割アルゴリズム) を適用するもので, それぞれの近似率が 8 以下であることを示すことができる．本論文では後者の正方分割アルゴリズムを中心に説明する．

3.1 正方分割アルゴリズム

正方分割アルゴリズムについて説明する．まず, 図 1 のように平面を一辺の長さが $\sqrt{2}/2$ の正方形 $S_{i,j}$(ただし $i = 0, 1, 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots$) に分割する (正方分割). その際, 分割する辺上には頂点が存在しないものとする (辺上に頂点が存在した場合は, 微小に軸をずらすことによりこの条件を満たすようにすることができる).

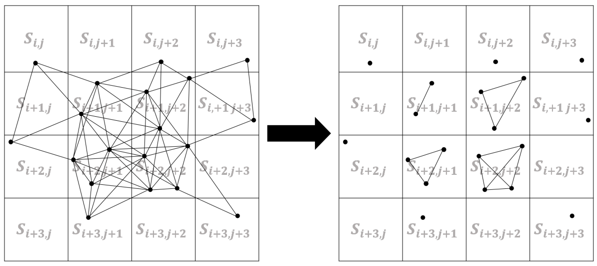
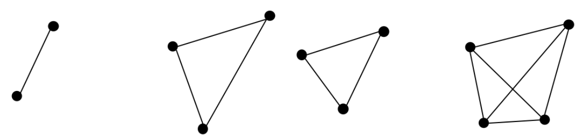


図 1: 正方分割

次に, $G_{i,j}$ を正方形 $S_{i,j}$ 上の square-UDG として, $G_{i,j}$ に対するラベリングを考える．最大クリークのサイズが ω であることと, $S_{i,j}$ の対角線の長さが 1 であることから, $G_{i,j}$ は完全グラフとなっており, 頂点数は高々 ω 個である．したがって, square-UDG に対して $L(2,1)$-ラベリングするのに必要なラベルは $0, 2, 4, 6, \ldots, 2\omega - 2$ である．

ここで, a, b をそれぞれ非負整数として, 正方形 $S_{4a,4b}$ から正方形 $S_{4a+3,4b+3}$ までの 16 個の正方形 $S_{i,j}$ を基準に再帰的にラベリングする．正方形 $S_{a+1,b+1}$ の対角線の長さが 1 であることから $G_{a,b}$ の全頂点と $G_{a+2,b+2}$ の全頂点とのユークリッド距離は全て 1 よりも大きくなる．し



(a) $G_{i+1,j+1}$ (b) $G_{i+1,j+2}$ (c) $G_{i+2,j+1}$ (d) $G_{i+2,j+2}$

図 2: 図 1 の Square-UDG

たがって頂点間の距離は 2 よりも大きくなり, $G_{a,b}$ に対して $0, 2, 4, 6, \ldots, 2\omega - 2$ でラベリングしたとき, $G_{a+2,b+2}$ に対しては $1, 3, 5, 7, \ldots, 2\omega - 1$ でラベリングすることが可能となる．同様に距離に注目すると, $G_{a,b}$ の全頂点と $G_{a+4,b}(G_{a,b+4})$ の全頂点とのユークリッド距離は全て 2 よりも大きくなる．したがって頂点間の距離は 3 よりも大きくなり, $G_{a,b}$ に対して $0, 2, 4, 6, \ldots, 2\omega - 2$ でラベリングしたとき, $G_{a+4,b}(G_{a,b+4})$ に対しても $0, 2, 4, 6, \ldots, 2\omega - 2$ でラベリングすることが可能となる．

以上を踏まえ, 以下では与えられたインスタンスに対する σ の下界の値に応じた 2 つのラベリングを提案する．

まず, 2ω が σ の下界となるインスタンスの特徴付けを行う．

補題 1. 独立したサイズ ω のクリーク K_ω, K'_ω があったとき, K_ω の全ての頂点との距離が 2 以下となる頂点が K'_ω に存在するならば, 2ω は σ の下界である．

証明. まず, サイズ ω のクリークに対して $L(2,1)$-ラベリングを行うとき, $2\omega - 1$ が下界となるためには ω 個のラベル $0, 2, 4, 6, \ldots, 2\omega - 2$ を各頂点に割り当てなければならない．このとき, K_ω の全ての頂点との距離が 2 以下となる頂点 x が K'_ω に存在するならばその頂点は距離 2 の制約から $0, 2, 4, 6, \ldots, 2\omega - 2$ をラベリングすることが不可能となる．また, x を除く $\omega - 1$ 個の全ての頂点に対しては少なくとも $0, 2, 4, 6, \ldots, 2\omega - 4$ のラベルが割り当てられているため, x に対する最小のラベルは $2\omega - 1$ となる．したがってこの場合の解は 2ω となり, これを部分グラフとして含むグラフに対する $L(2,1)$-ラベリングの下界は 2ω となる． □

この結果から 2ω が σ の下界でないならば, クリーク K_ω のある頂点からの距離が 3 以上の頂点がクリーク K'_ω の頂点の中に少なくとも 1 つ存在することがわかる．

これをもとに, インスタンスの下界が 2ω 以上の場合には 3.1.1 節の基本ラベリングを, インスタンスの下界が $2\omega - 1$ の場合には 3.1.2 節の 2 段階ラベリングを用いる．

基本ラベリング, 2 段階ラベリングともに, ラベルセットをそれぞれ定義し, 各 $S_{i,j}$ に割り当てる．それにともない, ラベルセットを各 $S_{i,j}$ に割り当てるための関数 $f(i,j)$ を式 (1) のように定義する．

$$f(i,j) = \begin{cases} j \pmod 4 & i \equiv 0 \pmod 4, \\ j \pmod 4 + 4 & i \equiv 1 \pmod 4, \\ \overline{j+2 \pmod 4} & i \equiv 2 \pmod 4, \\ \overline{j+2 \pmod 4 + 4} & i \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \quad (1)$$

3.1.1 基本ラベリング

基本ラベリングの概要として, まず始めに square-UDG の全ての頂点に対してラベルセットを用いてラベリングを行う．ここで, 一度のラベリングでは $L(2,1)$-制約を満たさない可能性があるので, その場合には適切にラベルを入れ替える操作を行い, ラベリングを終了する．

以下では基本ラベリングを行うアルゴリズムについて説明する．まず $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ として, ラベルセット $L_B(a) = \{2\omega a, 2\omega a + 2, \ldots, 2\omega a + 2\omega - 2\}$ とラベルセット $L_B(\overline{a}) = \{2\omega a + 1, 2\omega a + 3, \ldots, 2\omega a + 2\omega - 1\}$ を定義する．表 1 はラベルセットを表の形でまとめたものである．

これをもとに, 各 $G_{i,j}$ にラベルセット $L_B(f(i,j))$ を割り当て, $G_{i,j}$ 上の全ての頂点をラベリングする．このとき, $L_B(a)$ は大きいラベルから, $L_B(\overline{a})$ は小さいラベルから順に割り当てていく．$G_{i,j}$ の頂点数が ω である場合, ラベルセットのラベルをただ割り当てただけでは $L(2,1)$-制約を満たさないことがありうるが, 命題 2 で示すように適切にラベルの再割り当てを行うことで $L(2,1)$-制約を満たした割り当てにすることが可能である．

補題 2 は基本ラベリングの正当性を示している．

補題 2. 基本ラベリングを行うアルゴリズムが出力するラベリングは $L(2,1)$-制約を満たしており, 16ω は使用ラベル数の上界である．

証明. $G_{i,j}$ の頂点数は高々 ω であり, 各ラベルセットは偶数のみまたは奇数のみからなるラベルが ω 個用意されているので, ラベルセットのラベルを $G_{i,j}$ に割り当てられることは自明である．したがって, ここで証明すべきことは任意の 2 つの square-UDG へのラベルがそれぞれ $L(2,1)$-制約を満たしているかどうかである．

式 (1) によって square-UDG にどのラベルセットを割り当てるか決まるが, これの位置関係を表したものが図 3 である．$L_B(0)$ と $L_B(\overline{0})$ に注目してみると図 4 のように $L_B(0)$ 同士のユークリッド距離は $3\sqrt{2}/2$ で 2 よりも大きく, $L_B(0)$ と $L_B(\overline{0})$ とのユークリッド距離は 1 である．これにより $L_B(a)$ 同士のグラフの距離は必ず 3 以上となるので同じラベルを用いても大丈夫であり, $L_B(a)$ と $L_B(\overline{a})$ とのグラフの距離は 2 以上となるので $L_B(a)$ と $L_B(\overline{a})$ のラベルは 1 ずつ異なるものを使っているので大丈夫である．

次に, $L_B(1)$ の最小ラベル 2ω と $L_B(\overline{0})$ の最大ラベル $2\omega - 1$ の関係性について考える．$L_B(1)$ と $L_B(\overline{0})$ に関しては先ほどのように, ユークリッド距離の観点で見ると $L(2,1)$-制約を満たさない可能性が出てくる．ここで $G_{i,j}$ の頂点数と最大クリークサイズ ω の関係性について考える．$L_B(1)$ を割り当てた $G_{i,j}$ において, ラベル 2ω を使用するということは, $L_B(1)$ のラベルは大きい数からラベルを使用するはずなので, $G_{i,j}$ の頂点数が ω であることを示している．同様に $L_B(\overline{0})$ を割り当てた $G_{i',j'}$ において, ラベル $2\omega - 1$ を使用するということは, $L_B(\overline{0})$ のラベルは小さい数からラベルを使用するはずなので, $G_{i',j'}$ の頂点数も ω であることを示している．また, ラベル 2ω と $2\omega - 1$ が

表 1: 基本ラベリングのラベルセット

ラベルセット	ラベル	ラベルセット	ラベル
$L_B(0)$	$0, 2, \ldots, 2\omega - 2$	$L_B(\bar{0})$	$1, 3, \ldots, 2\omega - 1$
$L_B(1)$	$2\omega, 2\omega + 2, \ldots, 4\omega - 2$	$L_B(\bar{1})$	$2\omega + 1, 2\omega + 3, \ldots, 4\omega - 1$
$L_B(2)$	$4\omega, 4\omega + 2, \ldots, 6\omega - 2$	$L_B(\bar{2})$	$4\omega + 1, 4\omega + 3, \ldots, 6\omega - 1$
$L_B(3)$	$6\omega, 6\omega + 2, \ldots, 8\omega - 2$	$L_B(\bar{3})$	$6\omega + 1, 6\omega + 3, \ldots, 8\omega - 1$
$L_B(4)$	$8\omega, 8\omega + 2, \ldots, 10\omega - 2$	$L_B(\bar{4})$	$8\omega + 1, 8\omega + 3, \ldots, 10\omega - 1$
$L_B(5)$	$10\omega, 10\omega + 2, \ldots, 12\omega - 2$	$L_B(\bar{5})$	$10\omega + 1, 10\omega + 3, \ldots, 12\omega - 1$
$L_B(6)$	$12\omega, 12\omega + 2, \ldots, 14\omega - 2$	$L_B(\bar{6})$	$12\omega + 1, 12\omega + 3, \ldots, 14\omega - 1$
$L_B(7)$	$14\omega, 14\omega + 2, \ldots, 16\omega - 2$	$L_B(\bar{7})$	$14\omega + 1, 14\omega + 3, \ldots, 16\omega - 1$

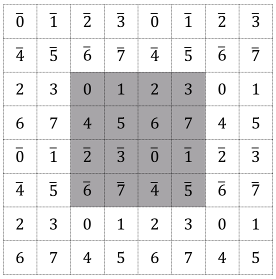


図 3: ラベルセット同士の位置関係

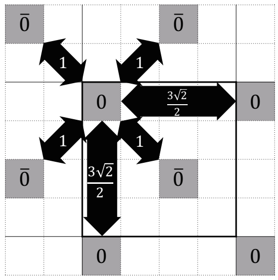


図 4: $L(0)$ と $L(\bar{0})$ のユークリッド距離

$L(2,1)$-制約を満たさないのはグラフの距離が 1 である場合のみである．

ここで, $L_B(\bar{0})$ のラベルの割り当てを固定して, $L_B(1)$ のラベルの再割り当てを考える．$L_B(1)$ のラベルの割り当てにおいて, ラベル 2ω を使えないものと仮定すると, $L_B(\bar{0})$ で $2\omega - 1$ のラベルを割り当てた頂点からのグラフの距離が $L_B(1)$ を割り当てた $G_{i,j}$ の頂点すべてと 1 になる．しかし, これは頂点数 $\omega + 1$ のクリークが存在するということになり, 最大クリークサイズ ω に矛盾する．したがって $L_B(\bar{0})$ で $2\omega - 1$ のラベルを割り当てた頂点からのグラフの距離が 2 以上となる頂点が $L_B(1)$ を割り当てた $G_{i,j}$ の頂点の中に少なくとも 1 つ存在することがわかる．ゆえに, この $2\omega - 1$ のラベルを割り当てた頂点からのグラフの距離が 2 以上となる頂点に 2ω のラベルを割り当てればよいということである．

このような関係は $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ として $L_B(a)$ の最小ラベルと $L_B(\overline{a-1})$ の最大ラベルで見られるが, 一方の割り当てを固定した上で, もう一方の再割り当てが可能であることは先ほどと同様に示すことができるので, ユークリッド平面上で上から下にかけて再割り当てをしていくことが可能となる．したがって全体として $L(2,1)$-制約を満たすような割り当てが可能となる．

このアルゴリズムの最小ラベルは 0, 最大ラベルは $16\omega - 1$ であることから 16ω が使用ラベル数の上界となる． □

以上をまとめると基本ラベリングは次のアルゴリズムによって実行される． アルゴリズム中の G_i は $G_i = G_{i,0} \cup G_{i,1} \cup \cdots$ であるものとする． ただし, このアルゴリズムは square-UDG に対するラベリングのアルゴリズムであり, 全体のアルゴリズムはこの章の最後に記述する．

Algorithm 1 基本ラベリング

1: 各 $G_{i,j}$ にラベルセット $L_B(f(i,j))$ を割り当てる．
2: $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ として, $L_B(a)$ は大きいラベルから, $L_B(\bar{a})$ は小さいラベルから順に各 $G_{i,j}$ のすべての頂点へとラベルセットのラベルを割り当てる．
3: 4 の操作を $k = 2$ で実行し, その後, k の値を 1 ずつ増やして繰り返し実行する．k の値が $k = \max i + 1$ となったとき実行不可能となり終了．
4: G_k の頂点で $L(2,1)$-制約を満たさないようなラベルを割り当てられた頂点が存在したとき, G_{k-2} と G_{k-1} に割り当てられたラベルに対して $L(2,1)$-制約を満たすように $G_{k,j}$ 内でラベルの再割り当てをする．

3.1.2 2 段階ラベリング

2 段階ラベリングの概要として, まず始めに square-UDG の中で頂点数が ω 個あるもののみに対して, それぞれ 1 つずつ選択する．その選択した頂点に対しては 4 個のラベルを $L(2,1)$-制約を満たすように割り当てる．$L(2,1)$-制約を満たすように割り当てができない場合, 頂点の再選択を行い, ラベルを割り当てる．$L(2,1)$-制約を満たす頂点の再選択ができない場合は 2ω が下界となるため, 基本ラベリングを実行する．4 個のラベルの割り当てを実行したのち, 各 square-UDG にはラベリングされていない頂点が高々 $\omega - 1$ 個しかないので, 基本ラベリングと同様にラベルセットを利用して残りのすべての頂点にラベリングを行う．このとき基本ラベリングのラベルセットと異なり, 必ず $L(2,1)$-制約を満たすようなラベルセットになっているため, これでラベリングを終了する．

2段階ラベリングを行うアルゴリズムについて説明する前に, このアルゴリズムで用いる言葉の定義を行う. まず, $S_i = S_{i,0} \cup S_{i,1} \cup \cdots$ とする. 次に, $G_{i,j}$ の頂点が ω 個のときに限り選択される $G_{i,j}$ の任意の頂点を $v_{i,j}$ とする. また, S_i 上の $v_{i,j}$ の集合を V_i で表す.

以下では2段階ラベリングを行うアルゴリズムについて説明する. k を自然数として, V_i の中で j の値が k 番目に小さいものを u, $k+1$ 番目に小さいものを u' とする. u と u' の距離が2以下の場合 u' の再選択を行う. このとき, もとの u' を含む $G_{i,j}$ の中から u との距離が3以上となるよう再選択する. (ここで距離が3以上となるような u' を再選択できない場合は補題1より 2ω が σ の下界となるため基本ラベリングを用いる.) したがって, V_i の全ての頂点同士の距離が3以上に選択できたとき, 2ω は下界にならず, V_i には同一のラベルを割り当てることができる. これをもとに, 第1段階として x を正の整数, $y = 0, 1, 2, 3$ として, V_{4x+y} のすべての $v_{4x+y,j}$ に y をラベリングする.

ここで $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ として, ラベルセット $L_2(a) = \{2(\omega-1)a+5, 2(\omega-1)a+7, \ldots, 2(\omega-1)a+2\omega+1\}$ とラベルセット $L_2(\overline{a}) = \{2(\omega-1)a+6, 2(\omega-1)a+8, \ldots, 2(\omega-1)a+2\omega+2\}$ を定義する. 表2はラベルセットをリスト化したものである.

これをもとに, 第2段階として各 $G_{i,j}$ にラベルセット $L_2(f(i,j))$ を割り当て, $G_{i,j}$ 上の $v_{i,j}$ 以外の全ての頂点をラベリングする.

補題3は2段階ラベリングの正当性を示している.

補題 3. 2段階ラベリングを行うアルゴリズムが出力するラベリングは $L(2,1)$-制約を満たしており, $16\omega - 11$ は使用ラベル数の上界である.

証明. $v_{i,j}$ を除いた $G_{i,j}$ の頂点数は高々 $\omega - 1$ であり, 各ラベルセットは偶数のみまたは奇数のみからなるラベルが $\omega - 1$ 個用意されているので, ラベルセットのラベルを $v_{i,j}$ 以外の $G_{i,j}$ に割り当てられることは自明である. また, 先ほどのように $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ として $L_B(a)$ の最小ラベルと $L_B(\overline{a-1})$ の最大ラベルに関しては2離れるようにラベルセットの用意をしているのでこれに関しても割り当てられることは自明である. したがって, ここで証明すべきことは1段階目の S_i 上の $v_{i,j}$ に対して同一のラベルが割り当てれるかを示せばよい. これについてはアルゴリズムの説明にもあった通り, k を自然数として, V_i の中で j の値が k 番目に小さいものを u, $k+1$ 番目に小さいものを u' としたとき, u と u' の距離が2以下の場合, もとの u' を含む $G_{i,j}$ の中から u との距離が3以上となるよう再選択するが, ここで距離が3以上となるような u' を再選択できない場合は補題1より 2ω が σ の下界となることが示されているため, これに関しても正当性が保証されている.

このアルゴリズムの最小ラベルは0, 最大ラベルは $16\omega - 12$ であることから $16\omega - 11$ が使用ラベル数の上界となる. □

以上をまとめると2段階ラベリングは次のアルゴリズムによって実行される. ただし, このアルゴリズムも基本ラベリングを実行するアルゴリズムと同様に, square-UDG に対するラベリングのアルゴリズムである.

Algorithm 2 2段階ラベリング

1: 頂点数が ω である $G_{i,j}$ から $v_{i,j}$ を選択する.
2: 各 V_i において, すべての頂点同士の距離が3以上であるときは5へ, そうでないときは3へ進む.
3: 各 V_i において, すべての頂点同士の距離が3以上となるように $v_{i,j}$ を再選択できるときは5へ, そうでないときは4へ進む.
4: 基本ラベリングを実行し, 終了.
5: x を正の整数, $y = 0, 1, 2, 3$ として, 各 V_{4x+y} のすべての頂点にラベル y を割り当てる.
6: 各 $G_{i,j}$ にラベルセット $L_2(f(i,j))$ を割り当てる.
7: $G_{i,j}$ 上の $v_{i,j}$ 以外のすべての頂点にラベルセットのラベルを割り当て, 終了.

3.2 アルゴリズムと近似

この節では正方分割アルゴリズムと CK アルゴリズムを組み合わせたアルゴリズムを提案し, その近似率の解析を行う. 次のアルゴリズム中の V_i は3.1.2節で定義したものである.

Algorithm 3 提案アルゴリズム

1: 最大次数 Δ と最大クリークサイズ ω を求める. $\Delta \le 9$ の場合は2へ, そうでない場合は3へ進む.
2: Shao らのアルゴリズムを用いて終了.
3: 与えられた単位円グラフを square-UDG に分割する.
4: V_i の全ての頂点同士の距離が3以上に選択できたときは5へ, そうでないときは6へ進む.
5: 2段階ラベリングを実行し, 7に進む.
6: 基本ラベリングを実行し, 7に進む.
7: ラベリングされた square-UDG を組み合わせて終了.

以下ではアルゴリズムの各操作ごとの近似率の解析を行う.

line 2. $\Delta \le 9$ のときの近似率は式 (2) のようになる.

$$\frac{4\Delta^2/5 + 2\Delta + 1}{\Delta + 2} = \frac{4\Delta^2 + 10\Delta + 5}{5\Delta + 10} \le \frac{419}{55} = 7.618\cdots. \tag{2}$$

line 5. このときの下界は $\max\{2\omega - 1, \Delta + 2\}$ である. $\Delta \ge 10$ より, $\omega \le 6$ のときの近似率は式 (3) のようになる.

$$\frac{16\omega - 4}{\max\{2\omega - 1, \Delta + 2\}} \le \frac{16\omega - 4}{\Delta + 2} \le \frac{92}{12} = 7.667\cdots. \tag{3}$$

$\omega \ge 7$ のときの近似率は式 (4) のようになる.

$$\frac{16\omega - 11}{\max\{2\omega - 1, \Delta + 2\}} \le 8 - \frac{3}{2\omega - 1} \le \frac{101}{13} = 7.769\cdots. \tag{4}$$

表 2: 2 段階ラベリングのラベルセット

ラベルセット	ラベル	ラベルセット	ラベル
$L_2(0)$	$5, 7, \ldots, 2\omega + 1$	$L_2(\bar{0})$	$6, 8, \ldots, 2\omega + 2$
$L_2(1)$	$2\omega + 3, 2\omega + 5, \ldots, 4\omega - 1$	$L_2(\bar{1})$	$2\omega + 4, 2\omega + 6, \ldots, 4\omega$
$L_2(2)$	$4\omega + 1, 4\omega + 3, \ldots, 6\omega - 3$	$L_2(\bar{2})$	$4\omega + 2, 4\omega + 4, \ldots, 6\omega - 2$
$L_2(3)$	$6\omega - 1, 6\omega + 1, \ldots, 8\omega - 5$	$L_2(\bar{3})$	$6\omega, 6\omega + 2, \ldots, 8\omega - 4$
$L_2(4)$	$8\omega - 3, 8\omega - 1, \ldots, 10\omega - 7$	$L_2(\bar{4})$	$8\omega - 2, 8\omega, \ldots, 10\omega - 6$
$L_2(5)$	$10\omega - 5, 10\omega - 3, \ldots, 12\omega - 9$	$L_2(\bar{5})$	$10\omega - 4, 10\omega - 2, \ldots, 12\omega - 8$
$L_2(6)$	$12\omega - 7, 12\omega - 5, \ldots, 14\omega - 11$	$L_2(\bar{6})$	$12\omega - 6, 12\omega - 4, \ldots, 14\omega - 10$
$L_2(7)$	$14\omega - 9, 14\omega - 7, \ldots, 16\omega - 13$	$L_2(\bar{7})$	$14\omega - 8, 14\omega - 6, \ldots, 16\omega - 12$

line 6. このときの下界は $\max\{2\omega, \Delta+2\}$ である．$\Delta \geq 10$ より, $\omega \leq 6$ のときの近似率は式 (5) のようになる．

$$\frac{16\omega}{\max\{2\omega, \Delta+2\}} \leq \frac{16\omega}{\Delta+2} \leq \frac{96}{12} = 8. \tag{5}$$

$\omega \geq 7$ のときの近似率は式 (6) のようになる．

$$\frac{16\omega}{\max\{2\omega, \Delta+2\}} \leq 8. \tag{6}$$

したがって, いずれの場合も近似率は 8 以下となる．

これにより定理 1 が示された．

定理 1. 単位円グラフ G が与えられたとき, 近似率が高々 8 である $L(2,1)$-ラベリングの解を与える多項式時間近似アルゴリズムが存在する．

参考文献

[1] Hale, W. K.: Frequency assignment: Theory and applications, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 68, No. 12, pp. 1497–1514 (1980).

[2] Roberts, F. S.: T-colorings of graphs: recent results and open problems, *Discrete Mathematics*, Vol. 93, No. 2, pp. 229–245 (1991).

[3] Griggs, J. R. and Yeh, R. K.: Labelling graphs with a condition at distance 2, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 5, No. 4, pp. 586–595 (1992).

[4] Eggemann, N., Havet, F. and Noble, S. D.: k-$L(2,1)$-labelling for planar graphs is NP-complete for $k \geq 4$, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 158, No. 16, pp. 1777–1788 (2010).

[5] Fiala, J., Golovach, P. A. and Kratochvíl, J.: Distance Constrained Labelings of Graphs of Bounded Treewidth, *Automata, Languages and Programming* (Caires, L., Italiano, G. F., Monteiro, L., Palamidessi, C. and Yung, M., eds.), Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, pp. 360–372 (2005).

[6] Koller, A. E.: The frequency assignment problem, PhD Thesis, Brunel University, School of Information Systems, Computing and Mathematics (2005).

[7] Hasunuma, T., Ishii, T., Ono, H. and Uno, Y.: A linear time algorithm for $L(2,1)$-labeling of trees, *Algorithmica*, Vol. 66, No. 3, pp. 654–681 (2013).

[8] Sen, A. and Huson, M. L.: A new model for scheduling packet radio networks, *Wireless Networks*, Vol. 3, No. 1, pp. 71–82 (online), DOI: 10.1023/A:1019128411323 (1997).

[9] Fiala, J., Fishkin, A. V. and Fomin, F.: On distance constrained labeling of disk graphs, *Theoretical Computer Science*, Vol. 326, No. 1, pp. 261–292 (2004).

[10] Ono, H. and Yamanaka, H.: A 116/13-Approximation Algorithm for L(2,1)-Labeling of Unit Disk Graphs, *SOFSEM 2019: Theory and Practice of Computer Science*, Springer International Publishing, pp. 379–391 (2019).

[11] Breu, H. and Kirkpatrick, D. G.: Unit disk graph recognition is NP-hard, *Computational Geometry*, Vol. 9, No. 1, pp. 3–24 (1998).

[12] Clark, B. N., Colbourn, C. J. and Johnson, D. S.: Unit disk graphs, *Discrete Mathematics*, Vol. 86, No. 1, pp. 165–177 (1990).

[13] Chang, G. J. and Kuo, D.: The $L(2,1)$-labeling problem on graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 9, No. 2, pp. 309–316 (1996).

[14] Shao, Z., Yeh, R. K., Poon, K. K. and Shiu, W. C.: The $L(2,1)$-labeling of $K_{1,n}$-free graphs and its applications, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 21, No. 11, pp. 1188–1193 (2008).