

銀行預金と銀行融資を利用した 機会制約ポートフォリオ最適化問題の 適応型差分進化に基づく解法

田川 聖治^{1,a)}

受付日 2018年11月13日, 再受付日 2019年2月5日,
採録日 2019年3月19日

概要: 本稿では, 銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化を機会制約問題に定式化し, 新たな適応型差分進化アルゴリズム (ADEGD) を適用する. まず, ポートフォリオ最適化の定式化では, 無リスク資産である銀行預金をポートフォリオに加えるとともに, 銀行融資を利用したリスク資産への投資を認める. また, ADEGD では制約条件を満たす個体の表現方法と, 定方向突然変異を採用する. 最後に, 数値実験により, 銀行の預金と融資を利用することで, 効率的フロンティアが改善することを示す.

キーワード: ポートフォリオ最適化, 機会制約問題, 差分進化

Chance Constrained Portfolio Optimization Using Bank Deposit and Bank Loan via Adaptive Differential Evolution Based Method

KIYOHARU TAGAWA^{1,a)}

Received: November 13, 2018, Revised: February 5, 2019,
Accepted: March 19, 2019

Abstract: The portfolio optimization using bank deposit and loan is formulated as a chance constrained problem in which a non-risk asset called bank deposit is included in the portfolio and the borrowing money called bank loan can be invested in risk assets. Furthermore, a new adaptive differential evolution using directed mutation (ADEGD) is proposed and applied to the portfolio optimization problem. Experimental results show that the use of bank deposit and bank loan improves the efficient frontier of portfolio.

Keywords: portfolio optimization, chance constrained problem, differential evolution

1. はじめに

超低金利時代において, 限られた富裕層のみならず, 将来に不安を抱く多くの人々が, 株式などリスク資産に高い関心を持っている [1]. ポートフォリオとは, 金融商品の組合せのことである. また, ポートフォリオを組むとは, どのような投資信託を購入しようとか, 株式はどの銘柄を何株ほど持つか, などを検討するという意味である.

ポートフォリオの組成を決める理論は, 金融工学 [2] のきわめて重要な研究対象であり, ポートフォリオ最適化には数理計画法が広く用いられている [3]. また, 遺伝的アルゴリズム (GA: Genetic Algorithm) に代表される進化的アルゴリズム (EA: Evolutionary Algorithm) によるポートフォリオ最適化の事例も数多く報告されている [4].

EA によるポートフォリオ最適化では, 後述する平均・分散モデル [5] を基盤とし, ポートフォリオに含む資産は既定か否か, 資産の空売りを認めるか否か, 収益率は確率変数か過去のデータか, ポートフォリオの組成は1期間か多期間か, など想定の違いにより, いくつかの最適化問題

¹ 近畿大学
Kindai University, Higashi-Osaka 577-8502, Japan
^{a)} tagawa@info.kindai.ac.jp

の定式化がある。もちろん、使用する EA の種類も異なる。

たとえば、伊庭ら [6] は、リバランス（ポートフォリオの組換え）を考慮した多期間のポートフォリオ最適化に対し、GA や遺伝的プログラミングを適用している。折登らは、ポートフォリオに含める資産の選択方法を考案し、GA の初期集団の生成に導入している [7]。また、資産の空売りを認めた 1 期間のポートフォリオのレプリケーション（複製）の作成に分布推定アルゴリズムを用いている [8]。

ポートフォリオのリターンとリスクはトレードオフの関係にあるため、多目的最適化問題に定式化し、EA を適用した事例はいくつも報告されている [9], [10]。また、ポートフォリオ最適化を機会制約問題に定式化した場合は、収益率の確率分布をファジィ関数で与えるか [11], [12]、正規分布を仮定する [13]、収益率の確率分布は未知とし、過去のデータからリターンの予測区間を推定することも考えられるが、機会制約問題の解はきわめて保守的となる [14]。

上記のように、ポートフォリオ最適化には、様々な想定の下で、いくつもの定式化が存在する。ここで、NFL (No Free Lunch) 定理 [15] が示唆するように、万能な最適化手法は期待できず、効率的な最適化手法を構築するためには、問題固有の知見を活かした工夫が必要である。

本稿では、銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化を機会制約問題に定式化する [16]。次に、対象とする問題の特徴を明らかにするとともに、それらをふまえた差分進化 (DE: Differential Evolution) [17] に基づく最適化手法を提案する。最後に、数値実験により、最適化手法の性能を確認するとともに、銀行の預金と融資を利用することで、効率的フロンティアが改善することを示す。

固定金利の国債や銀行預金など、無リスク資産を含むポートフォリオ最適化は金融工学でも検討されている [2]。しかし、固定金利の融資を投資に利用するポートフォリオ最適化の定式化は、著者の知る限り報告されていない。さらに、超低金利政策によって、我が国では融資の金利も下がっており、それらの利用を想定したポートフォリオ最適化は、実用性の観点からも価値あるものと考えられる。

以降、2 章では基本的なポートフォリオ最適化を紹介する。3 章では銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化を機会制約問題に定式化した後、その等価問題を導出して特徴を明らかにする。4 章では適応型 DE に基づく最適化手法を提案する。5 章では数値実験により、提案手法の有効性を示す。6 章では本稿の結論を述べる。

2. ポートフォリオ最適化

2.1 ポートフォリオとリターン

既定の n 個の資産で 1 期間のポートフォリオを組む。資金を X とし、資産 i への投資金額を X_i , $i = 1, \dots, n$ とする。資産 i への投資比率 $x_i = X_i/X$ を考えると、

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{X} = \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (1)$$

となる。また、空売りは禁止して $x_i \geq 0$ とする。

本稿では、ポートフォリオを n 個の資産への投資比率 $x_i \in \mathcal{R}$ のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ で表現する。

資産 i の収益率 ξ_i は、式 (2) のような平均 μ_i で分散 σ_i^2 の正規分布に従う確率変数とする。平均 μ_i と分散 σ_i^2 は、過去の価格変動に関するデータから推定する [2]。

$$\xi_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2) \quad (2)$$

通常、資産 i と資産 j からの収益には相関関係がある。両者の相関係数 ρ_{ij} が $\rho_{ij} > 0$ ならば、資産 i の価格が上がると資産 j の価格も上がる。逆に $\rho_{ij} < 0$ であるならば、片方の価格が上がると他方の価格は下がる。そこで、過去のデータから n 個の資産の相関係数 ρ_{ij} を調べることで、以下のような相関行列 \mathbf{R} を求めることができる。

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ただし、相関係数は $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ である。

収益率 $\xi_i \in \mathcal{R}$ のベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{R}^n$ は、以下のような多変量の正規分布に従う確率変数となる。

$$\boldsymbol{\xi} \sim \text{Normal}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) \quad (4)$$

式 (4) の正規分布の平均は $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{R}^n$ である。また、各収益率 ξ_i の標準偏差 σ_i の対角行列を

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

とし、分散共分散行列 \mathbf{C} は以下のように得られる。

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{D} \quad (6)$$

ポートフォリオ $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ によるリターン（儲け）は

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x} \quad (7)$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{R}^n$ は確率変数であるため、リターン $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}$ も確率変数となる。さらに、正規分布の線形性から、 $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}$ は以下の正規分布に従う。

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \text{Normal}(\mu_r(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x})) \quad (8)$$

式 (8) の正規分布の平均（期待値）は

$$\mu_r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \boldsymbol{\mu} \mathbf{x}^T \quad (9)$$

である。また、式 (8) の正規分布の分散は

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathbf{C} \mathbf{x}^T \quad (10)$$

である。

2.2 最適化問題の定式化

前述のとおり、ポートフォリオ最適化には様々な定式化が存在するが、上記の想定で基本的な 3 種類を紹介する。

2.2.1 Markowitz モデル [5], [18]

平均・分散モデルとも呼ぶ。式 (10) の分散 $\sigma^2(\mathbf{x})$ で評価したポートフォリオ $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ のリスクの最小化を目的とし、式 (9) のリターン期待値に目標値 $\gamma \in \mathcal{R}$ を指定して、以下の制約条件のある 2 次計画問題に定式化する。

$$\left[\begin{array}{ll} \min & \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathbf{C} \mathbf{x}^T \\ \text{sub. to} & \mu_r(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu} \mathbf{x}^T \geq \gamma, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (11)$$

式 (11) での分散 $\sigma^2(\mathbf{x})$ の最小化は、複数の収益率の変動が相殺されてリスクが縮小することを狙っている。

2.2.2 Roy モデル [19]

分散によるポートフォリオのリスク評価は間接的であり、直感的に分かりにくい。そこで、式 (7) のリターンが与えられた目標値 γ を下回る確率を危険率 α とし、その最小化を目的として、以下の機会制約問題に定式化する。

$$\left[\begin{array}{ll} \min & \alpha \\ \text{sub. to} & \Pr(r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \leq \alpha, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (12)$$

ただし、 $\Pr(E)$ は事象 E が起きる確率である。ちなみに、目標値 γ は確率分布の分位点であり、金融機関のリスク管理に用いられる VaR (Value at Risk) に相当する。

2.2.3 Kataoka モデル [20]

Roy モデルとは目的と制約が逆になり、指定した危険率 α の下で、式 (7) のリターンの目標値 γ を最大化する。

$$\left[\begin{array}{ll} \max & \gamma \\ \text{sub. to} & \Pr(r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \leq \alpha, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (13)$$

3. 銀行を利用するポートフォリオ最適化

3.1 銀行預金と銀行融資のモデル

無リスク資産である銀行への投資比率を $x_0 \in \mathcal{R}$ とする。

銀行預金の場合は $x_0 > 0$ であり、預金金利を r_0 とする。また、銀行融資の場合は $x_0 < 0$ であり、貸出金利を \bar{r}_0 とする。ここで、銀行の金利 $r_0 \in \mathcal{R}$ は固定であり、

$$r_0 = \begin{cases} r_0 & \text{if } x_0 > 0 \\ 0 & \text{if } x_0 = 0 \\ \bar{r}_0 & \text{if } x_0 < 0 \end{cases} \quad (14)$$

となる。上記の金利の関係は $0 < r_0 < \bar{r}_0$ とする。

銀行融資の上限は自己資金の m 倍までとする。また、銀行融資はリスク資産に投資する。このため、銀行への投資比率 x_0 を加えたポートフォリオの制約条件は

$$\left(\begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ -m \leq x_0, 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (15)$$

となる。また、ポートフォリオ $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ のリターンは

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + r_0 x_0 \\ &= \boldsymbol{\xi} \mathbf{x}^T + r_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \end{aligned} \quad (16)$$

となり、 $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}$ は以下の正規分布に従う。

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \text{Normal}(\mu_g(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x})) \quad (17)$$

式 (17) の正規分布の平均 (期待値) は

$$\mu_g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \eta_i x_i + r_0 = \boldsymbol{\eta} \mathbf{x}^T + r_0 \quad (18)$$

である。ただし、 $\eta_i = \mu_i - r_0, i = 1, \dots, n$ とする。

3.2 機会制約ポートフォリオ最適化問題

通常、融資の金利は予想されるリスクを勘案して決められる。このため、式 (13) の Kataoka モデルと同様に危険率 $\alpha \in (0, 0.5)$ を指定して、式 (15) に示した制約条件の下で、式 (16) のリターン $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ の目標値 γ を最大化する。すなわち、銀行預金と銀行融資を利用するポートフォリオ最適化を、以下のような機会制約問題に定式化する。

$$\left[\begin{array}{ll} \max & \gamma \\ \text{sub. to} & \Pr(g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \leq \alpha, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq m + 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (19)$$

ただし、式 (15) の制約条件は $x_0 = 1 - (x_1 + \cdots + x_n)$ を $-m \leq x_0$ に代入して x_0 を省いている。式 (14) の銀行の金利 $r_0 \in \mathcal{R}$ も $x_0 = 1 - (x_1 + \cdots + x_n)$ を代入すると、

$$r_0 = \begin{cases} r_0 & \text{if } x_1 + \cdots + x_n < 1 \\ 0 & \text{if } x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ \bar{r}_0 & \text{if } x_1 + \cdots + x_n > 1 \end{cases} \quad (20)$$

となり、式 (19) の解 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ に基づき決められる。

3.3 機会制約問題の等価問題の導出

通常の場合制約問題 [21] の難点として、その求解で負荷の大きなモンテカルロ法による確率の計算が必要となる。しかし、式 (19) の機会制約問題では確率変数であるリターン $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}$ が式 (17) の正規分布に従うため、式 (19) は確率を陽に含まない等価な最適化問題に変換できる。

まず、以下のように $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ を標準化する。

$$\Pr\left(\frac{g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mu_g(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})} \leq \frac{\gamma - \mu_g(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}\right) \leq \alpha \quad (21)$$

式 (21) は標準正規分布の分布関数を Φ とすると、

$$\Phi\left(\frac{\gamma - \mu_g(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}\right) \leq \alpha \quad (22)$$

となる。このため、式 (19) の等価問題は

$$\begin{cases} \max & \gamma(\mathbf{x}) = \mu_g(\mathbf{x}) + \Phi^{-1}(\alpha) \sigma(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} & x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq m + 1, \\ & 0 \leq x_i, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (23)$$

となる。 γ の値は \mathbf{x} に依存するため $\gamma(\mathbf{x})$ と表記する。

3.4 機会制約問題の等価問題の解析

3.4.1 目的関数の形状

式 (23) の目的関数 $\gamma(\mathbf{x})$ の形状を明らかにする。

補題 1 標準偏差 $\sigma(\mathbf{x})$ は下向きの凸関数である。

証明 分散共分散行列 \mathbf{C} は半正定値であるため、以下のように正方行列 \mathbf{A} とその転置行列 \mathbf{A}^T に分解できる。

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x} \mathbf{C} \mathbf{x}^T} = \sqrt{\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x}^T} = \sqrt{\mathbf{y} \mathbf{y}^T} \quad (24)$$

ただし、 $\mathbf{y} = \mathbf{x} \mathbf{A} \in \mathcal{R}^n$ とする。式 (24) より、 $\sigma(\mathbf{x})$ はノルムであるため、三角不等式が成り立つ。すなわち、任意の $\theta \in [0, 1]$ と $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^n$, $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}$ について

$$\sigma(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \hat{\mathbf{x}}) \leq \sigma(\theta \mathbf{x}) + \sigma((1 - \theta) \hat{\mathbf{x}}) \quad (25)$$

となる。さらに、式 (25) の右辺の第 1 項は

$$\sigma(\theta \mathbf{x}) = \sqrt{\theta \mathbf{y} (\theta \mathbf{y})^T} = \theta \sqrt{\mathbf{y} \mathbf{y}^T} = \theta \sigma(\mathbf{x}) \quad (26)$$

となる。第 2 項も同様に变形して、式 (25) は

$$\sigma(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \hat{\mathbf{x}}) \leq \theta \sigma(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \sigma(\hat{\mathbf{x}}) \quad (27)$$

となる。式 (27) より、 $\sigma(\mathbf{x})$ は下向きの凸関数である。□

定理 1 銀行の金利 r_0 の 1 つの値について、式 (23) の等価問題の目的関数 $\gamma(\mathbf{x})$ は上向きの凸関数である。

証明 式 (18) より、任意の $\theta \in [0, 1]$ について

$$\begin{aligned} & \theta \gamma(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \gamma(\hat{\mathbf{x}}) - \gamma(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \hat{\mathbf{x}}) \\ &= \Phi^{-1}(\alpha) (\theta \sigma(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \sigma(\hat{\mathbf{x}}) - \sigma(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \hat{\mathbf{x}})) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。危険率が $\alpha \in (0, 0.5)$ より $\Phi^{-1}(\alpha) < 0$ である。

さらに、補題 1 より式 (27) が成り立ち、式 (28) は

$$\gamma(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \hat{\mathbf{x}}) \geq \theta \gamma(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \gamma(\hat{\mathbf{x}}) \quad (29)$$

となる。式 (29) より、 $\gamma(\mathbf{x})$ は上向きの凸関数である。□

銀行の金利 r_0 の値は、式 (20) に示した 3 通りである。このため、定理 1 より式 (23) の等価問題の目的関数 $\gamma(\mathbf{x})$ は、3 つの凸関数から構成された多峰性関数である。

3.4.2 最適解の必要条件

ある金利 r_0 について、目的関数の勾配ベクトルは

$$\nabla \gamma(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\eta} + \Phi^{-1}(\alpha) \frac{\mathbf{x} \mathbf{C}}{\sqrt{\mathbf{x} \mathbf{C} \mathbf{x}^T}} \quad (30)$$

となる。式 (18) より、 $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^n$ は r_0 に依存する。

式 (23) の最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}^n$ は、以下のいずれかを満たす。

- 定理 1 より、 $\nabla \gamma(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ である。
- 活性な制約条件 ($x_0 = 0$ を含む) が存在する。

図 1 に資産数 $n = 2$ で金利が r_0 と \bar{r}_0 の場合の実行可能領域を示す。図 1 では式 (20) と式 (23) の制約条件を考慮する。2 つの実行可能領域の境界では $x_0 = 0$ となり、目的関数値は不連続で、最適解が存在する可能性がある。

いくつかの最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}^n$ は解析的に求まる。

まず、 $\alpha = 0.5$ のとき $\Phi^{-1}(\alpha) = 0$ となる。このため、 $\gamma(\mathbf{x}) = \mu_g(\mathbf{x})$ となる。そこで、最大の μ_i を求める。

$$\mu_j = \max_i \{ \mu_i \} \quad (31)$$

$\mu_j \leq \bar{r}_0$ のとき、以下の最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が得られる。

$$x_j^* = 1, x_i^* = 0, i \neq j, \gamma(\mathbf{x}^*) = \mu_j \quad (32)$$

$\mu_j > \bar{r}_0$ のとき、以下の最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}^n$ が得られる。

$$\begin{cases} x_j^* = m + 1, x_i^* = 0, i \neq j, \\ \gamma(\mathbf{x}^*) = \mu_j (m + 1) - \bar{r}_0 m \end{cases} \quad (33)$$

上記の最適解は、銀行からお金を借りられるだけ借りて、1 つの資産 X_j に全資金を投資することを意味する。

次に、 $\alpha = 0$ のとき $\Phi^{-1}(\alpha) = -\infty$ となる。このため、目的関数を最大化すると $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ となる。したがって、以下の最適解 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathcal{R}^n$ が得られる。

$$x_i^* = 0, i = 1, \dots, n, \gamma(\mathbf{x}^*) = r_0 \quad (34)$$

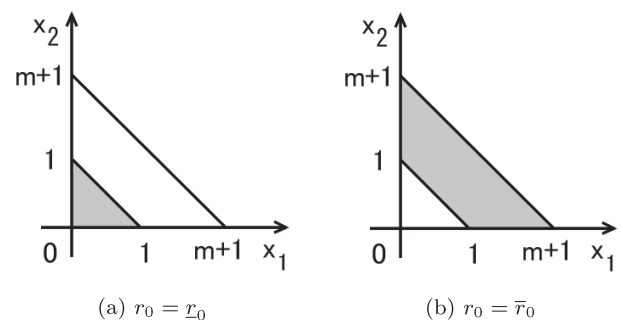


図 1 実行可能領域 (灰色の領域)
Fig. 1 Feasible region (Gray area).

上記の最適解は全資金を預金することを意味する。また、預金金利が $r_0 > \mu_j$ なら、式 (34) がつねに最適解となる。

3.5 提案モデルの現実性

我が国の銀行業界では、バブル経済の崩壊や金融ビッグバンを経て、銀行どうしの合併やグループの再編、規制緩和による異業種の参入、インターネット専門銀行の登場など、大きな変化が相次いでいる [22]。このため、様々な金融商品の販売など、銀行の業務内容も増えている。しかし、本稿では銀行の業務を預金と貸出に限定し、銀行とは固定金利の資産と融資を提供する金融機関の総称とする。

融資の担保は不動産担保や債権担保とする。特に、不動産担保（自宅、別荘、遊休地など）は融資の審査が通る可能性が高く、資金の用途も自由である。また、ただちに売却することが難しい不動産は妥当な担保と考えられる。このため、本稿で提案したモデルには現実性がある。ただし、投資に失敗した場合の担保の損失は評価していない。また、現物取引のみを対象とし、信用取引は扱えない。

信用取引は株式市場の流動性の向上を目的に導入されたスキーム [23] であり、証券会社から現金を借りて株を買う「信用買い」と、株式を借りて株を売る「空売り」がある。信用取引の動機は投資ではなく投機である。このため、「信用買い」では将来売ることを想定し、現物の受渡しは行わず、売りと買いの差額の授受で差金決済する。「空売り」でも将来買い戻すことを想定している。したがって、信用取引を含むポートフォリオの組成は多期間とし、売買手数料のほか、金利や貸株料、担保である委託保証金の追証なども考慮する必要がある。さらに、信用取引には様々な規制があり、そのスキームは複雑であるため、エージェントによる人工市場の研究対象にもなっている [24], [25]。

本稿が信用取引ではなく融資による投資を考えた理由は、職業的な投資家のみならず、素人の個人投資家にも理解しやすく、容易に応用できるためである。また、個人投資家への融資の有用性を銀行へ提言する狙いもある。

4. 適応型差分進化 (ADEGD)

EA の 1 種である DE は強力な最適化手法であるが、制御パラメータのスケール係数と交叉率を適切に設定する必要がある。このため、それらの制御パラメータの値を自動調整するメカニズムを組み込んだ適応型 DE が活発に研究されている [26], [27]。ただし、本来の DE [17] と同様、適応型 DE は制約条件のない最適化問題を対象とする。

本稿では、式 (23) の等価問題に対する最適化手法として、JADE [28] を拡張した ADEGD (Adaptive Differential Evolution using Gradient Directed mutation) を提案する。JADE は最も優れた適応型 DE の 1 つである [27]。新たに提案する ADEGD では対象とする問題固有の知見を活かして、以下の 2 点で既存の JADE を改良している。

- 式 (23) の等価問題に JADE を直接適用するため、制約条件を満たす新たな個体の表現方法を採用した。
- 式 (30) の勾配ベクトルを利用した新たな定方向突然変異 (Directed Mutation) を JADE に導入した。

4.1 個体の遺伝子型と表現型

ADEGD は世代 t で遺伝子型の個体 \mathbf{v}_k , $k = 1, \dots, N_P$ を集団 \mathbf{P}_t に保持する。遺伝子型の個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ は

$$\mathbf{v}_k = (v_{1,k}, \dots, v_{i,k}, \dots, v_{n,k}) \quad (35)$$

であり、 $0 \leq v_{i,k} \leq m + 1$, $i = 1, \dots, n$ とする。

遺伝子型の個体 \mathbf{v}_k は等価問題の解候補である表現型の個体 \mathbf{x}_k に変換する。このとき、以下のように個体 \mathbf{x}_k を生成すると、個体 \mathbf{x}_k は式 (23) の制約条件を満たす。

まず、等価問題で陽に表れない銀行への投資比率 $x_{0,k}$ を、以下のように遺伝子型の個体 \mathbf{v}_k から求める。

$$v_{0,k} = 1 - (v_{1,k} + \dots + v_{n,k}) \quad (36)$$

$$x_{0,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } |v_{0,k}| \leq \epsilon \\ -m & \text{if } v_{0,k} < -m \\ v_{0,k} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (37)$$

ただし、本稿では計算誤差を $\epsilon = 0.01/n$ とする。

次に、 $x_{0,k} = 0$ の場合は式 (38) から、 $x_{0,k} = -m$ の場合は式 (39) から、個体 $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k})$ を生成する。

$$x_{i,k} = \frac{v_{i,k}}{v_{1,k} + \dots + v_{n,k}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (38)$$

$$x_{i,k} = \frac{v_{i,k}(m+1)}{v_{1,k} + \dots + v_{n,k}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (39)$$

上記以外の場合は $x_{i,k} = v_{i,k}$, $i = 1, \dots, n$ とする。

4.2 ADEGD の戦略

DE では集団内の各個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ を順番に親個体に指定し、戦略と呼ばれる技法により、親個体から子個体を生成する。ADEGD では JADE 独自の戦略「DE/current-to-pbest/1/bin」[28] を使用し、以下に手順を説明する。

4.2.1 戦略による子個体の生成

親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ ごとに、式 (40) に示すような位置 μ_F と尺度 σ_F のコーシー分布に従う確率変数として、スケール係数 $F_k \in (0, 1]$ を生成する。ただし、 $F_k > 1$ なら $F_k = 1$ とし、 $F_k \leq 0$ なら式 (40) の F_k の生成をやり直す。

$$F_k \sim \text{Cauchy}(\mu_F, \sigma_F) \quad (40)$$

次に、集団内で上位 100p%にある個体 \mathbf{v}_p と、別に 2 つの個体 \mathbf{v}_{k1} と \mathbf{v}_{k2} を集団 \mathbf{P}_t からランダムに選ぶ。ここで、以下のように親個体 \mathbf{v}_k の変異個体 $\hat{\mathbf{v}}_k$ を生成する。

$$\hat{\mathbf{v}}_k = \mathbf{v}_k + F_k(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_k) + F_k(\mathbf{v}_{k1} - \mathbf{v}_{k2}) \quad (41)$$

ただし、本稿では推奨値 [28] の $p = 0.01$ を使用する。

親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ ごとに、式 (42) のような平均 μ_{CR} と分散 σ_{CR}^2 の正規分布に従う確率変数を、範囲 $[0, 1]$ に収まるようにトリミングし、交叉率 $CR_k \in [0, 1]$ を生成する。

$$CR_k \sim \text{Normal}(\mu_{CR}, \sigma_{CR}^2) \quad (42)$$

以下の親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ と変異個体 $\hat{\mathbf{v}}_k \in \mathfrak{R}^n$ の二項交叉により、子個体 $\mathbf{u}_k = (u_{1,k}, \dots, u_{n,k}) \in \mathfrak{R}^n$ を生成する。

$$u_{i,k} = \begin{cases} \hat{v}_{i,k} & \text{if } \text{rand}_i \leq CR_k \vee i = i_r \\ v_{i,k} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (43)$$

ただし、 $\text{rand}_i \in [0, 1]$ 、 $i = 1, \dots, n$ は一様乱数であり、要素 $u_{i,k}$ の添字 $i_r \in [1, n]$ はランダムに選択する。

子個体の \mathbf{u}_k の要素 $u_{i,k}$ は以下のように修正する。

$$u_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } u_{i,k} < 0 \\ m + 1 & \text{if } m + 1 < u_{i,k} \end{cases} \quad (44)$$

子個体 $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^n$ の表現型を \mathbf{z}_k とし、親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ の表現型 \mathbf{x}_k と比較する。 $\gamma(\mathbf{z}_k) \geq \gamma(\mathbf{x}_k)$ ならば子個体 \mathbf{u}_k の勝ちであり、子個体 \mathbf{u}_k を次世代の集団 \mathbf{P}_{t+1} の個体とする。そうでなければ、 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ を \mathbf{P}_{t+1} の個体とする。

4.2.2 制御パラメータの適応的調整

各世代 t において、次世代の集団 \mathbf{P}_{t+1} が決定した時点で、式 (40) の位置 μ_F を以下のように更新する。

$$\mu_F = (1 - c)\mu_F + cS_{F2}/S_F \quad (45)$$

ただし、子個体 \mathbf{u}_k が親個体に勝ったときのスケール係数 F_k の合計を S_F 、その自乗の合計を S_{F2} とする。係数は $c = 0.1$ とし、式 (40) の尺度は $\sigma_F = 0.1$ とする [28]。

同様に、式 (42) の平均 μ_{CR} も以下のように更新する。

$$\mu_{CR} = (1 - c)\mu_{CR} + cS_{CR}/S_N \quad (46)$$

ただし、子個体 \mathbf{u}_k が親個体に勝ったときの交叉率 CR_k の合計を S_{CR} 、その回数を S_N とする。係数は $c = 0.1$ とし、式 (42) の分散は $\sigma_{CR}^2 = 0.1^2$ に固定する [28]。

4.3 定方向突然変異

親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ ごとに、式 (47) の一様分布に従う確率変数として、ステップ幅 $S_k \in [S_L, S_U]$ を生成する。

$$S_k \sim \text{Uniform}(S_L, S_U) \quad (47)$$

ただし、本稿では $S_L = 0.5$ 、 $S_U = 1.0$ とする。

次に、遺伝子型の親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ を表現型の親個体 \mathbf{x}_k に変換した後、以下のように方向ベクトル $\nabla\gamma(\mathbf{x}_k)$ の摂動を加えて、遺伝子型の子個体 $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^n$ を生成する。

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{x}_k + \left(\frac{S_k}{n\sqrt{t}} \right) \nabla\gamma(\mathbf{x}_k) \quad (48)$$

方向ベクトル $\nabla\gamma(\mathbf{x}_k)$ は式 (30) に示した目的関数の最急上昇方向である。また、ステップ幅は世代数 t とともに減少させる。子個体 $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^n$ は式 (44) により修正する。

式 (48) の定方向突然変異では、個体 \mathbf{x}_k の目的関数値 $\gamma(\mathbf{x}_k)$ を計算する際に、その途中結果のベクトル $\mathbf{x}_k \mathbf{C} \in \mathfrak{R}^n$ と標準偏差 $\sigma(\mathbf{x}_k) \in \mathfrak{R}$ を記憶しておき再利用する。このため、その計算量は DE の差分突然変異と同じである。

4.4 ADEGD のアルゴリズム

ADEGD では突然変異率 $MR \in [0, 1]$ に基づき、親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ に JADE の戦略または式 (48) の定方向突然変異を適用し、子個体 $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^n$ を生成する。終了条件を世代数の最大値 N_G とし、以下に ADEGD の手順を示す。

手順 1 初期集団 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_0 \subseteq [0, m + 1]^n$ 、 $k = 1, \dots, N_P$ をランダムに生成する。世代数を $t = 0$ とする。

手順 2 $\mu_F = 0.5$ 、 $\mu_{CR} = 0.5$ と初期化する。

手順 3 世代数が $t = N_G$ ならば、最良の個体 $\mathbf{v}_b \in \mathbf{P}_t$ を選び、等価問題の解 $\mathbf{x}_b \in \mathfrak{R}^n$ として終了する。

手順 4 各親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ に対して、 $\text{rand}_k \leq MR$ なら定方向突然変異を適用し、 $\text{rand}_k > MR$ なら JADE の戦略を適用して、新たな子個体 $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^n$ を生成する。ただし、 $\text{rand}_k \in [0, 1]$ は一様乱数である。

手順 5 親個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_t$ 、 $k = 1, \dots, N_P$ とその子個体 \mathbf{u}_k を表現型に変換して比較し、いずれか勝る方を次世代の個体 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{P}_{t+1}$ とする。世代数を $t = t + 1$ とする。

手順 6 確率分布の位置 μ_F と平均 μ_{CR} を更新する。

手順 7 手順 3 に戻る。

5. 数値実験

5.1 テスト問題と実験方法

テスト問題 (収益率の確率分布) は port0 [29] と、port1 から port4 [30] の計 5 種類を使用する。テスト問題 port0 の資産数は $n = 4$ であり、表 1 に各資産 i の収益率 ξ_i の平均 μ_i と分散 σ_i^2 を示す。収益率 ξ_i の相関行列 \mathbf{R} は

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.7 & 0.1 & -0.4 \\ -0.7 & 1.0 & -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & -0.5 & 1.0 & -0.3 \\ -0.4 & 0.2 & -0.3 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

である。ほかのテスト問題の平均や分散は省略する。

ADEGD は Java 言語で実装した。表 2 に各テスト問題の資産数 n 、ならびに ADEGD の集団サイズ N_P と世代数

表 1 収益率 ξ_i の平均 μ_i と分散 σ_i^2 (port0)

Table 1 Mean and variance for return rate (port0).

ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
μ_i	0.05	0.06	0.07	0.08
σ_i^2	0.10 ²	0.20 ²	0.15 ²	0.25 ²

表 2 ADEGD の制御パラメータ

Table 2 Control parameters for ADEGD.

problem	port0	port1	port2	port3	port4
n	4	31	85	89	98
N_P	20	60	200	200	300
N_G	60	180	600	600	900

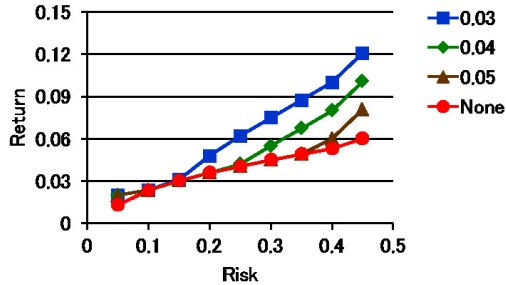


図 2 リスク α に対するリターン γ (port0 : $m = 2$)
Fig. 2 Return γ for risk α (port0 : $m = 2$).

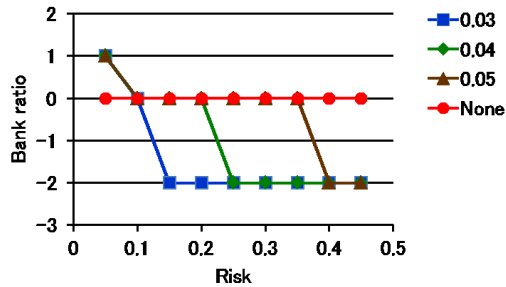


図 3 リスク α と銀行への投資比率 x_0 (port0 : $m = 2$)
Fig. 3 Bank ratio x_0 for risk α (port0 : $m = 2$).

N_G を示す。突然変異率は本稿の推奨値である $MR = 0.1$ とする。予備実験において、表 2 の制御パラメータにより、式 (33) と式 (34) の最適解が求まることを確認した。

5.2 銀行の預金と融資の効果

まず、テスト問題 port0 において、預金金利を $r_0 = 0.02$ 、貸出金利を $\bar{r}_0 = 0.03, 0.04, 0.05$ とし、融資の上限を $m = 2$ とした。図 2 にリスク α を変えて得られたポートフォリオ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ のリターン $\gamma(\mathbf{x})$ を示す。図 2 には銀行の預金と融資を利用しない場合の結果 (None)*1 も示す。ちなみに、図 2 の各解 (ポートフォリオ) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ については、等価問題の最適解の必要条件を満たすことを確認している。このため、図 2 はリスクとリターンのトレードオフの関係を示した効率的フロンティア [2] であると考えられる。

図 2 から、銀行を利用することで、リスクに対するリターンが上昇し、効率的フロンティアが改善している。また、貸出金利が低いほど、その改善の効果は大きい。

図 3 に各解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ における銀行への投資比率 $x_0 \in \mathbb{R}$ を示す。図 3 から、リスクが小さい場合は $x_0 > 0$ で銀行預金を利用し、大きい場合は $x_0 < 0$ で銀行融資を利用す

*1 式 (13) の機会制約問題に対する等価問題の解を求めた。

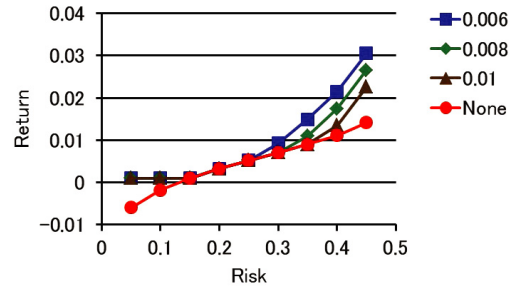


図 4 リスク α に対するリターン γ (port4 : $m = 2$)
Fig. 4 Return γ for risk α (port4 : $m = 2$).

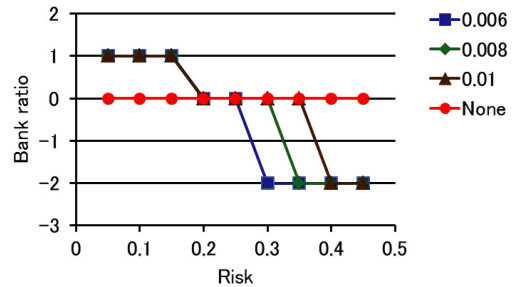


図 5 リスク α と銀行への投資比率 x_0 (port4 : $m = 2$)
Fig. 5 Bank ratio x_0 for risk α (port4 : $m = 2$).

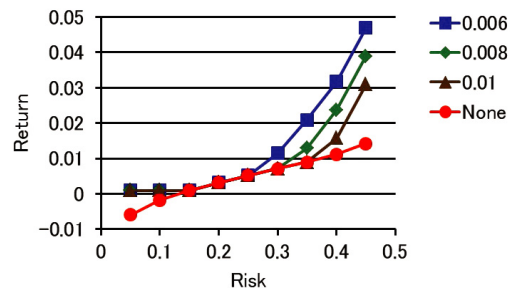


図 6 リスク α に対するリターン γ (port4 : $m = 4$)
Fig. 6 Return γ for risk α (port4 : $m = 4$).

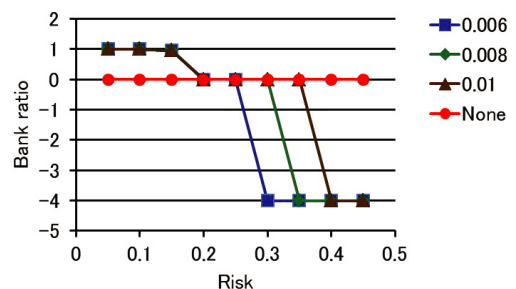


図 7 リスク α と銀行への投資比率 x_0 (port4 : $m = 4$)
Fig. 7 Bank ratio x_0 for risk α (port4 : $m = 4$).

るため、図 2 のリターンが上昇することが分かる。

次に、テスト問題 port4 において、預金金利を $r_0 = 0.001$ 、貸出金利を $\bar{r}_0 = 0.006, 0.008, 0.01$ とした。融資の上限が $m = 2$ の場合について、リスク α に対するリターン $\gamma(\mathbf{x})$ と銀行への投資比率 x_0 を図 4 と図 5 に示す。また、融資の上限が $m = 4$ の場合について、リスク α に対するリターン $\gamma(\mathbf{x})$ と銀行への投資比率 x_0 を図 6 と図 7 に示す。

テスト問題 port4 は事前にポートフォリオから除いた方が望ましいような不良資産を多く含んでいる。このため、図 4 と図 6 では、リスクが $\alpha < 0.15$ と小さい場合、銀行を利用しないポートフォリオのリターンはマイナスとなる。しかし、銀行預金を利用することで、リターンをプラスに変えられる。また、図 4 と図 6 から、リスクが大きい場合、貸出金利が低く上限の大きな銀行融資ほど、効率的フロンティアを改善する効果が高いことが確認できる。

図 5 と図 7 から、銀行融資を利用するか否かは、上限 m とは関係なく、貸出金利とリスクの兼ね合いで決まり、大きなリスクを負うならば高金利でも利用する。また、銀行融資を利用する場合は、つねに限度額まで借りている。

5.3 ADEGD の性能評価

提案した定方向突然変異の効果を検証するため、突然変異率 MR を変えて、各テスト問題に ADEGD を 30 回ずつ適用した。すべてのテスト問題で預金金利は $r_0 = 0.001$ 、貸出金利は $\bar{r}_0 = 0.01$ 、融資の上限は $m = 2$ とした。

表 3 に ADEGD で得られたリターンを示す。テスト問題ごとに上段がリターンの平均値、下段が標準偏差である。表 3 から、すべてのテスト問題において $MR = 0.1$ のとき最良の結果が得られている。そこで、表 3 には $MR = 0.1$ と他の突然変異率 MR で得られたリターンを Wilcoxon の

順位と検定で比較した結果も示す。記号「‡」と「†」は有意水準が 1% と 5% でリターンの値に有意な差があり、記号「-」は有意な差が認められないことを意味する。

表 3 から、リターンの平均値では $MR = 0.1$ と $MR = 0.5$ の差が分からない場合もあるが、標準偏差は $MR = 0.1$ の方がつねに小さく、Wilcoxon の順位と検定からも両者の違いは明らかである。また、すべてのテスト問題において $MR = 0.9$ のときの結果は悪く、定方向突然変異の頻度を上げ過ぎると ADEGD の探索性能が損なわれる。

上記のテスト問題 port1 について、突然変異率 MR の異なる 3 種類の ADEGD で得られたリターンの平均値の世代数に対する変化を図 8 と図 9 に示す。ただし、ADEGD で得られたリターンの値の収束を確認するため、世代数は $N_G = 250$ まで延長した。図 8 はリスクが $\alpha = 0.05$ の場合であり、図 9 はリスクが $\alpha = 0.45$ の場合である。

リスクが $\alpha = 0.05$ の場合、全資金が預金されて最適解は原点に存在する。図 8 から、 $MR = 0.1$ の ADEGD は少ない世代数で最適解に到達している。一方、 $MR = 0.9$ として定方向突然変異を頻繁に行うと、局所的最適解に陥る確率が大きくなり、最適解に到達できなくなる。

リスクが $\alpha = 0.45$ の場合、銀行融資が利用されて最適解は実行可能領域の境界の超平面上に存在する。図 9 から、 $MR = 0.1$ と $MR = 0.5$ では ADEGD の振舞いに大差は見られない。一方、 $MR = 0.9$ の ADEGD は、探索空間を迅速に移動できず、最適解への収束性で劣っている。

表 3 ADEGD の突然変異率に対するリターン
Table 3 Return for the mutation rate of ADEGD.

α	MR	0.1	0.5	0.9
0.05	port1	0.0010 0	0.0008‡ 1.79×10^{-4}	-0.0195‡ 6.07×10^{-3}
	port2	0.0010 0	0.0008‡ 3.52×10^{-5}	-0.0091‡ 1.15×10^{-3}
	port3	0.0010 0	0.0008‡ 3.84×10^{-5}	-0.0104‡ 1.06×10^{-3}
	port4	0.0010 0	0.0009‡ 6.54×10^{-7}	-0.0049‡ 6.01×10^{-4}
0.25	port1	0.0009 5.51×10^{-7}	0.0008‡ 1.16×10^{-4}	-0.0034‡ 1.37×10^{-3}
	port2	0.0053 2.29×10^{-6}	0.0053‡ 7.75×10^{-6}	0.0025‡ 4.47×10^{-4}
	port3	0.0037 2.13×10^{-6}	0.0037‡ 8.19×10^{-6}	0.0016‡ 2.89×10^{-4}
	port4	0.0052 3.20×10^{-8}	0.0052‡ 1.21×10^{-6}	0.0039‡ 1.06×10^{-4}
0.45	port1	0.0192 6.79×10^{-7}	0.0191‡ 7.22×10^{-6}	0.0185‡ 2.75×10^{-4}
	port2	0.0262 8.31×10^{-9}	0.0262‡ 6.97×10^{-8}	0.0257‡ 6.21×10^{-4}
	port3	0.0213 2.79×10^{-7}	0.0212‡ 6.39×10^{-6}	0.0206‡ 6.00×10^{-5}
	port4	0.0225 1.40×10^{-8}	0.0225‡ 1.11×10^{-6}	0.0221‡ 3.90×10^{-5}

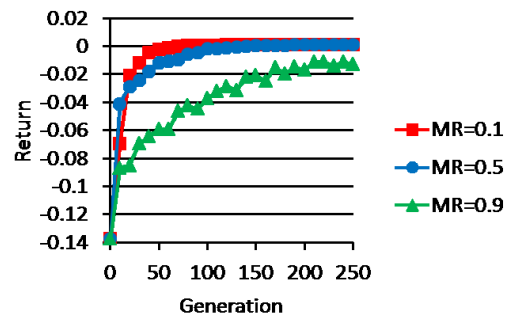


図 8 世代数 t に対するリターン γ (port1: $\alpha = 0.05$)
Fig. 8 Return γ for generation t (port1: $\alpha = 0.05$).

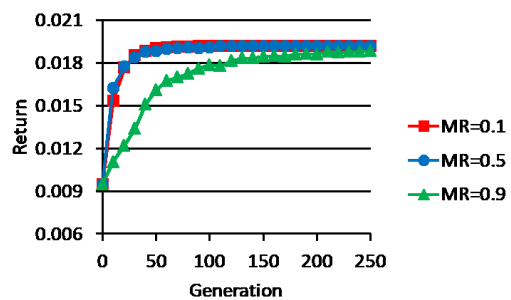


図 9 世代数 t に対するリターン γ (port1: $\alpha = 0.45$)
Fig. 9 Return γ for generation t (port1: $\alpha = 0.45$).

表 4 適応型 DE に対するリターン
Table 4 Returns for ADEs.

α	ADE	ADEGD	ADERD	JADE
0.05	port1	0.0010 0	0.0009‡ 9.56×10^{-15}	-0.1054‡ 3.49×10^{-5}
	port2	0.0010 0	0.0009‡ 7.65×10^{-7}	-0.0401‡ 4.69×10^{-5}
	port3	0.0010 0	0.0009‡ 6.44×10^{-7}	-0.0513‡ 6.40×10^{-5}
	port4	0.0010 0	0.0009‡ 6.48×10^{-8}	-0.0377‡ 7.93×10^{-10}
0.25	port1	0.0009 5.51×10^{-7}	0.0009- 2.78×10^{-8}	-0.0297‡ 6.02×10^{-6}
	port2	0.0053 2.29×10^{-6}	0.0053‡ 5.75×10^{-6}	-0.0039‡ 4.68×10^{-6}
	port3	0.0037 2.13×10^{-6}	0.0037‡ 8.41×10^{-6}	-0.0088‡ 3.42×10^{-5}
	port4	0.0052 3.20×10^{-8}	0.0052‡ 1.49×10^{-7}	-0.0043‡ 1.57×10^{-9}
0.45	port1	0.0192 3.72×10^{-7}	0.0192‡ 6.79×10^{-7}	0.0192‡ 3.02×10^{-6}
	port2	0.0262 8.31×10^{-9}	0.0262‡ 4.15×10^{-8}	0.0261‡ 5.64×10^{-6}
	port3	0.0021 1.77×10^{-7}	0.0021‡ 2.79×10^{-7}	0.0021‡ 1.11×10^{-5}
	port4	0.0225 3.75×10^{-9}	0.0225‡ 1.40×10^{-8}	0.0225‡ 3.19×10^{-7}

5.4 ほかの適応型 DE との性能比較

RDM (Random Directed Mutation) [31] は汎用的な DE で使用される定方向突然変異である。RDM では目的関数の勾配情報は使用せず、目的関数値からその上昇方向を推定する。RDM を式 (23) の等価問題に適用した場合、表現型の親個体 \mathbf{x}_k と集団からランダムに選んだ個体の表現型 $\mathbf{x}_r, r \neq k$ から、以下のように子個体 \mathbf{u}_k を生成する。

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} \mathbf{x}_k + F(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_r) & \text{if } \gamma(\mathbf{x}_k) > \gamma(\mathbf{x}_r) \\ \mathbf{x}_r + F(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_k) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (50)$$

ただし、スケール係数は $F = 0.5$ とする [31]。

式 (48) の定方向突然変異に代えて式 (50) の RDM を JADE に組み込んだ適応型 DE (ADE: Adaptive DE) を ADERD とする。本稿では、提案した ADEGD を ADERD、ならびに JADE*2 と比較する。すべての ADE の集団サイズ N_P と世代数 N_G は表 2 に示したとおりとし、ADEGD と ADERD の突然変異率は $MR = 0.1$ として、それぞれの ADE を前述の各テスト問題に 30 回ずつ適用した。

表 4 に各 ADE で得られたリターンの平均値、標準偏差、Wilcoxon の順位和検定の結果を表 3 と同様に示す。ただし、順位和検定では ADEGD と他の ADE によるリターンの値を比較した。表 4 から、すべてのテスト問題におい

*2 ADEGD で $MR = 0$ とした場合を JADE とする。

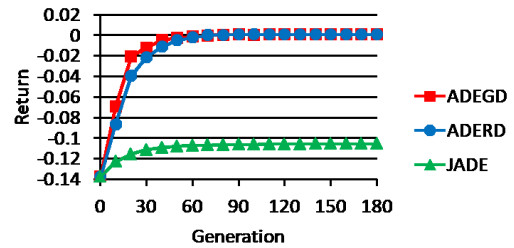


図 10 適応型 DE の比較 (port1: $\alpha = 0.05$)
Fig. 10 Comparison between ADEs (port1: $\alpha = 0.05$).

て、提案した ADEGD の性能が最も優れている。一方、定方向突然変異を用いない JADE の性能が最も劣っている。

テスト問題 port1 ($\alpha = 0.05$) について、3 種類の ADE で得られたリターンの平均値の世代数に対する変化を図 10 に示す。図 10 から、最適解への収束性において、勾配情報を利用する ADEGD は ADERD に勝ることが確認できる。また、定方向突然変異を使用しない JADE は、探索空間の片隅に存在する最適解 (原点) を発見できない。

6. おわりに

本稿では、銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化を考案し、機会制約問題に定式化した。次に、機会制約問題の等価問題を導出し、目的関数の形状など特徴を明らかにした。さらに、その等価問題を効率的に解くために、JADE [28] を拡張した ADEGD を提案した。ADEGD では、遺伝子型の個体を等価問題の制約条件を満たす表現型の個体に変換した。また、目的関数の最急上昇方向に個体を移動させる定方向突然変異を JADE に組み込んだ。

数値実験から、銀行の預金と融資を利用すると、効率的フロンティアが改善することを示した。また、銀行融資を利用するか否かは、容認できるリスクと貸出金利の兼ね合いで決まることを明らかにした。さらに、ほかの適応型 DE との比較により、ADEGD の性能を確認した。

今後の課題は、リスクに基づく適切な貸出金利の検討である。銀行融資を利用すれば、リターンは大きくなる。また、銀行も融資を行わなければ儲からない。借り手と貸し手に有益な銀行融資のモデルが望まれる。また、資産数が数百のポートフォリオも扱えるように、最新の技法 [32], [33] を取り入れた ADEGD の更なる改良も必要である。

謝辞 本研究は、JSPS 科学研究費補助金 (科研費) 課題番号 17K06508 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] 日本証券業協会：個人投資家の証券投資に関する意識調査、日本証券業協会 (オンライン)、入手先 (<http://www.jsda.or.jp/>) (参照 2018-10-31)。
- [2] 枇々木規雄：金融工学と最適化、朝倉書店 (2001)。
- [3] 枇々木規雄, 田辺隆人：ポートフォリオ最適化と数理計画法、朝倉書店 (2005)。
- [4] 伊庭齊志：進化計算の金融工学への応用、情報処理, Vol.53,

- No.9, pp.938-941 (2012).
- [5] Markowitz, H.: *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Basil Blackwell (1987).
- [6] 伊庭斉志：金融工学のための遺伝的アルゴリズム，オーム社 (2011).
- [7] 折登由希子，蔵澄 亨，山本久志，辻村泰寛：ポートフォリオ最適化問題における緑付きヘッセ行列の極値判定を用いた GA の初期決定法の有効性，情報処理学会論文誌：数理モデル化と応用，Vol.6, No.1, pp.146-155 (2013).
- [8] 折登由希子，花田良子，柴田俊輔，山本久志：複製対象の解の特性を考慮した分布交換 EDA によるロングショートポートフォリオのレプリケーション，情報処理学会論文誌：数理モデル化と応用，Vol.7, No.1, pp.1-14 (2014).
- [9] Anagnostopoulos, K.P. and Mamanis, G.: A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables, *Computers & Operations Research*, Vol.37, pp.1285-1297 (2010).
- [10] Ponsich, A., Jaimes, A.L. and Coello Coello, C.A.: A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications, *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, Vol.17, No.3, pp.321-344 (2013).
- [11] Huang, X.: Fuzzy chance-constrained portfolio selection, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.117, pp.500-507 (2006).
- [12] Mehlatat, M.K. and Gupta, P.: Fuzzy chance-constrained multiobjective portfolio selection model, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol.22, No.3, pp.653-671 (2014).
- [13] Hassanlou, K.: Novel approach for multi period portfolio selection using chance constrained programming, *International Journal of Basic Sciences & Applied Research*, Vol.6, No.1, pp.72-82 (2017).
- [14] Tagawa, K.: Chebyshev inequality based approach to chance constrained portfolio optimization, *International Journal of Mathematical and Computational Methods*, Vol.2, pp.66-71 (2017).
- [15] Wolpert, D.H. and Macready, W.G.: No free lunch theorems for optimization, *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, Vol.1, No.1, pp.67-82 (1997).
- [16] 田川聖治，綿谷剛至：銀行預金と銀行融資を利用した機会制約ポートフォリオ最適化，情報処理学会研究報告，Vol.2018-MPS-120, No.10, pp.1-6, 情報処理学会 (2018).
- [17] Price, K.V., Storn, R.M. and Lampinen, J.A.: *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*, Springer (2005).
- [18] Markowitz, H.: Portfolio selection, *The Journal of Finance*, Vol.7, No.1, pp.77-91 (1952).
- [19] Roy, A.D.: Safety first and the holding of assets, *Econometrica*, Vol.20, No.3, pp.431-449 (1952).
- [20] Kataoka, S.: A stochastic programming model, *Econometrica*, Vol.31, No.1-2, pp.181-196 (1963).
- [21] 椎名孝之：確率計画法，朝倉書店 (2015).
- [22] 全国銀行協会：経済活動と銀行の役割，全国銀行協会（オンライン），入手先 (<https://www.zenginkyo.or.jp/>)（参照 2018-10-31）.
- [23] 外島健嗣：信用取引制度の効果，証券経済学会年報，No.34, pp.79-91 (1999).
- [24] 八木 勲，水田孝信，和泉 潔：人工市場を利用した空売り規制が与える株式市場への影響分析，人工知能学会論文誌，Vol.29, No.1, pp.208-219 (2011).
- [25] 内藤大輔，八木 勲：信用取引を考慮した人工市場の構築，情報処理学会第 76 回全国大会予稿集，情報処理学会，pp.431-432 (2014).
- [26] Fan, Q. and Yan, X.: Self-adaptive differential evolution algorithm with zoning evolution of control parameters and adaptive mutation strategies, *IEEE Trans. Cybernetics*, Vol.46, No.1, pp.219-232 (2016).
- [27] Takahama, T. and Sakai, S.: An adaptive differential evolution with learning parameters according to groups defined by the rank of objective values, *Proc. 8th International Conference on Swarm Intelligence*, LNCS 10385, pp.411-419, Springer (2017).
- [28] Zhang, J. and Sanderson, A.C.: JADE: Adaptive differential evolution with optional external archive, *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, Vol.13, No.5, pp.945-958 (2009).
- [29] 枇々木規雄：ポートフォリオ最適化入門，オペレーションズ・リサーチ，Vol.6, pp.335-340 (2016).
- [30] Beasley, J.E.: OR-Library: Distributing test problems by electronic mail, *Journal of the Operational Research Society*, Vol.41, No.11, pp.1069-1072 (1990) (online), available from (<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html>).
- [31] Feoktistov, V.: *Differential Evolution: In Search of Solutions*, Springer (2006).
- [32] Takahama, T. and Sakai, S.: Large scale optimization by differential evolution with landscape modality detection and a diversity archive, *Proc. Congress on Evolutionary Computation*, pp.2842-2849, IEEE (2012).
- [33] Ge, Y.F., Yu, W.J., Lin, Y., Gong, Y.J., Zhan, Z.H., Chen, W.N. and Zhang, J.: Distributed differential evolution based on adaptive merge and split for large-scale optimization, *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, Vol.48, No.7, pp.2166-2180 (2018).



田川 聖治 (正会員)

1991 年神戸大学大学院工学研究科修了。神戸大学工学部助教授を経て 2007 年から近畿大学理工学部教授。進化計算と応用に関する研究に従事。博士 (工学)。電気学会，計測自動制御学会，進化計算学会，IEEE 各会員。