5U-01

複数回配属問題におけるマッチングメカニズムの提案

丸古　凌介†　　藤田　悟‡

法政大学大学院　情報科学研究科†　法政大学　情報科学部‡

1. まえがき

マッチングはゲーム理論的メカニズムデザインの代表的問題である．マッチングの多くの先行研究では１回だけの割り当てを決定する問題を対象としている．しかし，これを複数回の重複の無い割り当てを決定する問題に拡張した時，２回目以降の割り当てが決定できなくなる問題が存在してしまう．本稿では，複数回の配属の問題に対して，解の存在可能性の条件式を示し，その式を活用した２回配属問題に対応するメカニズムを提案し，検証する．

2. 複数回配属問題とモデル

本稿での複数回配属とは重複の無い様に学生を複数の研究室に割り当てる事を意味する．複数回の重複の無い配属を決定する時に解が存在しない問題が存在してしまう．例として，学生３人が３つの研究室から２つ選択して巡回する問題では，２人の学生が２つの研究室を交換してしまうと，３人目の学生は残る１つの研究室に２回行かなければならなくなり，解が無くなる．この様な問題を解決する為に，まずモデルを文献[1]に基づき，複数回配属問題に拡張する．

複数回配属の問題を $(S, L, R, p, q, \succ_S, \succ_L, \succ_{ML}, \mathrm{M})$ の組で定義する．$S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$は学生集合であり，$|S|=n$である．$L=\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$は研究室集合で，$|L|=m$である．$R=\{r_1, r_2, \ldots\}$は地域の集合ではあるが，本稿では各研究室だけが属するものだけとし，$|R|=m$とする．pとqはそれぞれ地域の下限と上限であり，$p=(p_r)_{r\in R}$，$q=(q_r)_{r\in R}$ で定義する．$\succ_S$は学生が持つ${}_mP_t$個の研究室の順列に対して選好順序であり，各順列のk番目の要素は学生がk回目に配属される研究室を表している．$\succ_L$は研究室の学生に対する厳密な選好順序のベクトルである．$\succ_{ML}$はマスターリスト(ML)と呼ばれるもので，研究室からの選好とは相関の無い学生の順序である．$\mathrm{M}=\{X'_1, X'_2, \ldots X'_t\}$はマッチングの集合で，$|\mathrm{M}|=t$となる．

マッチング$X'_k \in 2^{S\times L}$はk回目の学生の研究室への割り当てを表したものである．k回目のマッチング結果は関数 $\mu_{X'_k}: S\cup L \to 2^S \cup L$によって特徴づけられる．$\mu_{X'_k}$を学生は研究室, 研究室は学生の$k$回目の結果の集合を返す関数とする．

定義1：マッチングX'_kとは以下の2つの条件を満たすものである. (i) $\forall s\ (s \epsilon S)$, $\mu_{X'_k}(s) = l\ (l \in L)$, (ii) $\forall l (l \epsilon L)$, $s\ (s \in S) \in \mu_{X'_k}(l)$.

$combi(s) = \{\mu_{X'_1}(s), \mu_{X'_2}(s), \ldots, \mu_{X'_t}(s)\}$を学生$s$が配属される全ての研究室の集合とし，$|combi(s)| = t$となる．また，本稿では下限を設定せず，上限だけを設定する．

3. 評価基準

メカニズムを評価する性質として，戦略的操作不可能性，非浪費性，公平性がある．非浪費性と公平性は複数回に対応するために拡張する．

定義 2：戦略的操作不可能であるとは，どの学生も他学生の選好順序の申告に関わらず，偽の選好順序を申告する誘因を持たないことをいう．

定義3：Mが与えられた時の学生sと研究室の集合$L'(|L'|=t)$について$L' \succ_s combi(s)$，かつ$\forall l \in L' \setminus combi(s), \left|\mu_{X'_k}(l)\right| < q_{\{l\}}$ならば，学生$s$は$L'$の集合に空きシートを要求する．集合に空きシートを要求する学生が存在しないならば，集合的非浪費性を満たす．

定義 4：Mが与えられた時の学生sとs'で$combi(s') \succ_s combi(s)$，かつ$\forall l \in combi(s') \setminus combi(s), s \succ_l s'$ならば，学生$s$は学生$s'$に集合に関して妥当な不満を持つ．集合に関して妥当な不満を持つ学生が存在しないならば，集合的公平性を満たす．

定義 5：Mが与えられた時の学生sとs'で，(i) $\mu_{X'_k}(s') \succ_s \mu_{X'_k}(s)$，(ii)$s \succ_{\mu_{X'_k}(s')} s'$，かつ(iii) $\mu_{X'_k}(s') \notin combi(s)$，(iv) $\mu_{X'_k}(s) \notin combi(s')$の全てを満たすならば，学生$s$は学生$s'$に同時期に妥当な不満を持つ．同時期に妥当な不満を持つ学生が存在しない時，同期的公平性を満たす．

4. 解の存在

問題設定時における，何回の配属が可能かを判定する式(4.1)を以下に提案する．

$$\forall l \in L, t * \left(|S| - \sum_{l' \in L \setminus l} q_{\{l'\}}\right) \leq |S| \qquad 式(4.1)$$

Proposal matching mechanism for multiple assignment problem
† Ryosuke Maruko, ‡ Satoru Fujita
† Graduate School of C.I.S, Hosei University
‡ Faculty of C.I.S, Hosei University

式(4.1)を満たすt回の配属が可能である．式(4.1)は学生数から各研究室以外の研究室の定員を引いたもの，すなわち各研究室に配属させなければならない学生数のt倍が全学生数以下であることを示している．

証明：式(4.1)を満たさないtでは，研究室は全学生数以上の学生を配属させる必要があり，割り当てが重複してしまう．満たすtでは配属させる義務のある学生の重複しない他研究室への行き先が$t-1$回分空いている為，重複しないt回の配属が可能である．

5. 提案メカニズム

本稿では先行研究である SDRQ[1]と式(4.1)を利用した 2 回配属のメカニズム SDTA(Serial Dictator with Twice Assignment)を提案する．問題設定時では式(4.1)でt回が可能か判断できるが，3 回以上のマッチングの途中では必要条件式となってしまう．その為，提案メカニズムは 2 回のマッチングとなっている．SDTA では SDRQ と同様に ML の順序で学生を選び，配属可能な割り当ての中で学生が最も志望している順列に割り当てるものである．順列の配属が可能とは，順列でk番目である研究室のk回目の定員に空きがある時と，以下の式(5.1)を全ての研究室$l \in L$が満たす時，配属可能である．

$$|S'| - \sum_{l' \in L \setminus l} \min\left(|S'|, q^1_{\{l'\}}\right) \leq \sum_{l' \in L \setminus l} \min\left(|S'|, q^2_{\{l'\}}\right) \quad \text{式(5.1)}$$

$q^k_{\{l\}}$はk回目のlの残り定員であり，S'を配属されていない学生の集合とする．式(5.1)を満たさないとき，S'を重複無しにt 回配属できない．SDTA のメカニズムは以下の様に定義する．

1. S'から ML で最も上位である学生sを選び，$S' = S' \setminus s$と更新する．
2. sを配属可能な順列の中で最も志望するものに配属する．
3. $\forall k,\ \mu_{X'_k}(s)$について$q^k_{\{l\}} = q^k_{\{l\}} - 1$とし，$S' = \emptyset$ならば終了，そうでないならば 2 に戻る．

定理：SDTA は戦略的操作不可能であり，集合的非浪費性を満たす．

証明：各学生は自身が ML から選ばれた状況での，配属可能な最も志望する順列に配属される．従って偽の申告をした場合でも，より好んでいる配属には割り当てられないので，嘘を吐く誘因が無い．また，より好んでいる配属は定員枠が空いていない為，集合的空きシートを要求する学生も存在しない．

6. シミュレーション実験と考察

学生数 160，研究室数 20，各研究室の上限 $q_{\{l\}} = 9$，下限$p_{\{l\}} = 0$とする．学生の選好順序は，全学生での各研究室に対する共通ベクトル$\boldsymbol{u_C}$と，各学生の各研究室に対する固有のベクトル$\boldsymbol{u_s}$を一様乱数で生成する．研究室への評価値をパラメータαを用いて，$\alpha\boldsymbol{u_C} + (1-\alpha)\boldsymbol{u_s}$で決定する．αが高い程，学生の選好は類似し，実験ではαを 0.0 から 1.0 の間で 0.1 刻みに変化させる．各研究室の各学生に対する選好順序は一様乱数で生成する．各実験結果は 100 回実行時の平均である．

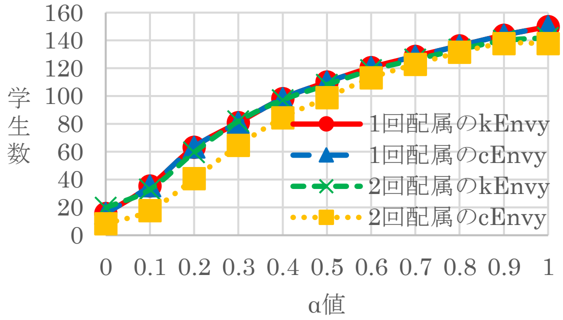

図 1 ：SDTA での妥当な不満を持つ学生数

図 1 は SDTA の同時期に妥当な不満を持つ学生数(kEnvy)と集合に関して妥当な不満を持つ学生数(cEnvy)の 1 回配属と 2 回配属の比較である．

図 1 より，定義から自明ではあるが 1 回配属の kEnvy と cEnvy は同様の数値であった．また，僅かではあるが 1 回配属での 2 つの妥当な不満よりも，2 回配属での 2 つの妥当な不満の方が少なくなっている．これは割り当てられる研究室が増えたことにより，より好んでいる研究室に行きやすくなった為だと考える．更に，kEnvy と cEnvy の定義より，割り当てられる研究室が多くなるほど妥当な不満を持ち難くなると考えられる．m回，すなわち全研究室に配属させる場合には，全ての研究室に配属させる為，他の学生に妥当な不満を抱かなくなる．

7. むすび

本稿では，複数回配属における解の存在について議論し，解の存在判定式を提案した．また，その式の考えを利用した 2 回配属メカニズム SDTA を提案した．シミュレーション実験を通して，SDTA での 1 回配属が 2 回配属に比べて妥当な不満を持つ学生数が多いことがわかった．

文　献

[1] 橋本直幸，後藤誠大，上田俊，岩崎敦，安田洋祐，横尾真，”地域制約の下での戦略的操作不可能なマッチングメカニズム,” 電子情報通信学会論文誌 D, vol.J97-D, No.8, pp.1336-1346, 2014.