

円盤上の非圧縮流の反転の解析

加藤舞[†] 内藤綾香[†] 横山哲郎[†] 横山知郎[‡]

[†] 南山大学理工学部ソフトウェア工学科 [‡] 京都教育大学教育学部数学科/科学技術振興機構さきがけ

1 はじめに

円盤上の非圧縮流は、血管などのパイプ流や産業機械における軸対称流の近似となっており、産業分野において重要な解析対象である。本研究では、最外境界部をもつ単連結領域上の非圧縮流の反転をトポロジーにのみ着目することで解析を行う。トポロジーにのみ着目することで少量の計算資源でそのダイナミクスの解析が可能である [1] 一方で、流体の特性をどの程度表せるかは未知数である。本研究では、形式言語理論で広く使われている木文法の拡張を用いて、木表現で流線図のトポロジーを表現し、木表現の列で流線図の時間発展を表現する。本アプローチによって、ランダム外力駆動の2次元反転流の数値流体計算における反転現象をどの程度解析できるかを評価する。

本稿では、連続変形できるような流線図を同一視することにする。

2 木文法による非圧縮流の表現

木文法 $G = (S, N, \mathcal{F}, R)$ を定める。ただし、 S は開始記号、 $N = \{S, B_+, B_-, C_+, C_-, C_+^*, C_-^*\}$ は非終端記号の集合、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\epsilon \cup \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_C \cup \{l_+, l_-, \lambda, \lambda_+, \lambda_-, cons(,)\}$ は終端記号の集合、 R は次の生成規則とする：

$$\begin{aligned} S &\rightarrow b_{\theta_+}(B_+, C_+^*) \mid b_{\theta_-}(B_-, C_-^*) \\ B_+ &\rightarrow l_+ \mid b_{++}\{B_+, B_+\} \mid b_{+-}(B_+, B_-) \\ B_- &\rightarrow l_- \mid b_{--}\{B_-, B_-\} \mid b_{-+}(B_-, B_+) \\ C_+ &\rightarrow c_+(B_+, C_+^*) \\ C_- &\rightarrow c_-(B_-, C_-^*) \\ C_+^* &\rightarrow \lambda_+ \mid cons(C_+, C_+^*) \\ C_-^* &\rightarrow \lambda_- \mid cons(C_-, C_-^*) \end{aligned}$$

非終端記号の集合は、その要素から生成される木の根にある記号の種類によって分類される。すなわち、木の根にある記号が、全体の根となり得る場

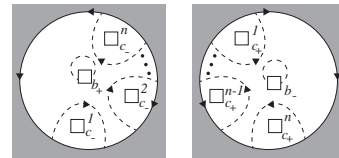


図 1: 基本 2 パターン: 左図 b_{θ_+} , 右図 b_{θ_-}

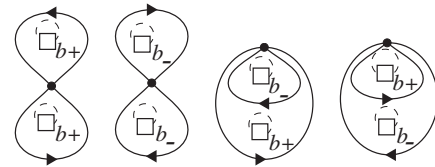


図 2: B 系の流れの構造: 左から b_{++} , b_{--} , b_{+-} , b_{-+}

合 $\mathcal{F}_\epsilon = \{b_{\theta_+}(\cdot, \cdot), b_{\theta_-}(\cdot, \cdot)\}$, B 系の場合 $\mathcal{F}_B = \{b_{++}\{, \}, b_{+-}(\cdot, \cdot), b_{--}\{, \}, b_{-+}(\cdot, \cdot)\}$, および C 系の場合 $\mathcal{F}_C = \{c_+(\cdot, \cdot), c_-(\cdot, \cdot)\}$ である。

生成されたそれぞれの木は、流線図を表す。以降では、根を x とする流れの構造を単に x の流れの構造と呼ぶことにする。流れの構造は再帰的に一意に構成することができる。図 1 に \mathcal{F}_ϵ の要素の流れの構造を示す。ここで、 \square_L^T はホールであり、どの非終端記号から生成される木が入るか流れの向きを表す T とホールを区別するためのラベル L が付いている。ただし、ラベルが無くても文脈から明らかな場合、ラベル L を省略することができる。任意の x と X に対して、 \square_x には X もしくは X^* から生成された木が入ることを表す。 b_{θ_+} は、最外境界部をもち、円盤状の反時計回りの流れを表す。 b_{θ_-} は、 b_{θ_+} と線対称であり、円盤状の時計回りの流れを表す。

図 2 に、 \mathcal{F}_B のすべての要素の流れの構造を示す。例えば、 b_{++} は、内部に $\square_{b_+}^1$ と $\square_{b_+}^2$ の 2 つの流れの構造をもつ。 b_{++} と b_{--} の引数は波かっこで囲む。これは、内部の流れの構造 $\square_{b_+}^1$ と $\square_{b_+}^2$ の順序を変えても構造が変わらない、すなわちその順序が円順序であることを表す。図 3 に、 \mathcal{F}_C のすべての要素の流れの構造を示す。

複合による略記は同順に読むものとする (例: $b_{\pm\pm}$)。

Analysis on Flow Inversion of Incompressible Flow on a Disk

Mai KATO[†], Ayaka NAITO[†], Tetsuo YOKOYAMA[†], and Tomoo YOKOYAMA[‡]

[†]Department of Software Engineering, Nanzan University

[‡]Department of Mathematics, Kyoto University of Education/JST PRESTO

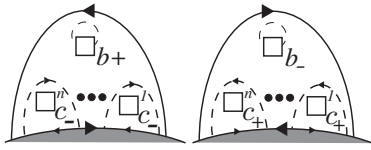


図 3: C 系の流れの構造: 左図 c_+ , 右図 c_-

表 1: 指標 1: 偽陰性と偽陽性

出現時	偽陰性	偽陽性
反転前	3 回/11 回 \Rightarrow 27.3 %	73 回/81 回 \Rightarrow 90.1 %
反転後	1 回/11 回 \Rightarrow 9.1 %	71 回/81 回 \Rightarrow 87.7 %

3 反転の解析

反転前後に b_{++} 又は b_{--} の流線が現れるとする命題について、1500 フレームからなる単連結領域上の非圧縮流の反転の数値シミュレーションの解析を行った。流れの反転の判断は 2 つの指標で行った。

3.1 指標 1 の結果まとめ

指標 1 では、囲む面積が最大である流線の流れの向きを、フレーム全体の流れの向きと判断する。

11 回の反転前後のフレームを解析した。反転前に b_{++} 又は b_{--} 、並びに反転後に b_{++} 又は b_{--} が現れる場合の偽陰性と偽陽性をそれぞれ求めた (表 1)。ただし、 $b_{\pm\pm}$ の流れの構造の両方の円の直径が 0.8 以上 (1 フレームは、 2.0×2.0 の大きさである。) のもののみを考慮した。1500 フレーム中、 $b_{\pm\pm}$ は 81 回出現した。

また、反転前後 3 フレームずつの木表現により 3 パターンの反転規則に分類できた。全反転規則と指標 1 における各発生確率を表 2 に示す。また、図 4 に「基本的な反転」前後 3 フレームずつの 1 例を示す。

3.2 指標 2 の結果まとめ

指標 2 は、正規化角運動量の総和 $S(f)$ を使って流線の流れの向きを、フレーム全体の流れの向きと判断する。 $|S(f)| < 0.3$ の領域にとどまる場合と反転後の 10 フレームは反転と見なさないという判定条件の下での解析結果を表 3 に示す。

さらに、反転するときの規則が指標 2 でも得られた。別の帯域のとり方での反転規則を 2 パターンに分けられた。また、「基本的な反転」である確率が非常に高く、 f のみで帯域は取った場合は「基本的な反転」以外現れなかった。

4 おわりに

指標 1 と指標 2 の両方で反転前後とそれ以外で $b_{\pm\pm}$ が現れることから $b_{\pm\pm}$ のみでは反転を判別することは

表 2: 反転規則と指標 1 における発生確率

	反転規則	発生確率
基本的な反転	$b_{0\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}\}, \square_{cs_{\mp}})$ $\rightarrow b_{0\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}, \square_{b_{\mp}}\}, \square_{cs_{\pm}})$	63.6 %
例外的な反転 1	$b_{0\pm}(l, \square_{cs_{\mp}})$ $\rightarrow b_{0\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}, \square_{b_{\mp}}\}, \square_{cs_{\pm}})$	27.3 %
例外的な反転 2	$b_{0\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}\}, \square_{cs_{\mp}})$ $\rightarrow b_{0\mp}(l, \square_{cs_{\pm}})$	9.1 %

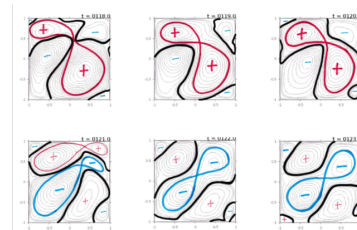


図 4: 基本的な反転

できないと考えられる。しかし、反転するときには前後のどちらかに必ず $b_{\pm\pm}$ が現れる。指標 2 では、反転前には必ず現れることから反転を判断するためには重要な特徴であると考えられる。

本研究では、流れの特徴を十分にとらえたとは言えない。しかし、木表現は語表現よりも流れの特徴を多く捉えることができた。流体の回転を考える場合、流れの向きを考慮し、重複なく表現できる木表現は有効であると考えられる。

謝辞 本研究は 2018 年度南山大学パツヘ研究奨励金 I-A-2, JST PRESTO JPMJPR16ED の支援を受けた。

参考文献

- [1] Yokoyama, T. and Sakajo, T.: Word representation of streamline topologies for structurally stable vortex flows in multiply connected domains, *Proc. Royal Soc. Lond. A*, Vol. 469, No. 2150, pp. 1–18 (online), (2012).

表 3: 指標 2 での偽陰性、偽陽性

判定条件	出現時	偽陰性	偽陽性
$ S(f) < 0.3$	反転前	0 回/9 回 \Rightarrow 0.0 %	100 回/109 回 \Rightarrow 91.7 %
	反転後	2 回/9 回 \Rightarrow 22.2 %	102 回/109 回 \Rightarrow 93.6 %
フレーム幅 10	反転前	0 回/9 回 \Rightarrow 0.0 %	62 回/71 回 \Rightarrow 87.3 %
	反転後	0 回/9 回 \Rightarrow 0.0 %	62 回/71 回 \Rightarrow 87.3 %
$ S(f) < 0.3$ かつ フレーム幅 10	反転前	0 回/11 回 \Rightarrow 0.0 %	98 回/109 回 \Rightarrow 89.9 %
	反転後	2 回/11 回 \Rightarrow 18.2 %	100 回/109 回 \Rightarrow 91.7 %