7B-02

グラフ上の協調経路策定問題の計算複雑性*

村岡 功　　大澤 弘基　　伊藤 健洋　　周 暁†
東北大学 大学院情報科学研究科‡

1 はじめに

協調経路策定問題は，複数のロボットが衝突を避けつつそれぞれの初期位置から目標位置へ移動する経路を策定する問題である．この問題は，ロボットを用いた物流システムなどに応用があり，理論と応用の両面から数多くの研究がなされてきた．

本稿で扱うグラフ上の協調経路策定問題は，次節でその定義を与えるが，ロボットの初期配置 f_α から目標配置 f_β へ高々k ステップで到達可能であるかを判定する問題である．もちろん，ステップ数に制限がなくとも f_α から f_β へ到達できないこともあるが，与えられた 2 つの配置が互いに（ステップ数の制限なしで）到達できるかは線形時間で判定できる [2]．一方で協調経路策定問題は，入力されるグラフを二部グラフや平面グラフ，部分グリッドに制限した場合でも，NP 困難であることが知られている [1, 3, 4]．

本稿では，協調経路策定問題が，最大次数 3 以上のグラフに対して NP 困難であることを示す一方で，最大次数 2 以下のグラフに対しては多項式時間で解けることを示す．したがって本稿では，入力グラフの最大次数の観点から，協調経路策定問題の計算困難性と容易性の境界を明らかにする．ただし本稿では，紙面の都合上，各結果の証明の概略だけを記す．

2 協調経路策定問題

$G = (V, E)$ を n 頂点の単純無向連結グラフとし，$R = \{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$ を p 個のロボット集合とする．ロボットの**配置**は，単射 $f : R \to V$ として与える．本稿を通して，入力されるロボットの初期配置と目標配置をそれぞれ f_α と f_β で表す．

各時刻 $t \in \mathbb{N}$ において，全てのロボットは同時に移動または待機を行う．ロボットが**待機**する場合には，時刻 $t-1$ に配置されていた頂点にそのまま留まるものとする．ロボットが**移動**する場合には，時刻 $t-1$ に配置されていた頂点とグラフ上で隣接する頂点に移動することができる．次の性質を全て満たす $F = \langle f_0, f_1, \ldots, f_\ell \rangle$ を **f_0 から f_ℓ への移動系列**と呼び，ℓ をその**ステップ数**と呼ぶ．図 1 も参照されたい．

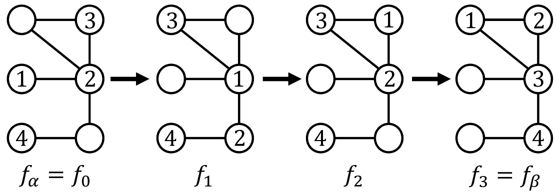

図 1: 初期配置 f_α から目標配置 f_β への移動系列の例．ここで，各ロボットは数字で表され，その位置は頂点の中に書かれている．

- $f_0, f_1, \ldots, f_\ell$ は，いずれもロボットの配置である．すなわち，1 つの頂点には高々1 つのロボットしか存在しない．
- 各時刻 $t \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ において，どのロボットも移動または待機を行っている．すなわち，どのロボット $r \in R$ に対しても，$f_{t-1}(r)f_t(r) \in E$ または $f_t(r) = f_{t-1}(r)$ が成り立つ．
- 各時刻 $t \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ において，移動するどのロボットもすれ違わない．すなわち，どの 2 台のロボット $r, r' \in R$ に対しても，$f_{t-1}(r)f_t(r) \neq f_t(r')f_{t-1}(r')$ が成り立つ．

配置 f から f' への移動系列が存在するとき，配置 f と f' は互いに**到達可能**であるという．

協調経路策定問題は，グラフ G，ロボット集合 R，初期配置 f_α，目標配置 f_β，非負整数 k が入力として与えられたとき，ステップ数が高々k であるような f_α から f_β への移動系列が存在するかを判定する問題である．

3 NP 困難性

本節では次の定理を与える．

定理 1. $\Delta \geq 3$ を任意の定数とする．最大次数 Δ のグラフに対して，協調経路策定問題は NP 困難である．

---

*Complexity of the cooperative routing problem on graphs
†Kou Muraoka, Hiroki Osawa, Takehiro Ito, Xiao Zhou
‡Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

我々は，定理 1 の証明として，3SAT 問題から本問題への多項式時間帰着を与えた．その帰着では，3SAT 問題の変数や節に対応するロボットを用意し，3SAT 問題の解 (YES/NO) が初期配置 f_α から目標配置 f_β への移動系列のステップ数から判定できるようにした．

4 多項式時間アルゴリズム

本節では，協調経路策定問題が最大次数 2 以下のグラフに対しては多項式時間で解けることを示す．入力グラフは連結であるから，最大次数 2 以下のグラフは，パスまたはサイクルである．したがって，それぞれが多項式時間で解けることを定理 2 と定理 3 で示す．

どのロボットも他のロボットとすれ違うことができないため，グラフ G がパスまたはサイクルであるとき，初期配置 f_α と目標配置 f_β では，ロボットが G 上に現れる順序が一致していなければならない．実際，グラフがパスまたはサイクルである場合には，これが f_α と f_β が互いに到達可能であるための必要十分条件である．この必要十分条件は線形時間で判定できるため，以下では，f_α と f_β は互いに到達可能であるとする．

4.1 パスに対するアルゴリズム

本小節では，パスを扱い，次の定理を与える．

定理 2. パスに対する協調経路策定問題は，線形時間で解ける．

初期配置 f_α から目標配置 f_β への移動系列のうち，その最小のステップ数を $\mathsf{OPT}(f_\alpha, f_\beta)$ と書く．また，各ロボット $r \in R$ に対し，$\mathsf{dist}(r)$ を頂点 $f_\alpha(r)$ と頂点 $f_\beta(r)$ を結ぶパスに含まれる辺数とする．定理 2 の証明として，我々は線形時間で計算できる次の式 (1) が成り立つことを示す．

$$\mathsf{OPT}(f_\alpha, f_\beta) = \max_{r \in R} \mathsf{dist}(r). \tag{1}$$

まず，$\mathsf{OPT}(f_\alpha, f_\beta)$ の下界を示す．f_α から f_β への任意の移動系列において，各ロボット $r \in R$ は少なくとも $\mathsf{dist}(r)$ だけは移動することに気づこう．これは $\mathsf{dist}(r)$ が，頂点 $f_\alpha(r)$ と頂点 $f_\beta(r)$ を結ぶ（最短の）パスに含まれる辺数であることからわかる．したがって，$\mathsf{OPT}(f_\alpha, f_\beta) \geq \max_{r \in R} \mathsf{dist}(r)$ が得られる．

次に，$\mathsf{OPT}(f_\alpha, f_\beta)$ の上界を示すため，我々はアルゴリズム $\mathcal{A}$ を与える．$\mathcal{A}$ では，$f_\alpha(r) = f_\beta(r)$ である各ロボット $r \in R$ は待機し続け，$f_\alpha(r') \neq f_\beta(r')$ である各ロボット $r' \in R$ は目標方向に向けて一方向に動き続けた後，$f_\beta(r')$ に到達したら待機し続ける．したがって，$\mathcal{A}$ はステップ数が $\max_{r \in R} \mathsf{dist}(r)$ であるような f_α から f_β への移動系列を出力する．以上より，$\mathsf{OPT}(f_\alpha, f_\beta) \leq \max_{r \in R} \mathsf{dist}(r)$ が示された．

4.2 サイクルに対するアルゴリズム

本小節では，サイクルを扱い，次の定理を与える．

定理 3. サイクルに対する協調経路策定問題は，多項式時間で解ける．

定理 3 の証明に用いるアイディアを述べる．ステップ数が最小となるような初期配置 f_α から目標配置 f_β への移動系列では，サイクル上を時計回りまたは反時計回りの一方向にしか移動しないロボットが少なくとも一台は存在することが証明できる．そのようなロボットを**主ロボット**と呼ぶ．どのロボットも他のロボットとすれ違うことができないため，この主ロボットの移動方向が定まれば，その他全てのロボットの移動方向も一意に定めることができる．すなわち，主ロボットとその移動方向が決まれば，その条件下で最短となる f_α から f_β への移動系列を一つ決めることができる．我々のアルゴリズムは，全てのロボット $r \in R$ を主ロボットとして試し，その移動方向も時計回りと反時計回りの両方向を試す．これにより $\mathsf{OPT}(f_\alpha, f_\beta)$ が多項式時間で計算できるため，定理 3 が証明される．

参考文献

[1] J. Banfi, N. Basilico and F. Amigoni, Intractability of time-optimal multirobot path planning on 2D grid graphs with holes, IEEE Robotics and Automation Letters 2(4), pp. 1941–1947, 2017.

[2] J. Yu and D. Rus, Pebble motion on graphs with rotations: efficient feasibility tests and planning algorithms, Algorithmic Foundations of Robotics XI, Springer Tracts in Advanced Robotics 107, pp. 729–746, 2015.

[3] J. Yu and S.M. LaValle, Optimal multi-robot path planning on graphs: structure and computational complexity, arXiv:1507.03289, 2015.

[4] J. Yu, Intractability of optimal multirobot path planning on planar graphs, IEEE Robotics and Automation Letters 1(1), pp. 33–40, 2016.