

## 平面 Magic Graph の2つの双対性について

杉山 雅英 (会津大学)

**1. まえがき** Sedláček (1963) [1] が Magic Graph 問題を提起して以来, 平面グラフにおける Magic Graph についても検討されてきた [2][3]. 本論文では平面グラフに対する Magic Graph の双対性について述べる [4].

**2. Magic Graph と双対** 連結平面グラフの集合  $\wp$  のグラフ  $G = V \cup E \cup F$  から自然数の集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  の分割への写像  $\lambda : G \rightarrow 2^{\{1, 2, \dots, n\}}$  に対して重みを式 (1) で定義する.

$$\lambda^*(z) = \lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in Z^c}} \lambda(w) \quad (z \in Z) \quad (1)$$

ここで  $V, E, F$  はグラフの頂点・辺・面 (領域) の集合で,  $Z = V|E|F$  であり, 例えば  $Z = V$  の時,  $Z^c = E \cup F$  で, 式 (1) の右辺の第2項の  $w$  は頂点  $z$  を共有する全ての辺と面である.  $\lambda^*(z)$  が全ての  $z \in Z$  に対して一定値  $S$  の時,  $G$  及び  $\lambda$  を  $Z$  Magic graph (label) と呼び,  $S = \sigma(\lambda)$  を定和と呼び,  $Z = V, E, F$  に応じて Vertex Magic (VM), Edge Magic (EM), Face Magic (FM) と呼ぶ.  $V, E, F$  に置く数字の個数が  $m_v, m_e, m_f (\geq 0)$  の時,  $\mathbf{m} = [m_v, m_e, m_f]$  型<sup>1</sup> と呼ぶ.  $v = |V|, e = |E|, f = |F|$  とすると  $n = m_v v + m_e e + m_f f$  である.  $G$  上の  $\mathbf{m}$  型  $Z$  Magic label  $\lambda$  の全体を  $\Lambda_{\mathbf{m}}^Z(G)$  で表す.

関数  $r(x) = n + 1 - x$  と  $\lambda(z)$  との合成を  $(r \circ \lambda)(z) = \{r(x) \mid x \in \lambda(z)\}$  で定義する.  $r(x)$  は昇順降順変換で線形であるので  $\lambda \in \Lambda_{\mathbf{m}}^Z(G)$  であれば  $r \circ \lambda \in \Lambda_{\mathbf{m}}^Z(G)$  である. Magic Graph の研究では  $r(x)$  による変換を双対と呼んでいる. 本論文では  $r$  双対と呼ぶことにする. 命題1の定和に関する双対性が成り立つ.

**命題 1 定和の双対性**  $\lambda \in \Lambda_{\mathbf{m}}^Z(G)$  で  $Z = V$  の時は頂点次数  $d^{(v)}$ ,  $Z = F$  の時は面次数  $d^{(f)}$  が一定であれば式 (2) が成り立つ.

$$\sigma(\lambda) + \sigma(r \circ \lambda) = (n + 1)m \quad (2)$$

$$m = \begin{cases} m_v + d^{(v)}m_e + d^{(v)}m_f, & (Z = V) \\ 2m_v + m_e + 2m_f, & (Z = E) \\ m_f + d^{(f)}m_v + d^{(f)}m_e, & (Z = F) \end{cases}$$

$G \in \wp$  の幾何的双対グラフ  $\hat{G} \in \wp$  を対応させる写像 (変

換) を  $\rho$  とする. ここで幾何的双対グラフ  $\hat{G} = \hat{V} \cup \hat{E} \cup \hat{F}$  とは与えられた平面グラフ  $G = V \cup E \cup F$  に対し, その外面も含む各面  $f_i$  に新たな頂点  $\hat{v}_i \in \hat{V}$  を対応させ, グラフ  $G$  で辺  $e_j$  に隣り合う面  $f_k, f_l$  に対応する頂点同士  $\hat{v}_k, \hat{v}_l$  を辺  $\hat{e}_j$  で結んで得られるグラフである. 写像  $\rho$  は平面グラフを平面グラフに対応させるので  $\rho$  の変換であり, 本論文では  $\rho$  双対変換と呼ぶ.

**命題 2 平面グラフの双対変換**  $G \in \wp$  の幾何的双対グラフ  $\hat{G} \in \wp$  を対応させる写像  $\rho : \wp \rightarrow \wp$  ( $\rho(G) = \hat{G}$ ) は  $G, \hat{G}$  の頂点・辺・面の個数を  $v, e, f$  及び  $\hat{v}, \hat{e}, \hat{f}$  とすると  $\hat{v} = f, \hat{e} = e, \hat{f} = v$  であり,  $\rho^2 : \wp \rightarrow \wp$  は平面同型である.

正4面体は自分自身と, 正6面体と正8面体, 正12面体と正20面体が  $\rho$  双対である.  $\lambda \in \Lambda_{\mathbf{m}}^Z(G)$  と  $\rho$  の合成  $\lambda \circ \rho$  を  $(\lambda \circ \rho)(z) = \lambda(\rho(z))$  ( $z \in \hat{G}$ ) で定義する.

**命題 3  $\rho$  双対を用いた ZM の構成**  $\lambda \in \Lambda_{\mathbf{m}}^Z(G)$  であれば双対変換  $\rho : \hat{G} \rightarrow G$  を用いて  $\Lambda_{\hat{\mathbf{m}}}^{\hat{Z}}(\hat{G})$  を構成できる. 定和は同一  $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda \circ \rho)$  であり,  $\hat{Z}, \hat{\mathbf{m}}$  は以下で与えられる.

$$\hat{Z} = \begin{cases} F & (Z = V), \\ E & (Z = E), \\ V & (Z = F), \end{cases} \quad \hat{\mathbf{m}}^t = \begin{bmatrix} m_f \\ m_e \\ m_v \end{bmatrix}$$

図1に正6面体  $[0, 1, 1]$  FM とその  $\rho$  双対の正8面体  $[1, 1, 0]$  VM を示す. 図中の赤色は和を求める数字を例示している. 任意の  $\lambda \in \Lambda_{\mathbf{m}}^Z$  に対して  $\rho$  双対と  $r$  双対は結合律  $(r \circ \lambda) \circ \rho = r \circ (\lambda \circ \rho)$  を満たす.

**3. ZM 非存在定理と定和双対性** 命題4を用いて平面グラフに対する ZM の非存在定理が導かれる.

**命題 4 ZM の定和方程式** ZM の定和  $S^{(Z)}$  は式 (3) を満たす.  $Z = V|F$  の時,  $Z^c$  は  $V, F$  を入れ替えた集合とする.

$$|Z|S^{(Z)} = N + \begin{cases} S_E + \sum_{z \in Z^c} (d_z - 1)\lambda(z) & (Z = V|F) \\ \sum_{z \in V \cup F} (d_z - 1)\lambda(z) & (Z = E) \end{cases} \quad (3)$$

<sup>†</sup> Two Duality on Plane Magic Graphs, M. Sugiyama (The Univ. of Aizu)

<sup>1</sup>Lih[2] は (a, b, c) 型と呼んでいる.

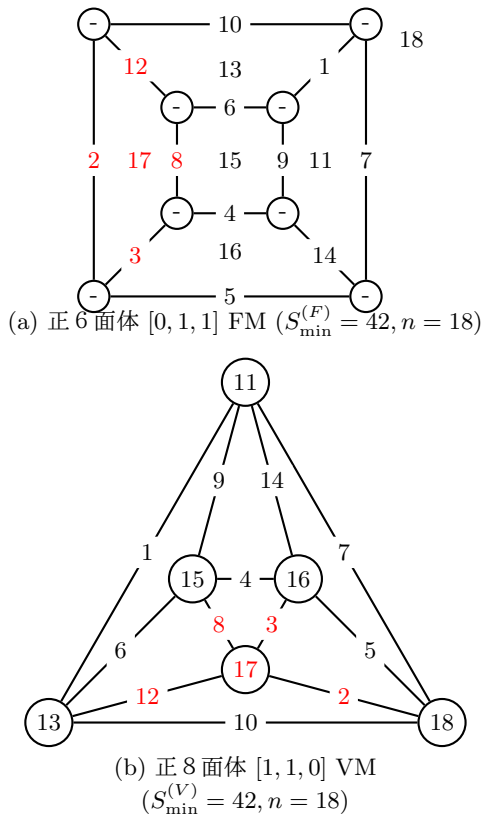


図 1:  $\rho$  双対で得られる Magic Graph の例

**定理 1 ZM の非存在定理**  $G$  において  $|Z|$  が偶数で以下のいずれかの条件を満たし,  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  であれば ZM は存在しない.

1.  $Z = E$  とする.  
(例: 正 4,12,20 面体  $[0, 1, 1], [1, 1, 0]$  EM)
  - (a) 全ての頂点及び面の次数が奇数
  - (b)  $m_f = 0$  かつ全ての頂点次数が奇数
  - (c)  $m_v = 0$  かつ全ての面の次数が奇数
2.  $Z = V|F$  とする.  $m_e = 0$  で次数  $d_z (z \in Z^c)$  が奇数の場合 (例: 正 8 面体  $[1, 0, 1]$  VM)

簡単化して  $G$  を正則かつ面次数一定とすると VM の上限・下限は式 (4) で与えられる. 命題 3 から FM の上限・下限は  $v, f, (V, F)$  を入れ替えることで得られる.

$$\begin{cases} v \cdot S_{\sup}^{(V)} = (d^{(f)} - 2)(nm_f f - \frac{m_f f(m_f f - 1)}{2}) \\ \quad - \frac{m_v v(m_v v + 1)}{2} + 2N \\ v \cdot S_{\inf}^{(V)} = (d^{(f)} - 2) \frac{m_f f(m_f f + 1)}{2} \\ \quad - (nm_v v - \frac{m_v v(m_v v - 1)}{2}) + 2N \end{cases} \quad (4)$$

定和の実現可能な区間  $[[S_{\inf}], [S_{\sup}]]$  の全ての値に対して ZM を構成できるとは限らない. 式 (4) 等の定和の

上限・下限が整数値でその区間の全ての値に対して ZM を構成可能の時, Perfect, 両端を含めて  $\delta > 0$  の等差数列となる定和が構成できる場合を  $\delta$ -Perfect, 両端は構成できないが他は全て構成できる場合を SemiPerfect, 実現可能な区間に不規則に実現できない定和が出現する場合を Singular と定義した [6]. SAT ソルバーを用いて ZM の解探索を行う. 表 1 に  $\mathbf{m} = [0, 1, 1]$  等に対する正多面体の VM, EM, FM 定和の分布を示す. ここで “30:36 S” は式 (4) 等で与えられる定和の実現可能な下限・上限, 及び定和 30, 33, 36 が実現できないので定和分布が S (Singular) であることを示している. 表 1 から例えば正 6 面体  $[0, 1, 1]$  VM・正 8 面体  $[1, 1, 0]$  FM などの定和の分布の双対性の成り立つことが分かる.

#### 4. むすび

本論文では平面グラフに対する Magic Graph を統一的に扱う定和方程式を導き ZM の非存在定理を示し, 定和の分布の双対性を示した.

**謝辞** 平面グラフについて議論していただいた浅井和人, 浅井信吉, 西館陽平博士 (会津大) に感謝します.

#### 参考文献

- [1] J. Sedláček, Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163-164 (June 1963).
- [2] Ko-Wei Lih, On Magic and Consecutive Labelings of Plane Graphs, Utilitas Math., 24, pp.165-197 (1983).
- [3] M. Bača, et al, A Survey of Face-Antimagic Evaluations of Graphs, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 69 (3), pp.382393 (2017).
- [4] 杉山 雅英, 平面グラフの Magic Graph の性質, IPSJ 東北支部研究会, No.2018-3-5 (2018-12).
- [5] 杉山雅英, Magic Graph の一般化とその性質, IPSJ 論文誌, Vol. 59, No.6, pp.1394-1404 (2018-06).
- [6] 杉山雅英, Magic graph における定和の Perfect 性の伝搬と正多面体への適用, IPSJ 論文誌投稿中.

表 1: 正多面体の VM, EM, FM 定和の分布

$\mathbf{m} = [0, 1, 1]$	VM	EM	FM
正 4 面体	30:36 S	13:20 NX	19:25 S
正 6 面体	48:66 P	20:37 NX	42:53 SP
正 8 面体	76:92 P	24:39 S	36:48 P
正 1 2 面体	102:156 3-P	41:88 NX	114:144 P
正 2 0 面体	230:280 P	57:96 NX	87:117 P
$\mathbf{m} = [1, 0, 1]$	VM	EM	FM
正 4 面体	14:22 S	18:18 P	14:22 S
正 6 面体	21:39 3-P	28:32 S	30:45 NX
正 8 面体	30:45 NX	28:32 S	21:39 3-P
正 1 2 面体	42:90 P	58:74 NX	79:119 P
正 2 0 面体	79:119 P	58:74 NX	42:90 P
$\mathbf{m} = [1, 1, 0]$	VM	EM	FM
正 4 面体	19:25 S	13:20 NX	30:36 S
正 6 面体	36:48 P	24:39 S	76:92 P
正 8 面体	42:53 SP	20:37 NX	48:66 P
正 1 2 面体	87:117 P	57:96 NX	230:280 P
正 2 0 面体	114:144 P	41:88 NX	102:156 3-P

P: Perfect, 3-P:  $\delta$ -Perfect( $\delta = 3$ ), SP: SemiPerfect, S: Singular, NX: 非存在