6B-01

グラフ上のパケットルーティング問題のパラメータ複雑性に関する研究*

菊池 正太, 鈴木 顕, 伊藤 健洋, 周 暁†

東北大学 大学院情報科学研究科‡

1 パケットルーティング問題

今日のデータ通信において，情報はパケットに分割されて伝送される．パケットとは，一定サイズのデータに送信元や受信先等の情報が付加されたものである．パケットを用いた効率の良い通信を行うためには，通信回線の容量やコンピュータのバッファサイズ，パケットの伝送時間など様々な制限の下で，パケット伝送を制御する必要がある．これまでも様々な設定の下で，伝送できるパケット数を最大化するスケジューリングを求めるパケットルーティング問題が研究されてきた [1, 3].

パケットルーティング問題では，コンピュータ等をグラフの頂点に，回線をグラフの有向辺に対応させることで，通信ネットワークを有向グラフ $G=(V,A)$ にモデル化する．加えて，2 つの整数 $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $c \in \mathbb{N}$ が与えられる．ここで，$\mathbb{N}$ は正の整数全体の集合であり，b は全ての頂点に共通のバッファサイズを表し，c は全ての辺に共通の回線容量を表す．さらに，パケットの集合 $P=\{1,2,\ldots,p\}$ が与えられる．各パケット $i \in P$ は，送信元ノード $s_i \in V$，受信先ノード $t_i \in V$，発生時刻 $r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，締切時刻 $d_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ という 4 つの情報をもつ．

各パケット $i \in P$ は，時刻 r_i から時刻 d_i の間であれば，任意の時刻に送信元ノード s_i に出現させることができる．その出現させた時刻を含め，我々はグラフ上の各パケットに対して，それぞれの時刻 $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で，以下の 3 つの挙動から 1 つを選択し，実行する．

移動 頂点 v にあるパケットを辺 (v,u) を通して頂点 u に移動させる．ただし，どの時刻でも各辺を同時に移動できるパケットの数は高々c 個である．

待機 頂点 v にあるパケットを頂点 v に待機させる．ただし，どの時刻でも各頂点で同時に存在できるパケットの数は高々b 個であり，受信先ノードに到達したパケットはその数には含まれない．

破棄 グラフ上からパケットを取り除く．なお．一度破棄されたパケットはグラフ上に戻ることはない．

受信先ノード t_i に到達するか，締切時刻 d_i が過ぎた場合は，パケット i をグラフ上から取り除く．このように全てのパケットの各時刻における挙動を決定することを**スケジューリング**という．**パケットルーティング問題**とは，受信先ノードに到達できるパケット数を最大化するスケジューリングを求める問題である．パケットルーティング問題は，入力グラフをパスとし，$c=1$ とした場合でも，NP 困難である [1]．これまでは，オンラインアルゴリズムや近似アルゴリズムの研究が進められてきた [1, 4].

本稿では，解の厳密性を保証するため，パラメータ複雑性の観点から研究に取り組む．スパン，スラック，送信元ノード数，受信先ノード数，パケット数，締切時刻の最大値といった様々なパラメータを対象として，そのパラメータ非容易性と容易性を解析した．ここで，スパンは各パケットの送信元ノードと受信先ノードの距離の最大値であり，スラックは各パケットの発生時刻と締切時刻の差から，そのパケットの送信元ノードと受信先ノードの距離を引いたものの最大値である．パケットが送信元ノードから受信先ノードに移動するには，少なくともその距離分の時間が必要になるため，スラックは直感的にはパケットの時間的な自由度を表すパラメータである．本稿ではスペースの都合上，各定理の証明は省略する．

2 パラメータ非容易性

本節では，パラメータ非容易性を示す．まず，スパン，スラック，送信元ノード数，受信先ノード数をそれぞれパラメータとした際の非容易性について，下記の定理 1–3 の通り示した．なお，いずれの定理も，3SAT からの多項式時間帰着によって示した．

*Parameterized complexity of the packet routing problem on graphs

†Shota Kikuchi, Akira Suzuki, Takehiro Ito, Xiao Zhou

‡Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

定理 1 パスに対するパケットルーティング問題は，バッファサイズ $b = 0$ かつスパンが 2 であっても NP 困難である．

定理 2 スターに対するパケットルーティング問題は，スラックが 2 であっても NP 困難である．

定理 3 スターに対するパケットルーティング問題は，送信元ノード数または受信先ノード数のどちらかが 2 であっても NP 困難である．

これらの定理 1–3 では，各パラメータが定数であってもパケットルーティング問題が NP 困難であることを示している．したがって，P $\neq$ NP の仮定の下では，これらのパラメータに対しては，XP アルゴリズムさえ存在しないといえる．

一方で，入力グラフを木，送信元ノード数または受信先ノード数のどちらかが 1 に制限された場合には，パケットルーティング問題は多項式時間で解ける [3]．したがって，定理 3 によって，木における多項式時間求解性について，送信元ノード数（または受信先ノード数）に関する容易性と困難性の境界が示されたといえる．

次に，パケット数と締切時刻の最大値をそれぞれパラメータとした際の非容易性について，下記の定理 4 と定理 5 の通り示した．なお，定理 4 はクリーク問題からのパラメータ化帰着によって，定理 5 は 3SAT からの多項式時間帰着によって示した．

定理 4 パケットルーティング問題は，パケット数 p をパラメータとして W[1] 困難である．

定理 5 パケットルーティング問題は，締切時刻の最大値 d が 3 であっても NP 困難である．

3 パラメータ容易性

本節ではまず，パスに対するパケットルーティング問題において，パケット数 p をパラメータとする FPT アルゴリズムを与える．ただし，次の定理 6 では，パケットが一度訪れた頂点に戻ってはいけないという仮定をおく．このような仮定をおいた FPT アルゴリズムではあるものの，定理 4 より FPT $\neq$ W[1] の仮定の下では，一般にはパケット数 p をパラメータとする FPT アルゴリズムは存在しなかったことを思い出そう．

定理 6 パスに対するパケットルーティング問題において，パケットが一度訪れた頂点に戻ってはいけないという仮定をおく．このようなパケットルーティング問題は，バッファサイズ $b = 0$ であれば $O(4^p p^2(n+p))$ 時間で解け，$b \geq 1$ であれば $O(p^{2p+1}(n+p)^2)$ 時間で解ける．

本節では次に，入力グラフに制限がない一般の場合に，パケット数 p と締切時刻の最大値 d の両方をパラメータとする FPT アルゴリズムを与える．先の定理 6 とは違い，次の定理 7 では，パケットが一度訪れた頂点に戻ってもよいという点に注意されたい．

定理 7 パケットルーティング問題には，$p + d$ をパラメータとした FPT アルゴリズムが存在する．ここで，p はパケット数，d は締切時刻の最大値を表す．

定理 7 の FPT アルゴリズムは，まずパケットルーティング問題を最大辺素パス問題にパラメータを保持したまま帰着させた後，その対応するインスタンスに対して既存の FPT アルゴリズム [2] を適用することで構築した．

一方で定理 4 より FPT $\neq$ W[1] の仮定の下では，パケット数 p 単独をパラメータとする FPT アルゴリズムは存在せず，また定理 5 より P $\neq$ NP の仮定の下では，締切時刻の最大値 d 単独をパラメータとすると XP アルゴリズムさえ存在しないといえたことを思い出そう．

参考文献

[1] M. Adler, A.L. Rosenberg, R.K. Sitaraman and W. Unger, Scheduling time-constrained communication in linear networks. Theory of Computing Systems 35(6), pp. 599–623, 2002.

[2] P.A. Golovach and D.M. Thilikos, Paths of bounded length and their cuts: parameterized complexity and algorithms. Proc. of IWPEC 2009, LNCS, vol. 5917, pp. 210–221, 2009.

[3] J.Y.-T. Leung, T.W. Tam and G.H. Young, On-line routing of real-time messages. J. Parallel and Distributed Computing 34(2), pp. 211–217, 1996.

[4] H. Räcke and A. Rosén, Approximation algorithms for time-constrained scheduling on line networks. Theory of Computing Systems 49(4), pp. 834–856, 2011.