

# 等価組織を除外した織物組織図の数え上げ —たて糸本数とよこ糸本数がともに素数の場合

松浦 勇<sup>1,a)</sup>

受付日 2018年8月13日, 採録日 2019年1月15日

**概要:** よこ糸本数  $m$ , たて糸本数  $n$  からなる織物組織  $W$  を考える. 一般に織物組織の個数は,  $m$  と  $n$  が大きくなるにつれて指数関数的に増加する.  $m, n$  の関数として織物組織の個数を与える数式が知られているが, この式は等価組織を除外せずに数えている. ここで, 織物組織  $W$  と  $W'$  が等価であるとは,  $W$  を単位としてそれを繰り返して製織される織物の模様と,  $W'$  を単位としてそれを繰り返して製織される織物の模様が一致する場合をいう. 等価組織を除外するために, 先行研究では特定の  $m, n$  に対して計算機を用いて織物組織の数え上げを行っている. これらの研究で, 数え上げの対象としている織物組織のよこ糸本数とたて糸本数の積  $mn$  の最大値は 36 (よこ糸 6 本, たて糸 6 本) である. 本論文では,  $m, n$  がともに素数の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を与える式を示す.

キーワード: 織物組織図, 数え上げ, 等価組織

## Counting Non-equivalent Weave Diagrams —When the Numbers of Warp and Weft Yarns are Prime

ISAMU MATSUURA<sup>1,a)</sup>

Received: August 13, 2018, Accepted: January 15, 2019

**Abstract:** In this paper, we count the number of weave diagrams consisting of  $m$  weft yarns and  $n$  warp yarns. The number of weave diagrams increases exponentially with  $m$  and  $n$ . An equation is known for counting the number of weave diagrams, but this equation counts the number including equivalent weave diagrams. Weave diagrams  $W$  and  $W'$  are equivalent if both generate fabrics of the same pattern. In preceding researches, a computer is used for counting the number of weave diagrams in order to exclude equivalent weave diagrams. The weave diagrams so far investigated are of particular (not general) size and the maximum product of  $m$  and  $n$  is 36 ( $m = 6, n = 6$ ). In this paper, we give an equation that counts the number of non-equivalent weave diagrams for the case that both  $m$  and  $n$  are prime numbers.

**Keywords:** weave diagram, counting, equivalent weave diagram

### 1. はじめに

織物の設計者は, 製造する織物が満たすべき実用性能, 審美性, 生産性などを考慮して, 糸の素材, 太さ, 糸の密度などととも, 適切な織物組織を選択している. 織物組織とは, たて糸とよこ糸の交錯の状態を表しており, 平織,

綾織, 朱子織が三原組織と呼ばれ, 最も基本的な織物組織である. さらに, 三原組織を基本に発展した変化組織, 多重組織などが多数考案されている. 本論文の目的は, 与えられたたて糸本数とよこ糸本数で構成される, 等価組織を除外した織物組織の個数を数え上げることである. ここで, 等価組織とは, 織物を製造すると同一の模様となる織物組織のことである. これは, 織物組織の性質を考察するうえで基礎的なことからである.

<sup>1</sup> あいち産業科学技術総合センター  
Aichi Center for Industry and Science Technology,  
Ichinomiya, Aichi 491-0931, Japan

a) isamu\_matsuura@aichi-inst.jp

本論文の一部は研究会および繊維機械学会年次大会で発表されている [1], [2].

これまで、よこ糸本数  $m$ 、たて糸本数  $n$  の関数として織物組織の個数を与える数式が知られているが、この式では、等価組織を除外せずに数えている。等価組織を除外するために、従来の研究では、特定の  $m, n$  に対して計算機を用いて織物組織の数を上げを行っている。これらの研究で数え上げの対象としている織物組織のたて糸本数とよこ糸本数の積  $mn$  の最大値は 36 (よこ糸 6 本、たて糸 6 本) である。本論文では、よこ糸本数  $m$  とたて糸本数  $n$  がともに素数の場合の、等価組織を除外した織物組織の個数を数え上げる数式を示す。具体的には、 $m \neq n$  と  $m = n$  の 2 つの場合に分けて、2 つの式を示す。さらに、実際に  $m \leq 7, n \leq 7$  の場合の織物組織の個数を計算した結果を示す。

本論文の構成は次のとおりである。2 章で先行研究の概要について解説し、議論に必要ないくつかの定理を示す。3 章で織物組織を数え上げる数式を示し、実際に数え上げた結果を示す。4 章はまとめである。

## 2. 準備

### 2.1 組織図とブール行列

織物における糸の交錯の状態は、通常、たて糸本数、よこ糸本数で表される大きさを 1 つの単位として、その繰返しとなっている。その最小単位を完全組織と呼ぶ。図 1 の織物では、黒で示すたて糸 3 本、白色で示すよこ糸 3 本からなる完全組織が繰返されている。

完全組織における糸の交錯の状態は、織物組織図 (以下、組織図と呼ぶ) で表現される。たて糸がよこ糸の上を通っている交差点 (たて糸浮き) を ■ で表し、よこ糸がたて糸の上を通っている交差点 (よこ糸浮き) を □ で表す。組織図は同一織物内でも位置のとり方によって違って見える。これらを本論文では等価組織と呼ぶ (文献 [3] では第一種等価組織と呼んでいる)。図 1 の織物の 3 通りの等価組織を図 2 に示す。組織図  $D$  と  $D'$  が等価組織であるとする、 $D'$  は  $D$  を 2 次元的に循環シフトして得られたものになっている (これについては後で詳しく述べる)。

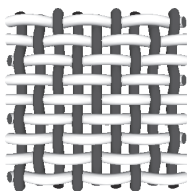


図 1 織物における糸の交錯

Fig. 1 Yarn interlacement in fabric.

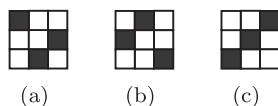


図 2 等価組織図

Fig. 2 Equivalent weave diagrams.

各要素が 0 または 1 である行列をブール行列と呼ぶ。本論文では組織図  $D$  をブール行列  $W$  で表す (組織図における ■ と □ をそれぞれ 1 と 0 で表す)。また、組織図  $D$  とブール行列  $W$  を同一視することもある。 $m$  行  $n$  列のブール行列  $W$  において、 $W$  の  $i$  行目の行ベクトルを  $W_{i*}$ 、 $j$  列目の列ベクトルを  $W_{*j}$  で表す。ブール行列において、すべての要素が 0 である行 (列) を **0 行 (0 列)** と呼ぶ。また、すべての要素が 1 である行 (列) を **1 行 (1 列)** と呼ぶことにする。**0 行 (0 列)** と **1 行 (1 列)** をナル行 (ナル列) と呼ぶ。ナル行 (ナル列) は交錯しないよこ糸 (たて糸) に対応する。組織図はナル行とナル列をともに含まない。また、 $m \geq 2, n \geq 2$  である。

組織図  $W$  により生成される織物  $\mathcal{W}$  も  $m'$  行  $n'$  列のブール行列と見なす ( $m' \gg m, n' \gg n$ )。  $\mathcal{W}$  は  $W$  を格子状に繰返してできている。  $\mathcal{W}$  において、  $W$  を  $W_{0,0}$  と表し、  $W_{0,0}$  の右隣に繰返される  $W$  のコピーを  $W_{0,1}, W_{0,2}, \dots, W_{0,k}, \dots$  と表記する。  $W$  の真下の  $W$  のコピーを  $W_{1,0}$  と表記し、  $W_{1,0}$  の右隣に繰返される  $W$  のコピーを  $W_{1,1}, W_{1,2}, \dots, W_{1,k}, \dots$  と表記する。  $W$  の  $(0,0)$  要素を  $W$  の始点と呼ぶことにすると、  $W$  の始点が  $\mathcal{W}$  の  $(0,0)$  要素であり、  $W_{0,k}$  の始点が  $\mathcal{W}$  の  $(0, kn)$  要素である。  $\mathcal{W}$  の  $(s,t)$  要素を始点とする  $m$  行  $n$  列の行列 ( $\mathcal{W}$  の小行列) を  $\mathcal{W}^{[s,t]}$  と表記する。

### 2.2 先行研究

Gu and Greenwood [4] は、  $m$  と  $n$  の関数として織物組織の個数  $N$  を与える数式を次のようにして得た。  $m$  行  $n$  列のブール行列のすべての場合の数は  $I = 2^{mn}$  である。  $A$  をナル行とナル列の両方を含む場合の数とする。また、  $B$  を、ナル行を含み、かつナル列を含まない場合の数とする。さらに、  $C$  を、ナル列を含み、かつナル行を含まない場合の数とする、  $I = A + B + C + N$  である (ただし、  $N$  には等価組織が含まれている)。 よって

$$N = (B + N) + (C + N) - I + A \tag{1}$$

$$= (2^m - 2)^n + (2^n - 2)^m - 2^{mn} + A$$

である。  $A$  は包除原理により次式のように計算される。

$$A = 2 \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^m (-1)^{q+r} \frac{n! m!}{q! r! (n-q)! (m-r)!} 2^{(n-q)(m-r)} \tag{2}$$

交錯しないたて糸 (**0 列**) を含む場合、交錯しないよこ糸は **0 行** に限られる。同様に、交錯しないたて糸 (**1 列**) を含む場合、交錯しないよこ糸は **1 行** に限られる。式 (2) 右辺先頭の 2 は、これらの 2 通りの場合を表している。式 (1) に  $m = 4, n = 4$  を代入すると、  $N = 22,874$  が得られる。ここから等価組織を除外すると、1,446 となる [3]。つまり式 (1) で与えられる織物の個数と、等価組織を除外し

た織物の個数には大きな差がある。

等価組織を除外するために、従来の研究では特定の  $m, n$  に対して手作業、または計算機を用いて織物組織の数え上げを行っている。これらの研究では等価組織のみでなく、他の観点から等価だと見なせるものも除外して数え上げを行っているものもある [3], [4], [5], [6], [7]。呉ら [6] は、よこ糸 3 本、たて糸 3 本の織物組織に対して、等価組織とともに表裏の関係にある織物組織を除外している。高寺ら [3] は、よこ糸 4 本、たて糸 4 本の織物組織を対象としている。よこ糸方向を  $x$  軸、たて糸方向を  $y$  軸、織物面に垂直な軸を  $z$  軸とすると、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸それぞれの軸まわりに 180 度回転して同一となるものも、除外している。Gu and Greenwood [4] は、よこ糸 2 本の場合に、たて糸 2 本、3 本、4 本、5 本の 4 通り、よこ糸 3 本の場合に、たて糸 3 本、4 本、5 本の 3 通りの大きさの織物組織を対象に織物組織の数え上げを行っている。ここでは、 $x$  軸に対して対称、 $y$  軸に対して対称、 $z$  軸まわりに 180 度回転して同一となるもの、また、それぞれのたて糸浮きとよこ糸浮きとを反転させたものも同一として、除外している。さらに、織物組織が、より小さな織物組織の繰返しとなっているものを除外している。Dawson [5] は、よこ糸 2 本の場合には、たて糸を 2 本から 8 本に変化させた 7 通り、よこ糸 3 本の場合には、たて糸を 3 本から 6 本に変化させた 4 通り、それに、よこ糸 4 本、たて糸 4 本の 1 通りの計 12 通りの大きさの織物組織を対象としている。Gu and Greenwood [4] の手法に加えて、よこ糸本数とたて糸本数が等しい場合には、 $z$  軸まわりの 90 度回転、270 度回転、2 本の対角線に対して対称となる織物組織、また、それぞれのたて糸浮きとよこ糸浮きとを反転させたものも同一として、除外している。さらに、織物組織が、より小さな織物組織の繰返しとなっているものを除外している。Yordzhev and Kostadinova [7] は、よこ糸本数とたて糸本数が等しい場合を対象とし、織物組織を列挙している。たて糸本数とよこ糸本数が、ともに 2 本の場合からともに 6 本の場合の 5 通りの、等価組織のみを除外した織物組織の個数を求めている。

本論文では、等価組織のみを除外した織物組織の個数を与える式を考察する。

### 2.3 整数の合同

整数全体の集合を  $\mathbb{Z}$  と書く。  $a, b \in \mathbb{Z}$  について  $b = ac$  となる  $c \in \mathbb{Z}$  が存在するとき、 $a$  は  $b$  を割り切る、あるいは整除するといい、 $a|b$  で表す。このとき、 $a$  は  $b$  の約数であるという。  $a, b$  を整数とする。整数  $c$  が、 $c|a, c|b$  を満たすとき  $c$  を  $a, b$  の公約数と呼ぶ。公約数の中で最大のものを最大公約数という。  $a, b$  の最大公約数を  $\gcd(a, b)$  と表す。  $a, b$  について  $\gcd(a, b) = 1$  のとき、 $a, b$  は互いに素であるという。1 でない正整数  $p$  が 1 と  $p$  以外に正の約数をもたないとき、 $p$  は素数と呼ばれる。

次の定理はユークリッドの定理と呼ばれる [8]。

**定理 2.1**  $a, b \in \mathbb{Z}$  ( $a \neq 0$ ) について  $b = qa + r$  ( $0 \leq r < |a|$ ) と書けるような  $q, r \in \mathbb{Z}$  がただ 1 組存在する。

定理 2.1 での  $q$  を、 $b$  を  $a$  で割ったときの商といい、 $r$  を余りという。

整数  $a, b$  について  $m|a-b$  なるとき、 $a$  は  $b$  に modulo  $m$  で合同であるといい、 $a \equiv b \pmod{m}$  と書く。  $a$  を  $m$  で割ったときの余りを  $r$  とすると  $a \equiv r \pmod{m}$  である。このことを  $r = a \bmod m$  と書くこともある。次の定理が知られている [8]。

**定理 2.2** 正整数  $m, n$  が互いに素とする。整数  $a$  について (等差数列的に作られる)  $m$  個の整数  $a, n+a, \dots, (m-1)n+a$  を mod  $m$  で処理すると  $0, 1, \dots, m-1$  を並べ替えたもの、つまり順列になっている。

### 2.4 ベクトルの循環シフト

循環シフトとは、一次元の配列において、配列の要素を与えられたシフト量だけ一方にシフトし、配列からあふれた要素を、シフトの方向と反対側に発生した空きの配列に格納する操作である。

$n$  次元ベクトル  $u$  の第  $i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) 要素を  $u_i$  と書く。ベクトル  $u$  に対し、 $t$  要素分の循環シフトしたベクトルを  $u^t$  と書くと  $u_i^t = u_{(t+i) \bmod n}$  である。ベクトル  $u$  が行ベクトルの場合には、 $u^t$  は  $t$  要素分だけ左方向に循環シフトした行ベクトルとなり、ベクトル  $u$  が列ベクトルの場合には、 $u^s$  は  $s$  要素分だけ上方向に循環シフトした列ベクトルとなる。

3 章での議論に備えて 1 つの補題を示す。

**補題 2.1** 正整数  $n$  が素数であるとし、 $u$  を  $n$  行でない  $n$  次元ベクトルとする。  $u$  から構成した  $n$  個の行ベクトル  $u^t$  ( $0 \leq t \leq n-1$ ) はすべて互いに異なる。

【補題 2.1 の証明】ある  $t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) について  $u = u^t$  であったと仮定する。  $u$  の第 0 要素  $u_0$  に着目する。この要素は  $u^t$  においては第  $-t \bmod n$  要素に移動する。  $t$  要素分の左方向への循環シフトは  $(n-t)$  要素分の右方向への循環シフトであるため、この要素は第  $(n-t) \bmod n$  要素である。  $u^t = u$  であるため、 $u^t$  をさらに  $t$  要素分左方向 ( $n-t$  要素分右方向) に循環シフトした  $u^{2t}$  もまた  $u$  に等しい。  $u^{2t}$  において、この要素は第  $2(n-t) \bmod n$  要素に移動する。同様に、 $u^{2t} = u^{3t} = \dots = u^{(n-1)t} = u$  である。このとき、 $u_0$  は初項 0、公差  $n-t$  の等差数列を mod  $n$  で処理した  $n$  個の位置を移動する。  $n$  と  $n-t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) は互いに素であるので、定理 2.2 により、 $n$  個の整数  $0, n-t, 2(n-t) \dots (n-1)(n-t)$  を mod  $n$  で処理すると  $0, 1, \dots, n-1$  を並べ替えたものである。つまり、行ベクトルのすべての要素は等しい。そのため、行ベクトルが  $n$  行でないという前提に反する。つまり、

$u$  と  $u^t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) は異なる. この関係は  $u^j$  と  $(u^j)^t$  ( $1 \leq j \leq n-2, 1 \leq t \leq n-j-1$ ) の間にも同様に成り立つ.  $(u^j)^t = u^{j+nt}$  であるため,  $u$  ( $= u^0$ ) から構成される  $n$  個の行ベクトル  $u^t$  ( $0 \leq t \leq n-1$ ) はすべて互いに異なる. ■

### 2.5 行列の循環シフト

ここではベクトルの循環シフトを行列の循環シフトに拡張する.  $m$  行  $n$  列のブール行列  $W$  を考える (列は左から順に第 0 列, ..., 第  $n-1$  列とし, 行は上から順に第 0 行, ..., 第  $m-1$  行とする). 2つの数  $s$  ( $0 \leq s \leq m-1$ ),  $t$  ( $0 \leq t \leq n-1$ ) に対しブール行列  $W$  を  $(s, t)$  だけ “循環シフト” する. つまり, ブール行列  $W$  の各列をそれぞれ  $s$  要素分だけ上方向に循環シフトし, 次に, 結果の行列の各行をそれぞれ  $t$  要素分だけ左方向に循環シフトする. このように行列  $W$  を  $(s, t)$  循環シフトした行列を  $W^{(s,t)}$  と表記する. このとき,  $W$  の  $(s, t)$  要素は  $W^{(s,t)}$  の  $(0, 0)$  要素になる. 等価組織の定義より, 次の補題を得る.

**補題 2.2**  $W, V$  を  $m$  行  $n$  列のブール行列とする.  $W$  と  $V$  が等価組織であるとすると, ある整数  $s$  ( $0 \leq s \leq m-1$ ) と  $t$  ( $0 \leq t \leq n-1$ ) が存在し,  $V = W^{(s,t)}$  である.

**【補題 2.2 の証明】**  $W$  を単位として格子状 (上下左右) に繰り返して得られる織物と  $V$  を単位として格子状に繰り返して得られる織物の模様が一致する. つまり, これら 2枚の織物は位置をずらして重ねると模様が完全に一致する. この重ね合わせにおいて  $V$  の  $(0, 0)$  要素が  $W$  の  $(s, t)$  要素に対応しているとする.  $0 \leq s \leq m-1, 0 \leq t \leq n-1$  として一般性を失わない. ここで,  $V$  の第  $i$  ( $0 \leq i \leq m-1$ ) 行は  $W$  の  $(i+s) \bmod m$  行を  $t$  要素分左方向に循環シフトした行ベクトルである. つまり,  $V_{i*} = W_{((i+s) \bmod m)*}^t$  である. また  $V$  の第  $j$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) 列は  $W$  の  $(j+t) \bmod n$  列を  $s$  要素分上方向に循環シフトした列ベクトルである. つまり,  $V_{*j} = W_{*(j+t) \bmod n}^s$  である. よって  $V = W^{(s,t)}$  である. ■

補題 2.2 の証明より, 次の 2つの観察を得る.

**観察 2.1**  $W$  を  $m$  行  $n$  列のブール行列とする. 2つの数  $s$  ( $0 \leq s \leq m-1$ ),  $t$  ( $0 \leq t \leq n-1$ ) に対し,  $W$  をシフト量  $(s, t)$  の循環シフトにより得られた  $W^{(s,t)}$  は  $W$  の等価組織である.

**観察 2.2** 任意の  $s$  ( $0 \leq s \leq m-1$ ),  $t$  ( $0 \leq t \leq n-1$ ) に対し,  $\mathcal{W}^{[s,t]} = W^{(s,t)}$  である.

$m$  行  $n$  列のブール行列  $W$  が “同一の小行列から構成されている” とは,  $k|m, l|n$  なる  $k, l$  ( $1 < kl < mn$ ) が存在し, ブール行列  $W$  が  $k$  行  $l$  列のブール行列  $W^s$  を繰り返して構成されている, つまり,  $W$  の  $(i, j)$  要素が  $W^s$  の  $(i \bmod k, j \bmod l)$  要素に等しい場合をいう. 2.1 節で述べた完全組織とは, いい換えれば, その組織図に対応するブール行列が, 同一の小行列から構成されていないことを

表す.

**補題 2.3**  $W$  を  $m$  行  $n$  列のブール行列とする.  $W = W^{(0,t)}$  であるシフト量  $(0, t)$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) が存在するとする. このような  $t$  が複数存在する場合には最小の  $t$  を考える. このとき,  $t|n$  であり, ブール行列  $W$  は,  $m$  行  $t$  列の同一の小行列から構成されており,  $n$  を  $t$  で割った商を  $q_1$  とすると,  $W = W^{(0,t)} = W^{(0,2t)} = \dots = W^{(0,(q_1-1)t)}$  である. また,  $W = W^{(s,0)}$  であるシフト量  $(s, 0)$  ( $1 \leq s \leq m-1$ ) が存在するとする. このような  $s$  が複数存在する場合には最小の  $s$  を考える. このとき,  $s|m$  であり, ブール行列  $W$  は,  $s$  行  $n$  列の同一の小行列から構成されており,  $m$  を  $s$  で割った商を  $q_2$  とすると,  $W = W^{(s,0)} = W^{(2s,0)} = \dots = W^{((q_2-1)s,0)}$  である.

**【補題 2.3 の証明】** 補題で述べたシフト量  $(0, t)$  が存在するのに  $t|n$  でないと仮定する.  $n$  を  $t$  で割った商を  $q$ , 余りを  $r$  ( $\neq 0$ ) とする.  $W = W^{(0,t)}$  であるため,  $W^{(0,t)}$  をさらにシフト量  $(0, t)$  で循環シフトした  $W^{(0,2t)}$  もまた  $W$  に等しい (よって,  $W$  の最初の  $t$  個の列は次の  $t$  個の列と等しい). これを繰り返すと  $W^{(0,qt)}$  もまた  $W$  に等しいことが分かる.  $W^{(0,qt)}$  をシフト量  $(0, t)$  で循環シフトした  $W^{(0,(q+1)t)}$  も  $W$  に等しい.  $(q+1)t = (t-r) \bmod n$  であるため,  $W^{(0,(q+1)t)} = W^{(0,t-r)} = W$  である.  $t-r < t$  であるため,  $W = W^{(0,t)}$  となる最小の  $t$  を選択したという前提に反する. よって,  $t|n$  であり,  $W$  は  $m$  行  $t$  列の同一の小行列で構成されている.  $W = W^{(s,0)}$  の場合も, 同様に示すことができる. ■

**補題 2.4**  $W$  をよこ糸  $m$  本, たて糸  $n$  本の組織図 (完全組織) に対応するブール行列とする.  $W = W^{(s,t)}$  であるシフト量  $(s, t)$  ( $1 \leq s \leq m-1, 1 \leq t \leq n-1$ ) が存在するとする. このような  $s, t$  の対が複数存在する場合には  $s$  が最小である  $s, t$  の対を考える. このとき,  $s|m$  である. さらに,  $m$  を  $s$  で割った商を  $q$  とすると,  $qt \bmod n = 0$  である.

**【補題 2.4 の証明】**  $s|m$  でないと仮定し,  $m$  を  $s$  で割った商を  $q$ , 余りを  $s'$  ( $\neq 0$ ) とする. 観察 2.2 より,  $\mathcal{W}^{[s,t]} = W^{(s,t)}$  である.  $W = W^{(s,t)}$  であることから  $\mathcal{W}^{[s,t]} = W$  であり,  $\mathcal{W}$  の  $(s, t)$  要素を始点とする新たな  $\mathcal{W}$  を考えると,  $\mathcal{W}^{[2s,2t]}$  も  $W$  と等しいことが分かる. この議論を繰り返すと  $\mathcal{W}^{[qs,qt]}$  もまた  $W$  に等しい. つまり  $W = \mathcal{W}^{[qs,qt]}$  である. ただし,  $qt > n$  となりうるが, このとき,  $\mathcal{W}^{[qs,qt]}$  の始点はある  $W_{0,k}$  の要素に一致している. このとき,  $\mathcal{W}$  において  $W_{0,k+1}$  の直下の  $W$  のコピーは  $W_{1,k+1}$  である.  $\mathcal{W}^{[qs,qt]}$  の始点を新たに  $W$  の始点と考えると  $W_{1,k+1}$  は  $\mathcal{W}^{[qs,qt]}$  と等価である. よって  $W = W^{(s',t')}$  となる循環シフト量  $(s', t')$  が存在することになる.  $s' < s$  のため, 最小の  $s$  を選択したという前提に反する. そのため,  $s|m$  である.

$qt \bmod n = r$  ( $\neq 0$ ) と仮定する. 前段の議論によ

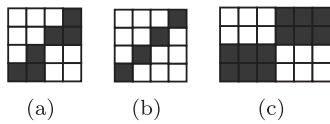


図 3 行列の循環シフトによりもとの組織図と一致する例

Fig. 3 Examples of weave diagrams that are coincident to the original one by cyclic shifts for matrix.

り,  $W^{[qs,qt]} = W$  であり,  $qs = m$  である. そのため,  $W^{[m,qt]} = W$  となる. このとき,  $W$  において  $W^{[m,qt]}$  の始点はある  $W_{1,k}$  の第 0 行の第  $r$  要素に一致している. このことは  $W = W^{(0,r)}$  を意味している. しかし, 補題 2.3 により,  $W$  が同一の小行列から構成されていることになり, これは,  $W$  が完全組織であるという前提に反する. そのため,  $qt \bmod n = 0$  である. ■

$W^{(s,t)} = W$  となるシフト量  $(s, t)$  が存在する組織図  $W$  の例を図 3 に示す. 同図 (a) の場合,  $W^{(2,2)} = W$  である. 同図 (b) の場合,  $W^{(1,3)} = W^{(2,2)} = W^{(3,1)} = W$  である. 同図 (c) では  $W^{(2,3)} = W$  である.

### 3. 等価組織を除外した組織図の数え上げ

$W$  を, よこ糸  $m$  本, たて糸  $n$  本の組織図 (完全組織) に対応するブール行列とする. つまり,  $m \geq 2, n \geq 2$  であり,  $W$  にはナル行とナル列のどちらも含まず, かつ,  $W$  は同一の小行列から構成された行列でない.

#### 3.1 $m$ と $n$ がともに素数で $m \neq n$ の場合

**定理 3.1** 正整数  $m, n$  が異なる素数であるとする.  $W$  の  $mn$  個の等価組織  $W^{(s,t)}$  ( $0 \leq s \leq m-1, 0 \leq t \leq n-1$ ) はすべて互いに異なる.

【定理 3.1 の証明】 次の場合 I と場合 II の 2 つの場合に分けて示す.

場合 I ( $s = 0$  または  $t = 0$  の場合)

$W = W^{(s,t)}$  と仮定する.  $s = 0$  かつ,  $t = 0$  のとき,  $W^{(0,0)}$  は  $W$  自身である. 次に,  $s \neq 0, t = 0$  の場合を考える. このとき, 補題 2.3 より,  $W$  は同一の小行列から構成されている. しかし,  $m$  は素数であるため, 同一の小行列から構成されているとすれば, 1 行  $n$  列の小行列の場合に限る. これは,  $W$  にナル列を含まないという前提に反する. 同様に,  $s = 0, t \neq 0$  の場合を考えても  $W$  にナル行を含まないという前提に反する. そのため,  $s = 0$  または  $t = 0$  の場合,  $W = W^{(s,t)}$  となるのは  $W = W^{(0,0)}$  の場合に限る. その他の場合には  $W$  と  $W^{(s,t)}$  は異なる.

場合 II ( $s \neq 0$  かつ  $t \neq 0$  の場合)

ある  $s$  ( $1 \leq s \leq m-1$ ) と  $t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) について  $W = W^{(s,t)}$  であったと仮定する. すると, 補題 2.4 より  $s|m$  であるが,  $m$  が素数なので  $s = 1$  である. さらに, 補題 2.4 より  $mt \bmod n = 0$  が成り立つ.  $m$  と  $n$  は異なる 2 つの素数であるため, この式が成り立つのは  $t = 0$  であ

表 1 よこ糸本数  $m$ , たて糸本数  $n$  ( $m \neq n$ ) の場合の  $N$  (式 (1)) と  $N_W$

Table 1 The number of weave diagrams  $N$  (Eq.(1)) and the number of non-equivalent weave diagrams  $N_W$  for the case that weave diagram consisting of  $m$  weft yarns and  $n$  warp yarns ( $m \neq n$ ).

$m$	$n$	$N$	$N_W$
2	3	6	1
	5	30	3
	7	126	9
3	5	6,510	434
	7	267,582	12,742
5	7	20,218,802,310	577,680,066

るか,  $t$  が  $n$  の倍数であるかの 2 通りであるが, ここでは,  $t \geq 1$  としているので,  $t$  が  $n$  の倍数であるとする. しかし, これはシフト量  $t$  が 1 以上  $n-1$  以下であるという前提に反する. よって,  $W = W^{(1,t)}$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) となることはない.

以上より,  $W$  の等価組織  $W^{(s,t)}$  ( $0 \leq s \leq m-1, 0 \leq t \leq n-1$ ) から  $W^{(0,0)}$  を除いた  $mn-1$  個の等価組織  $W^{(s,t)}$  と組織図  $W (= W^{(0,0)})$  とは異なる. 任意の,  $i, j$  ( $0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1$ ) に対し,  $W^{(i,j)}$  を改めて  $W$  とすることで, 上の議論を適用できる. よって  $W (= W^{(0,0)})$  から構成される  $mn$  個の組織図はすべて互いに異なる. ■

定理 3.1 により, 組織図  $W$  には  $W$  自身を含めてちょうど  $mn$  個の異なる等価組織が存在する. そのため, 式 (1) で得られた  $N$  を  $mn$  で割ることにより, 等価組織を除外した組織図の個数  $N_W$  を求めることができる. つまり,  $N_W$  は次式で表される.

$$N_W = \frac{N}{mn} \tag{3}$$

表 1 に, 異なる 2 つの素数  $m, n$  ( $2 \leq m, n \leq 7$ ) の組合せにおける  $N$  と  $N_W$  の値を示す.

#### 3.2 $m$ と $n$ がともに素数で $m = n$ の場合

ある  $s$  ( $0 \leq s \leq m-1$ ) と  $t$  ( $0 \leq t \leq n-1$ ) について  $W = W^{(s,t)}$  であったとする. このような  $s, t$  の対が複数存在する場合には  $s$  が最小である  $s, t$  の対を考える.  $s = 0, t \neq 0$  または  $s \neq 0, t = 0$  の場合は, 補題 2.3 より,  $W$  が同一の小行列から構成されていることになる.  $m$  と  $n$  が素数であることから, このような場合はあり得ない. よって,  $s \neq 0$  かつ  $t \neq 0$  とする. 補題 2.4 より  $s|m$  であるが,  $m$  が素数なので  $s = 1$  である. さらに, 補題 2.4 より  $mt \bmod n = 0$  であるが,  $n$  と  $m$  は等しいため, 任意の  $t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) に対して, この式は成り立つ.

たて糸, よこ糸とも  $n$  本の組織図の集合を  $S$  とする. つまり,  $S$  は  $n$  行  $n$  列のブール行列でナル行, ナル列を

表 2 よこ糸本数とたて糸本数がともに  $n$  の場合の  $N$  (式 (1)), 列パターンの個数  $n_p$ , 等価組織を除外した織物組織の個数  $N_W$

Table 2 The number of weave diagrams  $N$  (Eq. (1)), the number of row patterns  $n_p$  and the number of non-equivalent weave diagrams  $N_W$  for some cases that both the number of weft and warp yarns are  $n$ .

$n$	$N$	$n_p$	$N_W$
2	2	1	1
3	102	2	14
5	17,633,670	6	705,366
7	451,575,174,961,302	18	9,215,819,897,262

含まないものの集合である。  $\mathcal{S}$  に含まれる組織図のうち、  $W = W^{(1,t)}$  のような  $t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) が存在する組織図  $W$  の集合を  $\mathcal{S}_I$  とする。 また、  $\mathcal{S}$  に含まれる組織図で、  $\mathcal{S}_I$  に含まれない組織図の集合を  $\mathcal{S}_{II}$  とする。

$\mathcal{S}_I$  に含まれる組織図の個数を次のようにして数える。  $n$  次行ベクトルと、 その行を循環シフトした行を、 あわせて  $n$  個並べることにより構成したブール行列の個数を数え上げる。 そこで、 はじめに行のパターンの個数を数える。 各パターンに対し、 それを右方向に  $t$  要素分循環シフトさせたものをはじめの行の下に配置する。 その下に、 さらに右方向に  $t$  要素分循環シフトさせた行を配置する。 これを繰り返してブール行列を構成する (詳しくは 3.2.2 項参照)。

### 3.2.1 行パターンの個数

各要素が 0 または 1 の  $n$  次行ベクトルを考える。  $n$  個の要素のうちちょうど  $k$  個が 1 だとすると、 行ベクトルの個数は  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  である。 組織図における等価組織を除外するため、 ここではベクトルを円順列と見なす。 行ベクトルを円順列と見なしたときに等しい行ベクトルは同じ行パターンを持つという。 補題 2.1 により、  $n$  が素数であれば、 1 つの行ベクトルにはそれ自身を含めて同じ行パターンを持つ行ベクトルがちょうど  $n$  個存在する。 そのため、 行パターンの個数  $n_p^k$  は次式で表すことができる。

$$n_p^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4)$$

よって、  $k$  を 1 から  $n-1$  まで変化させた場合の、 すべての行パターンの個数  $n_p$  は次式で計算できる。

$$n_p = \sum_{k=1}^{n-1} n_p^k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (5)$$

表 2 に 2 以上 7 以下の 4 個の素数  $n = 2, 3, 5, 7$  それぞれの場合の  $n_p$  の値を示す。 また、 それぞれの場合の行パターンを図 4 に示す。

### 3.2.2 行パターンをもとにしたブール行列の構成

0 または 1 を要素とする、 ナル行でない、  $n$  次行ベクトル  $u$  と、 あるシフト量  $t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) を考える。 第 0 行を  $W_{0*} = u$  とし、 第  $i$  行を、  $u$  を右方向に  $it \pmod n$  要素分循環シフトした行と定義する。 つまり、  $W_{i*} = u^{-it \pmod n}$

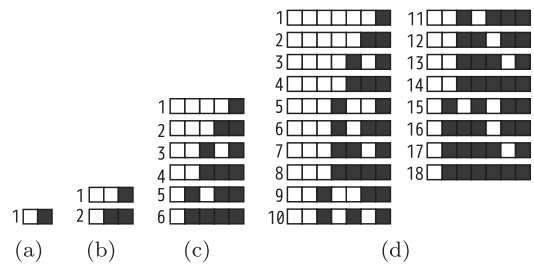


図 4  $n$  次ベクトルの行パターン (a) 1 通り ( $n = 2$ ), (b) 2 通り ( $n = 3$ ), (c) 6 通り ( $n = 5$ ), (d) 18 通り ( $n = 7$ )

Fig. 4  $n$  order vector row patterns. (a) One pattern ( $n = 2$ ), (b) Two patterns ( $n = 3$ ), (c) Six patterns ( $n = 5$ ), (d) Eighteen patterns ( $n = 7$ ).

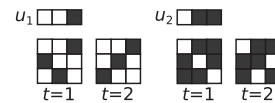


図 5  $u_1 = (001)$  と  $u_2 = (011)$  をもとに構成した 4 通りの組織図  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_2}^1, W_{u_2}^2$

Fig. 5 Four weave diagrams  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_2}^1, W_{u_2}^2$  constructed based on  $u_1 = (001)$  and  $u_2 = (011)$ .

( $1 \leq i \leq n-1$ ) と定義する。 このようにして構成したブール行列を  $W_u^t$  と表す。  $u$  の第  $j$  要素、 つまり  $W_u^t$  の第 0 行の第  $j$  要素に着目する。 この要素は  $W_u^t$  の第 1 行では  $j+t$  の位置に移動し、 さらに下の行では、  $(j+2t) \pmod n, (j+3t) \pmod n, \dots, (j+(n-1)t) \pmod n$  の位置に移動する。  $n$  と  $t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) は互いに素であるので、 定理 2.2 により  $n$  個の整数  $j, j+t, j+2t \dots j+(n-1)t$  を  $\pmod n$  で処理すると  $0, 1, \dots, n-1$  を並べ替えたものである。 よって、 もととする行  $u$  の第  $j$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) 要素は、  $W$  において同じ列に存在することはない。 よって、 もととする行  $u$  がナル行でないため、  $W_u^t$  にナル列が含まれることがない。  $u_1 = (001), u_2 = (011)$  の場合に、 シフト量  $t = 1, 2$  で構成した組織図を図 5 に示す。  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_2}^1, W_{u_2}^2$  の 4 個の組織図はすべて綾織である。

### 3.2.3 等価組織を除外した組織図の個数

$\mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_{II} = \mathcal{S}$ , かつ  $\mathcal{S}_I \cap \mathcal{S}_{II} = \emptyset$  であるため、 式 (1) で得られる  $N$  は、  $N = |\mathcal{S}_I| + |\mathcal{S}_{II}|$  と表すことができる。  $\mathcal{S}_I$  から等価組織を除外した組織図の個数を  $N_W^I$  とする。  $N_W^I$  は、 あるパターンの行をもとに、 隣り合う行を  $t$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) 要素分循環シフトして配置して構成した組織図の個数である。 よって  $N_W^I = n_p(n-1)$  である。

これらの  $n_p(n-1)$  個の組織図がすべて異なるのは、 第 0 行が異なる行ベクトルであるか、 または、 第 0 行が等しくかつ隣りあう行の循環シフト量が異なることから明らかである。 これらの組織図の集合を  $\mathcal{S}'_I$  と表記する。  $\mathcal{S}'_I$  には等価な組織図も含まれない。  $\mathcal{S}'_I$  に 2 つの等価な組織図  $W_1$  と  $W_2$  が含まれたと仮定する。  $W_1$  の第 0 行を  $u$  とすると  $W_1$  の  $s$  行目は  $u$  を右方向に何要素分か循環シフトしたべ

クトル  $u'$  である.  $W_1$  と  $W_2$  が等価なので,  $W_2 = W_1^{(s,t)}$  なる  $s, t$  ( $1 \leq s, t \leq n-1$ ) がある. よって,  $W_2$  の第 0 行は  $u'$  を左方向に  $t$  要素分循環シフトしたベクトル  $u''$  となる. つまり,  $W_2$  の第 0 行は  $u$  を循環シフトしてできるベクトルと一致する. 式 (4) では  $n_p$  を数えるときに循環シフトしてできるベクトルを除外しているため, これは矛盾である. したがって,  $\mathcal{S}'_I$  には等価な組織図も含まれない.

次に,  $W \in \mathcal{S}'_I$  とする.  $W^{(0,t)}$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) はすべて,  $W$  と等価な組織図である. よって,  $W$  には,  $W$  自身を含めちょうど  $n$  個の等価組織が存在する.  $\mathcal{S}'_I$  の各組織図がそれぞれ  $n$  個の等価組織を持つが, 補題 2.1 よりこれらの等価組織はすべて異なることを示すことができる. また,  $\mathcal{S}_I$  の組織図はこのようにして構成された組織図に限る. よって,  $|\mathcal{S}_I| = n_p(n-1)n$  である.

前述のように, 補題 2.4 に基づき,  $W = W^{(1,t)}$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ) となる組織図の集合を  $\mathcal{S}_I$  とした. よって,  $\mathcal{S}_{II}$  に含まれる任意の組織図  $W$  の等価組織  $W^{(s,t)}$  ( $0 \leq s, t \leq n-1$ ) から  $W^{(0,0)}$  を除いた  $n^2 - 1$  個の等価組織  $W^{(s,t)}$  と組織図  $W (= W^{(0,0)})$  とは異なる. 任意の,  $i, j$  ( $0 \leq i, j \leq n-1$ ) に対し,  $W^{(i,j)}$  を改めて  $W$  とすることで, この議論を適用できる. つまり  $W \in \mathcal{S}_{II}$  には,  $W$  自身を含めて  $n^2$  個の互いに異なる等価組織が存在する.

以上より,  $\mathcal{S}_{II}$  から等価組織を除外した組織図の個数を  $N_W^{II}$  とすると,  $N_W^{II} = \frac{N - |\mathcal{S}_I|}{n^2}$  であり, 等価組織を除外した組織図の総数は次式で表される.

$$N_W = N_W^I + N_W^{II} = n_p(n-1) + \frac{N - n_p(n-1)n}{n^2} \quad (6)$$

$n = 2, 3, 5, 7$  の場合の  $N, n_p, N_W$  を表 2 に示す.  $n = 2$  の場合,  $N_W = 1$  であり, これは平織である.  $n = 3$  の場合,  $N_W = 14$  となる [6], [7]. この中には図 5 に示した 4 通りの綾織が含まれている.  $n = 5$  の場合,  $N_W = 705,366$  である [7]. 例として図 6(a) に, 行パターン  $u_1 = (00001)$  として, 行の右方向に  $t$  ( $1 \leq t \leq 4$ ) 要素分の循環シフトにより構成した 5 通りの行パターンを並べて構成した 4 通りの組織図を示す.  $W_{u_1}^1$  と  $W_{u_1}^4$  は綾織であり,  $W_{u_1}^2$  と  $W_{u_1}^3$  は朱子織である.  $n = 7$  の場合,  $N_W$  は  $9 \times 10^{12}$  を超える莫大な数となる. 例として同図 (b) に, 行パターン  $u_{15} = (0101011)$  として, 行の右方向に  $t$  ( $1 \leq t \leq 6$ ) 要素分の循環シフトにより構成した 6 通りの組織図  $W_{u_{15}}^t$  ( $1 \leq t \leq 6$ ) を示す.

なお, 本項では, 行パターン  $u$  とシフト量  $t$  を定めて, 組織図  $W_u^t$  を構成した. ある列パターンとあるシフト量を定めても同一の組織図を同様に構成することができる.

### 3.2.4 考察

よこ糸本数  $m$ , たて糸本数  $n$  からなる組織図  $W$  で,  $m$  と  $n$  がともに素数の場合には, 等価組織を除外した組織図

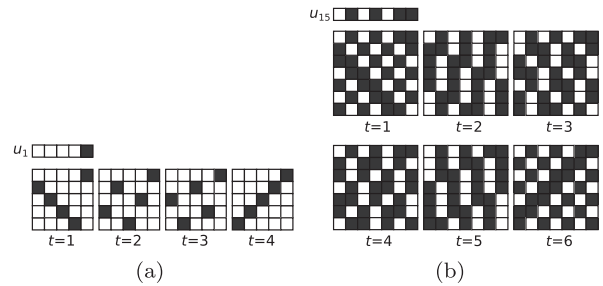


図 6 (a)  $u_1 = (00001)$  をもとに構成した 4 通りの組織図  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_1}^3, W_{u_1}^4$ , (b)  $u_{15} = (0101011)$  をもとに構成した 6 通りの組織図  $W_{u_{15}}^t (1 \leq t \leq 6)$

Fig. 6 (a) Four weave diagrams  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_1}^3, W_{u_1}^4$  constructed based on  $u_1 = (00001)$ , (b) Six weave diagrams  $W_{u_{15}}^t (1 \leq t \leq 6)$  constructed based on  $u_{15} = (0101011)$ .

の個数を比較的容易に数え上げることができた. その理由は次の 2 点である.  $m \neq n$  の場合には, 組織図に対応するブール行列  $W$  を  $(s, t)$  ( $0 \leq s < m, 0 \leq t < n$ ) だけ循環シフトした行列  $W^{(s,t)}$  がすべて互いに異なること. 一方,  $m = n$  の場合には,  $W = W^{(s,t)}$  となるような組織図は, ある行パターンを一定のシフト量で循環させた行を順に並べることにより構成した組織図に限り, また, その行パターンの個数も容易に数え上げることができたためである.

$m$  または  $n$  が合成数である場合を想定すると, たとえば, 本論文では考慮する必要がなかった, 同一の小行列から構成されているブール行列に対応する組織図が新たに表れる. そのため, 組織図を数え上げるための場合分けが複雑になることが予想される.

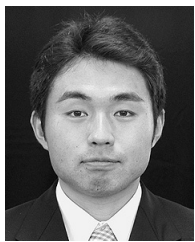
## 4. まとめ

本論文では, よこ糸本数とたて糸本数がともに素数の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を数え上げる数式を示した. この数式を使い, よこ糸本数, たて糸本数がともに 7 本以下の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を計算した. よこ糸本数, たて糸本数がともに 7 本の場合には, 等価組織を除外した織物組織の個数は  $9 \times 10^{12}$  を超える莫大な数となるが, 正確に数え上げることができた. 今後の課題は, たて糸本数およびよこ糸本数が合成数の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を与える数式について考察することである.

### 参考文献

- [1] 松浦 勇: 等価組織を除外した織物組織図の数え上げ—たて糸本数とよこ糸本数がともに素数の場合, 情報処理学会研究報告アルゴリズム, Vol.2018-AL-167, No.6, pp.1-7 (2018).
- [2] 松浦 勇: 等価組織を除外した織物組織図の数え上げ—たて糸本数とよこ糸本数が異なる素数の場合, 第 71 回織維機械学会年次大会要旨集, pp.88-89 (2018).
- [3] 高寺政行, 篠原 昭: 織物組織に関する研究 (3) 4 枚組織

- の数学的性質, 繊維学会昭和 61 年度年次大会研究発表会講演要旨集, p.194 (1986).
- [4] Gu, P. and Greenwood, K.: The Scope for Fabric Engineering of the Weave, *Journal of Textile Institute*, Vol.77, No.2, pp.88–103 (1986).
  - [5] Dawson, R.M.: Enumeration and Identification by Elimination of Weave Families of Given Repeat Size, *Textile Research Journal*, Vol.70, No.4, pp.304–310 (2000).
  - [6] 呉 祐吉, 松橋房江, 篠原 昭: 織物組織に関する基礎的研究 第 2 報織物組織の正則と不規則, 繊維学会誌, Vol.17, No.10, pp.989–993 (1961).
  - [7] Yordzhev, K. and Kostadinova, H.: Mathematical Modeling in the Textile Industry, *Bulletin of Mathematical Sciences and Applications*, Vol.1, No.1, pp.20–35 (2012).
  - [8] 渡辺 豊: 初歩からの数論, 牧野書店, 東京 (2011).



松浦 勇 (正会員)

昭和 49 年生. 平成 11 年名古屋大学工学研究科電子機械工学専攻修士課程修了. 平成 13 年愛知県庁入庁. 平成 21 年名古屋大学情報科学研究科計算機数理科学専攻満期退学. 現在, あいち産業科学技術総合センター勤務. 博

士 (情報科学).