Vol.2019-AL-172 No.10
2019/3/5

グレー符号と乱択近似可能実数

河村 彰星[1,a)]　ユリス・レシーヌ[2]

Gray code representation and randomized polynomial-time reals

Akitoshi Kawamura[1,a)]　Ulysse Léchine[2]

計算量理論でよく行われるようにここではビット列の判定問題を扱うことにする．ここでいう**判定問題** A とは，あり得る入力の集合 $\operatorname{dom} A \subseteq \{0,1\}^*$ と，その各入力 $u \in \operatorname{dom} A$ に対する正答 $A(u) \in \{0,1\}$ によって定まるものである．$\operatorname{dom} A = \{0,1\}^*$ であるとき A は**全域**(total)であるといい[*1]，$A \in \mathsf{total}$ と書く．A の算法(或いはチューリング機械)は，$\operatorname{dom} A$ に属するすべての入力に正しく処することを要求される．すなわち，判定問題 A が P（ないし BPP）に属するとは，ある多項式時間の(乱択)算法が任意の入力 $u \in \operatorname{dom} A$ に対して(確率 2/3 以上で) $A(u)$ を出力することをいう[*2]．この P や BPP は現実的に解ける問題の全体に概ね一致すると考えられている．これについて乱択が本質的な差異をもたらすか否か，すなわち BPP = P であるか否かは，計算量理論の重要な未解決問題である．

一方，計算可能解析(computable analysis)と呼ばれる分野では，計算可能性や計算量の理論を，実数を含む問題に適用する [1], [3]．そのような研究の一つ [2] において，単位立方体 $[0;1]^d$ の部分集合の計算量について二つの定義が扱われている．集合 $S \subseteq [0;1]^d$ が P **認識可能**(P-recognizable)であるとは，実数 $x \in [0;1]^d$（を適切に符号化した神託）と $n \in \mathbf{N}$ とが与えられたときに，n の多項式時間で，x が S に属するか否かを，x が S の境界から距離 2^{-n} 以内にある場合を除き，正しく判定する算法が存在することをいう．集合 S が P **近似可能**(P-approximable)であるとは，同様に x が S に属するか否かを判定する算法を考えるが，誤りの起る x の全体が測度 2^{-n} 以内であればよいとしたものである．或る程度単純な S については(具体的には S が長さをもつ単純閉曲線で囲まれた領域である場合には)，S は P 認識可能ならば P 近似可能であることが容易に判る．その逆が成立つか否かが，BPP = P 予想に関係づけられるというのが次の定理([2] の Theorem 3.9）である．

定理 1　$d \geq 2$ とする．次の三つの主張について，(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) が成立つ．
(1) BPP = P.
(2) 集合 $S \subseteq [0;1]^d$ について，もし S が P 近似可能ならば，S は P 認識可能.
(3) $\mathsf{BPP} \cap \mathsf{total} = \mathsf{P} \cap \mathsf{total}$.

主張 (3) から (1) は(簡単には)いえない．問題 A が BPP に属するからといって，それは $\mathsf{BPP} \cap \mathsf{total}$ の問題を $\operatorname{dom} A$ に制限したものであるとは限らないのである．つまり A の算法は，$\operatorname{dom} A$ に属しない入力が与えられたときには，$\geq 2/3$ 以上の確率で 1 を出力するわけでも $\geq 2/3$ 以上の確率で 0 を出力するわけでもない，という可能性がある．

上の条件 (2) の集合 S の形を制限することで主張を弱めてみる．原論文([2] の Theorem 3.10)では，S が(d 次元)直方体であるときを考え，これを羅列的問題の計算量に結びつけた次の定理の (2) $\Longrightarrow$ (3)（に概ね同等なもの)が示されていた．判定問題 A が**羅列的**(tally)である($A \in \mathsf{tally}$)とは $\operatorname{dom} A \subseteq \{0\}^*$ であることをいう．また**羅列全域的**で

1　九州大学
2　リヨン高等師範学校
a)　kawamura@inf.kyushu-u.ac.jp

*1　文献によっては全域な問題を単に問題といい，本稿の意味での問題を(入力が $\operatorname{dom} A$ に属することが約束されているという意味で)**約束つき問題**(proimse problem)と呼ぶ.
*2　この確率 2/3 を代りに区間 (1/2; 1) 内のどの定数にしても BPP の定義は変らない.

ある($A \in \mathsf{tally\text{-}total}$)とは $\mathrm{dom}\, A = \{0\}^*$ であることをいう．この設定においては定理 1 に似た主張について次のように逆の向きが示せる．

定理 2　$d \geq 1$ とする．次の三つの主張は同値．
(1) $\mathsf{BPP} \cap \mathsf{tally} = \mathsf{P} \cap \mathsf{tally}$.
(2) $[0;1]^d$ 内の直方体 S について，もし S が P 近似可能ならば，S は P 認識可能である．
(3) $\mathsf{BPP} \cap \mathsf{tally\text{-}total} = \mathsf{P} \cap \mathsf{tally\text{-}total}$.

本結果は論文発表を準備中であり本稿では詳細を略するが，証明においては，条件 (2) を直方体の端点となる実数の計算量を述べる形に書き直せること，またその特徴づけにおいて実数をグレー符号 [4] で表せることなどが，重要な役割を果す．

参考文献

[1] V. Brattka, P. Hertling, and K. Weihrauch. A tutorial on computable analysis. In S. B. Cooper, B. Löwe, and A. Sorbi, editors, *New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable*, pages 425–491. Springer, 2008.
[2] A. Chou and K. Ko. Computational complexity of two-dimensional regions. *SIAM Journal on Computing*, 24:923–947, 1995.
[3] K. Ko. *Complexity Theory of Real Functions*. Birkhäuser Boston, 1991.
[4] H. Tsuiki. Real number computation through Gray code embedding. *Theoretical Computer Science* 284(2):467–485, 2002.