

# 7次対称方陣の数え上げ

加藤 剛<sup>1,a)</sup> 湊 真一<sup>2,b)</sup>

**概要:** 7次対称方陣とは、中心に関して対称な位置にある2マスの和が常に一定であるような $7 \times 7$ の魔方陣である。現在知られている6次の半魔方陣（斜めの和の条件を持たない魔方陣）の数え上げの方法を参考にして、方陣を2つに分割して数え上げる手法を用いて計算した結果、7次対称方陣の解の総数は、回転や鏡像で同じ形になるものを除いて、1,125,154,039,419,854,784通りであることを初めて明らかにした。本稿ではその計算方法について述べる。

## 1. はじめに

魔方陣とは、 $n \times n$ 個の正方形の方陣に $1, 2, \dots, n^2$ の数を丁度一つずつ配置したもののうち、方陣の各行各列各対角線上の数の和が等しいものである。 $n \times n$ 魔方陣を $n$ 次魔方陣と呼ぶこともある。魔方陣と似た方陣に半魔方陣と対称方陣がある。半魔方陣とは、対角線上の数の和が等しくなくても良い魔方陣である。対称方陣とは、方陣の中心に関して対称な2マスの和が $n^2 + 1$ になるような魔方陣である。図1にこれらの方陣の例を示す。

これらの方陣の個数で既知のものを表1にまとめた。これらの方陣に回転や鏡像操作を行っても同じ種類の方陣のままである。したがって、方陣の個数は回転や鏡像によって一致する方陣を重複して数えない。

魔方陣の歴史は古く、洛書と呼ばれる3次魔方陣が中国で紀元前から知られていたと言われている。日本でも、江戸時代に多くの和算家が魔方陣の研究に取り組んでいて、対称方陣も知られていた[9]。4次魔方陣はBernard Frénicle de Bessyによって880個が1693年に発見され[2]、Kathleen OllerenshawとHermann Bondiによってそれ以外の魔方陣が存在しないことが証明された[4]。5次魔方陣の個数はRichard Schroepelによってバックトラック法を用いて1973年に計算され、Martin Gardnerによって1976年に発表された[5]。1973年に5次魔方陣の個数が計算されたが、40年以上経った今でも6次魔方陣の個数は分かっていない。

対称方陣については、5次対称方陣の個数を誰がいつ最初に数え上げたかは分かっていないが、Walter Trumpの

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |
| 2 | 9 | 4 |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 4  | 9  | 5  | 16 |
| 14 | 7  | 11 | 2  |
| 15 | 6  | 10 | 3  |
| 1  | 12 | 8  | 13 |

(a) 3次 魔方陣 (b) 3次 半魔方陣 (c) 4次 対称方陣

図1 各種魔方陣の例

表1 方陣の既知の個数

| n | 半魔方陣                           | 魔方陣         | 対称方陣         |
|---|--------------------------------|-------------|--------------|
| 3 | 9                              | 1           | 1            |
| 4 | 68,688                         | 880         | 48           |
| 5 | 579,043,051,200                | 275,305,224 | 48,544       |
| 6 | 94,590,660,245,399,996,601,600 | (未解決)       | 0            |
| 7 | (未解決)                          | (未解決)       | <b>(本結果)</b> |

ウェブサイトの情報[7]によると、48544個の5次対称方陣が存在することが知られている。6次対称方陣が存在しないことが少なくとも1919年にCharles Planckによって証明されている[3]。しかしながら、これまで7次の対称方陣の個数は分かっていなかった。

一方、最近の結果として6次半魔方陣の個数がArtem Ripattiによって2018年に発表された[1]。この計算には、方陣を2つに分割した部分問題を考え、その後部分問題の結果を組み合わせる手法が用いられていて、従来の単純なバックトラック法による手法より高速である。

本稿では、6次半魔方陣に用いられていた手法を7次対称方陣に発展させ、7次対称方陣の個数を求めるアルゴリズムを提案する。まず、2節で対称方陣の性質について述べる。次に3節で、既存手法である6次半魔方陣の個数の数え上げの手法の概略を述べる。4節で、提案手法である7次対称方陣の数え上げのアルゴリズムについて詳しく述

<sup>1</sup> 京都大学 工学部 情報学科  
<sup>2</sup> 京都大学 大学院 情報学研究科  
a) kato.go.46a@st.kyoto-u.ac.jp  
b) minato@i.kyoto-u.ac.jp

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 |    |    |    |    |
|    |    |    |    |    |    |    |
|    |    |    |    |    |    |    |
|    |    |    |    |    |    |    |

図 2 7次対称方陣で考える必要のあるマス

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 上 | 上 | 上 | 上 | 上 | 上 |
| 上 | 上 | 上 | 上 | 上 | 上 |
| 上 | 上 | 上 | 上 | 上 | 上 |
| 下 | 下 | 下 | 下 | 下 | 下 |
| 下 | 下 | 下 | 下 | 下 | 下 |
| 下 | 下 | 下 | 下 | 下 | 下 |

図 3 6次方陣の分け方

べ, 5節でその計算結果を示す.

## 2. 準備

本稿では,  $1, 2, \dots, n^2$  の自然数が全て1回ずつ出現する  $n \times n$  行列を ( $n$  次の) 方陣と呼ぶことにする. 方陣の第  $i$  行,  $j$  列の要素を  $X_{ij}$  とする. 7次対称方陣の1行の数の和は  $(1+2+\dots+49)/7 = 175$  となる. 回転や鏡像によって一致する方陣を重複して数えない時の方陣の個数は, 重複して数える時の方陣の個数の  $1/8$  倍となる.

### 2.1 対称性の性質

$7 \times 7$  の (魔方陣とは限らない) 方陣  $X$  について, 中心に関して対称な位置の2要素の和が一定である ( $X_{ij} + X_{(8-i)(8-j)} = 7^2 + 1 = 50$ ) という制約だけ与えたとき, 以下のことが明らかに成り立つ.

- (1) 中心の要素  $X_{44}$  は必ず25である.
- (2) 対称な位置にある2要素のうち, 片方の数からもう片方の数を計算できる.

$$X_{ij} = 50 - X_{(8-i)(8-j)} (i, j = 1, 2, \dots, 7)$$

- (3) 2つの対角線上の数の和はそれぞれ175に等しい.

$$\sum_{i=1}^7 X_{ii} = \sum_{i=1}^7 X_{(8-i)(8-i)} = 175$$

- (4) 4行目の和と4列目の和はそれぞれ175に等しい.

$$\sum_{i=1}^7 X_{i4} = \sum_{i=1}^7 X_{4i} = 175$$

- (5)  $k$  行目の和が175に等しいことと  $(8-k)$  行目の和が175に等しいことは同値.

$$\sum_{i=1}^7 X_{ki} = 175 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^7 X_{(8-k)i} = 175 (k = 1, 2, 3)$$

(1),(2)より, 中心に関して対称な2要素の和が一定ならば, 図2で示している24マスに入る数を決めれば, 残りのマスに入る数は定まる. 上記の対称性を満たす方陣  $X$  が, 通常の魔方陣の性質も満たすためには, 全ての行と列の和が175である必要があるが, (3),(4),(5)の性質から,  $X$  の1,2,3行と1,2,3列だけ満たしていれば十分であることがわかる.

7次対称方陣の数は99%の確率で  $(1.125151 \pm 0.000051) \times 10^{18}$  個の範囲に収まっていると Walter Trump によってモンテカルロ法とバックトラック法を組み合わせた手法で推定されている [7]. 7次対称方陣はおおよそ  $10^{18}$  個あるので, 少なくとも解の個数に比例する計算時間がかかるバックト

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 70 | 42 | 57 | 47 | 53 | 64 |
| 27 | 31 | 4  | 16 | 32 | 1  |
| 30 | 8  | 18 | 24 | 2  | 29 |
| 13 | 3  | 35 | 7  | 19 | 34 |
| 10 | 36 | 33 | 21 | 5  | 6  |
| 17 | 11 | 9  | 23 | 25 | 26 |
| 14 | 22 | 12 | 20 | 28 | 15 |
| 41 | 69 | 54 | 64 | 58 | 47 |

図 4 6次半魔方陣の profile

ラック法のようなアルゴリズムでは現実的な時間では計算できない.

## 3. 既存手法

6次半魔方陣の数え上げに使われた Ripatti の手法 [1] を大まかに紹介する. 6次半魔方陣とは,  $6 \times 6$  個の正方形の方陣に  $1, 2, \dots, 36$  の数を丁度一つずつ配置したもののうち, 方陣の各行各列の数の和が等しいものである. 6次半魔方陣の個数は  $94,590,660,245,399,996,601,600$  個であり, これも7次対称方陣と同様にバックトラック法で愚直に数え上げるのは現実的ではない.

半魔方陣には, 行や列を並べ替えると異なる半魔方陣に変形できるという性質がある. ある6次半魔方陣から行の並べ替え  $6!$  通りと列の並べ替え  $6!$  通りで全部で  $6! \times 6! = 518400$  種類の半魔方陣に変形できる. その518400種類の半魔方陣の中で, ちょうど一つだけが当てはまるような標準形を定義する. このようにすると, 標準形の半魔方陣の個数を数え上げれば, その数に518400を掛けることで6次半魔方陣の総数が得られる.

次に方陣を図3のように上半分と下半分の二つに分け, 方陣を上下に分けて考える. ここで, 方陣の上半分の profile を  $(\sum_{i=1}^3 X_{i1}, \sum_{i=1}^3 X_{i2}, \sum_{i=1}^3 X_{i3}, \dots, \sum_{i=1}^3 X_{i6})$  のように定義して, 方陣の下半分の profile を  $(111 - \sum_{i=4}^6 X_{i1}, 111 - \sum_{i=4}^6 X_{i2}, 111 - \sum_{i=4}^6 X_{i3}, \dots, 111 - \sum_{i=4}^6 X_{i6})$  のように定義する. 例えば, 図4の上半分の方陣の profile は  $(70, 42, 57, 47, 53, 64)$  となり, 下半分の profile は

(111 - 41, 111 - 69, 111 - 54, 111 - 64, 111 - 58, 111 - 47)となる。このように定義すると、等しい profile を持つ上半分の方陣と下半分の方陣を組み合わせた方陣は、各列の和が全て 111 になる。上半分と下半分の方陣を組み合わせたものが半魔方陣になることは、以下の全てを満たすことと同値である。

- 上半分の方陣と下半分の方陣のそれぞれが、半魔方陣の行制約（各行の数の和が一定値に等しい）を満たす。
- 上半分の方陣と下半分の方陣の profile が等しい。
- 上半分の方陣と下半分の方陣を合わせると  $1, 2, \dots, 36$  がちょうど一つずつ含まれる。

このような性質があるため、Riapatti が考案した次のような手順で半魔方陣の個数を数え上げることができる。

(1) 方陣の上半分に入れる 18 個の数の集合  $U$  と下半分に入れる 18 個の数の集合  $L$  の組  $(U, L)$  を全て生成し、それぞれについて、以下の (2),(3),(4) の手順を行う。  
 $(U \cup L = \{1, 2, \dots, 36\})$

(2) 異なる profile の値  $p$  ごとにカウンタ  $N_U[p]$  を用意し、0 で初期化しておく。半魔方陣の行制約を満たし、 $U$  の数を使う方陣の上半分を全て生成し、それぞれについて profile の値  $p$  を計算し  $N_U[p]$  を積算する。このようにして、各 profile の値  $p$  ごとに、条件を満たす方陣の上半分の個数が  $N_U[p]$  個あると計算できる。

(3) (2) と同様にカウンタ  $N_L[p]$  を用意し、半魔方陣の行制約を満たし、 $L$  の数を使う方陣の下半分を全て生成し、それぞれについて profile の値  $p$  を計算し  $N_L[p]$  を積算する。このようにして、各 profile の値  $p$  ごとに、条件を満たす方陣の下半分の個数が  $N_L[p]$  個あると計算できる。

(4) ある 1 つの組  $(U, L)$  に対する 6 次半魔方陣の個数は  $\sum_p (N_U[p] \times N_L[p])$  である。

このように、半魔方陣の数え上げの問題を方陣の上半分の数え上げと下半分の数え上げの 2 つの問題に分割することで、全体を一度に数え上げるよりもはるかに効率良く計算ができる。 $(U, L)$  の組の個数は愚直に考えると  ${}_{36}C_{18}$  通りあるが、いくつか考察すると 9,366,138 通りの  $(U, L)$  の組だけを考えれば良いことが Ripatti により示されている。Ripatti によれば、上半分の方陣の数え上げや下半分の方陣の数え上げは、半魔方陣の 1 行に入る数の集合の族  $S = \{s \mid s \subset \{1, 2, \dots, 36\}, |s| = 6, \sum_{a \in s} a = 111\}$  を前計算して活用すると効率よく計算できる。

ここで、上半分の方陣と下半分の方陣を組み合わせたものが標準形の半魔方陣になるように数え上げていくようにすると、高速に計算できる。他にもいくつかの細かい高速化テクニックやコーナーケースの処理などを Ripatti は行っているがここでは省略する。

この数え上げの手法は、各  $(U, L)$  の組ごとに完全に独立しているため、並列化による高速化が効果的である。

10 スレッドで 5 ヶ月かけて計算され、6 次半魔方陣の個数は回転や鏡像で一致するものを重複して数えないで 94,590,660,245,399,996,601,600 個であったと報告されている。

## 4. 提案手法

### 4.1 概要

3 節で述べた既存手法と同じように方陣を分割する方針で 7 次対称方陣を数え上げる。まず、7 次対称方陣を異なる 7 次対称方陣に変形するいくつかの行や列の変換について述べる。次に、方陣の分割の形を決める。その分割パターンでうまく profile を定義し、7 次対称方陣の数え上げを二つの問題に分割できることを示す。そして、ある対称方陣から単純操作で互いに変形できる対称方陣の集合の中から 1 つだけ代表元を生成できるようにするために、計算する上で効率が良い標準形を具体的に定める。最後に、細かい計算手順を示す。

### 4.2 対称方陣の変形

ある対称方陣の行や列を一定の方式で入れ替えると異なる対称方陣が得られる [8]。7 次対称方陣では以下のような入れ替えが該当する。

- 1 行目と 7 行目を入れ替える。
- 2 行目と 6 行目を入れ替える。
- 3 行目と 5 行目を入れ替える。
- 1 行目と 2 行目、6 行目と 7 行目を同時に入れ替える。
- 2 行目と 3 行目、5 行目と 6 行目を同時に入れ替える。
- 1 列目と 7 列目を入れ替える。
- 2 列目と 6 列目を入れ替える。
- 3 列目と 5 列目を入れ替える。
- 1 列目と 2 列目、6 列目と 7 列目を同時に入れ替える。
- 2 列目と 3 列目、5 列目と 6 列目を同時に入れ替える。

以上の入れ替えを組み合わせることで、ある 7 次対称方陣から行の入れ替えで 48 通り、列の入れ替えで 48 通りで全部で  $48 \times 48 = 2304$  通りの 7 次対称方陣に変形できる。

ある対称方陣からこのような変形で得られる 2304 通りの中からちょうど一つだけが満たすような標準形を 4.5.2 項で定義する。方陣を数え上げる時に標準形の方陣だけを数え上げるようにすると、7 次対称方陣の個数を標準形の 7 次対称方陣の個数に 2304 を掛けることで求めることができる。

### 4.3 方陣の分割

7 次方陣にはマスが 49 個あるため、方陣を二つに分割する分け方は全部で  $2^{49}$  通りある。その中でいくつかの例を以下に示す。

図 5(a) のように 6 次半魔方陣とほとんど同じように上半分と下半分に分ける場合、上半分の数の配置の仕方が下半分

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A | A | A |
| A | A | A | A | A | A | A |
| A | A | A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |

(a) 上3行と下4行

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |
| A | A | A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |

(b) 中央1行と端6行

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |
| A | A | A | A | A | A | A |
| A | A | A | A | A | A | A |
| A | A | A | A | A | A | A |
| B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | B | B | B | B | B |

(c) 中央3行と端4行

図5 7次方阵の分割方法の例

の数の配置に複雑に影響し合うため ( $X_{ij} + X_{(8-i)(8-j)} = 50$  であるため), 分割した2部分の方阵を独立して考えることが難しい. したがって, あるマスとそのマスと対称な位置にあるマスは同じグループに含めるような方阵の分割が好ましい. また対称な位置にある2マスが同じグループに分割されている場合, 片方のマスに入る数  $X_{ij}$  を決めると, もう片方に入る数も  $50 - X_{ij}$  に定まるため高速に数え上げることができる. また同様に, 方阵のある行や列を二つに分割すると, その行や列の制約 (和が175に等しいという条件) によって二つの部分の配置が互いに影響し合うため, 行や列をできるだけ二つに分けないようにする方がよい.

図5(b)のように中央1行と端6行の二つに分ける場合, 対称なマスは同じグループに含まれていて, 行をできるだけ分割していないため, 図5(a)で指摘した性質はほとんど満たしている. しかし, 端6行のマスの数が多すぎて, 端6行への数の配置を数え上げる問題が元々の7次方阵への配置を数え上げる問題と大差がない. そのためあまり高速な数え上げができない. 分割した結果得られる二つの部分問題を小さくするため, 分割した方阵の二つの部分のそれぞれのマス数の差をできるだけ小さくした方が高速に計算できる.

以上から図5(c)のような分割方法が他の多くの分割より優れていることが分かる. したがって, 中央3行と端4行に分割して7次対称方阵の数え上げを考える.

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 41 | 17 | 38 | 20 | 21 | 37 |
| 40 | 3  | 18 | 44 | 5  | 34 | 31 |
| 48 | 26 | 33 | 27 | 28 | 4  | 7  |
| 11 | 14 | 8  | 25 | 42 | 36 | 39 |
| 43 | 46 | 22 | 23 | 15 | 24 | 2  |
| 19 | 16 | 45 | 6  | 32 | 47 | 10 |
| 13 | 29 | 30 | 12 | 33 | 9  | 49 |

102 86 65

図6 中央3行の profile

|    |    |     |    |    |    |    |
|----|----|-----|----|----|----|----|
| 73 | 89 | 110 |    |    |    |    |
| 1  | 41 | 17  | 38 | 20 | 21 | 37 |
| 40 | 3  | 18  | 44 | 5  | 34 | 31 |
| 48 | 26 | 33  | 27 | 28 | 4  | 7  |
| 11 | 14 | 8   | 25 | 42 | 36 | 39 |
| 43 | 46 | 22  | 23 | 15 | 24 | 2  |
| 19 | 16 | 45  | 6  | 32 | 47 | 10 |
| 13 | 29 | 30  | 12 | 33 | 9  | 49 |

図7 端4行の profile を決める数

#### 4.4 分割した方阵の組み合わせる

中心に関して対称な2マスの和が一定になるような中央3行と端4行の方阵への数の配置を考える. このとき, 2.1節の考察から, ある中央3行の配置とある端4行の配置を組み合わせたものが7次対称方阵になることは, 1,2,3行と1,2,3列の和がそれぞれ175と等しく, 中央3行と端4行を合わせると1,2,...,49の数がちょうど一つずつ含まれることと同値である. したがって, 6次半魔方陣の既存手法では, 6列分の部分和のベクトルで profile を定義して分類する必要があったが, 7次対称方阵では対称性の条件から左側3列分の部分和だけを考えればよい. 方阵の中央3行の profile を  $(\sum_{i=3}^5 X_{i1}, \sum_{i=3}^5 X_{i2}, \sum_{i=3}^5 X_{i3})$  とし, 端4行の profile を  $(175 - X_{11} + X_{21} + X_{61} + X_{71}, 175 - X_{12} + X_{22} + X_{62} + X_{72}, 175 - X_{13} + X_{23} + X_{63} + X_{73})$  と定義する. 例えば, 図6のような方阵の中央3行の profile は  $(102, 86, 65)$  となり, 同じ方阵の端4行の profile は図7より,  $(175 - 73, 175 - 89, 175 - 110)$  となる. このとき, 等しい profile を持つ方阵の中央3行と端4行を組み合わせた方阵は, 1,2,3列の和がそれぞれ175と等しくなる.

したがって, 方阵の中央3行部分と端4行部分を組み合わせたものが7次対称方阵になることは, 以下の全てを満たすことと同値である.

- 方阵の中央3行に含まれる, 方阵の3行目の和が175に等しい.
- 方阵の端4行に含まれる, 方阵の1,2行目の和がそれぞれ175に等しい.
- 方阵の中央3行と方阵の端4行の profile が等しい.
- 方阵の中央3行と方阵の端4行を合わせると1,2,...,49がちょうど一つずつ含まれる.

#### 4.5 7次対称方阵の数え上げの手順

4.4小節の考察から, 以下のような手順で7次対称方阵の総数を計算することができる.

- (1) 方阵の中央3行に入れる21個の数の集合  $C$  と端4行に入れる28個の数の集合  $E$  の組  $(C, E)$  を全て生成

し、それぞれについて、以下の (2),(3),(4) の手順を行う。

$$(C \cup E = \{1, 2, \dots, 49\})$$

- (2) 異なる profile の値  $p$  ごとにカウンタ  $N_C[p]$  を用意し、0 で初期化しておく。中心に関して対称な 2 マスの和が一定で、標準形の条件を満たし、3 行目の和が 175 であり、 $C$  の数を使う方陣の中央 3 行を全て生成し、それぞれについて profile の値  $p$  を計算し  $N_C[p]$  を積算する。このようにして、各 profile の値  $p$  ごとに、条件を満たす方陣の中央 3 行の個数が  $N_C[p]$  個あると計算できる。
- (3) (2) と同様にカウンタ  $N_E[p]$  を用意し、中心に関して対称な 2 マスの和が一定で、標準形の条件を満たし、1,2 行目の和がそれぞれ 175 であり、 $E$  の数を使う方陣の端 4 行を全て生成し、それぞれについて profile の値  $p$  を計算し  $N_E[p]$  を積算する。このようにして、各 profile の値  $p$  ごとに、条件を満たす方陣の端 4 行の個数が  $N_E[p]$  個あると計算できる。
- (4) ある 1 つの組  $(C, E)$  に対する 7 次対称方陣の個数は  $\sum_p (N_C[p] \times N_E[p])$  である。

(1) についての詳細は 4.5.1 項で、標準形の定義については 4.5.2 項で、(2) についての詳細は 4.5.3 項で、(3) についての詳細は 4.5.4 項で述べる。

このようにして、7 次対称方陣の数え上げの問題を中央 3 行の数え上げと端 4 行の数え上げの 2 つの問題に分割することができ、分割しないで数え上げる場合に比べて非常に高速に計算することが可能である。

#### 4.5.1 $(C, E)$ の組の個数

4.5 節の手順 (1) における、 $(C, E)$  の組の個数について議論する。 $(C, E)$  の組は愚直に考えると  ${}_{49}C_{21}$  通りあるが、必ず  $X_{44} = 25$  であることを考慮すれば  ${}_{48}C_{20}$  通り存在する。中心に関して対称な 2 マスの和が一定だから、 $C$  に数  $x$  が含まれているとすると  $C$  に  $50 - x$  も含まれる。このことから、1, 2, ..., 24 の 24 個の数を  $(C, E)$  に振り分けることを考えれば良い。したがって  ${}_{24}C_{10} = 1,961,256$  通りの  $(C, E)$  の組について計算すれば良い。

#### 4.5.2 対称方陣の標準形

4.2 小節で説明したように、ある対称方陣の変形で得られる 2304 通りの中からちょうど一つだけが満たすような標準形を定義し、方陣を数え上げる時に標準形の方陣だけを数え上げるようにする。

4.5 小節で示した計算手順は、含むマスの数の差から、端 4 行の数え上げの方が中央 3 行の数え上げよりも圧倒的に計算時間がかかる。したがって、標準形の制約をできるだけ端 4 行にかけて、探索の枝刈りをすることで数え上げが高速になる。以上のことから 7 次対称方陣の標準形を以下の全てを満たすものと定義する。

$$(1) X_{11} < X_{17}, X_{12} < X_{16}, X_{13} < X_{15}$$

$$(2) X_{11} < X_{12} < X_{13}$$

$$(3) row_1 < row_7, row_2 < row_6, row_3 < row_5$$

$$(4) row_3 < row_1 < row_2$$

ただし、 $row_i = \min\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{i7}\}$  とする。

(1),(2) は列の入れ替えに関する制約で、全て 1 行目に制約をかけている。(3),(4) は行の入れ替えに関する制約で、全ての制約を端 4 行にかけることはできないので、 $row_3$  が小さくなるようにしている。 $row_3 = \min\{row_1, row_2, row_3, row_5, row_6, row_7\}$  が成り立つので、標準形の 3 行目に必ず 4 行目にはない数で最小の数が含まれる。したがって中央 3 行には必ず 1 が含まれる。4.5.1 小節で述べた、計算する必要がある  $(C, E)$  の組の個数は標準形のこの性質を用いると  ${}_{23}C_9 = 817,190$  個まで減る。このように標準形を定義することで、端 4 行の数え上げがおよそ 384 倍速くなり、また計算する必要がある  $(C, E)$  の組は約 0.4 倍になる。

#### 4.5.3 中央 3 行の数え上げ

4.5 小節で述べた計算手順の (2) について詳しく説明する。2.1 節の図 2 より、3 行目に入る数と  $X_{41}, X_{42}, X_{43}$  を決めれば、中央 3 行の残りのマスに入る数は決まる。

対称方陣の 4 行目以外の行に入れることができる 1 行の数の集合の族  $S = \{s \mid s \subset \{1, 2, \dots, 24, 26, 27, \dots, 49\}, \sum_{a \in s} a = 175, \forall x, y \in s, x + y \neq 50\}$  を前もって計算しておく。中央 3 行に  $C$  の数を入れるときの対称方陣の 3 行目に入る数の集合の族  $S'$  は  $S' = \{s \mid s \in S, s \subset C\}$  で計算できる。

$S'$  の各要素  $s$  について、方陣の 3 行目には  $s$  の順列通りの数の入れ方があり、5 行目にはそれと対称な数が入る。ただし、標準形の制約から  $row_3 < row_5$  でないものは除く。 $C$  から 3,5 行目に入れた数を除いた残りの 6 つの数から  $X_{41}, X_{42}, X_{43}$  に入れる数の決め方は、 $6 \times 4 \times 2$  通りある。これら全ての中央 3 行への数の配置を生成し、それぞれについて profile の値  $p$  を計算し、 $N_C[p]$  を計算する。

#### 4.5.4 端 4 行の数え上げ

4.5 小節で述べた計算手順の (3) について詳しく説明する。2.1 節の図 2 より、1 行目に入る数と 2 行目に入る数を決めれば、端 4 行の残りのマスに入る数は決まる。

中央 3 行の数え上げと同様に、対称方陣の 1 行目に入る数の集合の族  $S'$  は  $S' = \{s \mid s \in S, s \subset E\}$  で計算できる。端 4 行の 1 行目に入れる数を決めた後に 2 行目に入る数を高速に求めるために、 $f(X)$  を全ての  $X$  について前計算しておく。ただし、 $X$  は  $E$  の数から 1,7 行目に入れた数を除いたときの 14 個の数の集合で、 $X \subset \{1, 2, \dots, 24, 26, 27, \dots, 49\}, |X| = 14, \forall x \in X, \exists y \in X, x + y = 50$ 。  $f(X)$  は  $X$  の部分集合で 7 次対称方陣の 2 行目に入れることができる数の集合の族で、 $f(X) = \{s \mid s \subset X, |s| = 7, \sum_{a \in s} a = 175, \forall x, y \in s, x + y \neq 50\}$ 。

$S'$  の各要素  $s$  について、方陣の 1 行目には  $s$  の順列通り

の数の入れ方があり、7行目にはそれと対称な数が入る。ただし標準形の制約を満たさないものは除く。 $E$ から $s$ と7行目に入れた数を除いた数の集合を $X$ とすると、2行目には $f(X)$ の各要素 $s'$ ごとに、 $s'$ の順列通りの数の入れ方がある。これら全ての端4行への数の配置を生成し、それぞれについてprofileを計算し、 $N_E[p]$ を求める。

## 5. 実験結果

### 5.1 結果

4節で説明した、7次対称方陣の数え上げの手法をc++で実装した。 $(C, E)$ の各組に対して1, 2, ..., 817190のID番号を振り、数え上げる $(C, E)$ のID番号を指定して7次対称方陣の数え上げを行うように実装した。

実験環境として、64bit Windows 7, Intel Core i7-4960X 3.6GHz CPU, 64GB RAM と 64bit macOS High Sierra, Intel Core i5 1.8GHz, 8GB RAM の二つの計算機を用いた。817190個の $(C, E)$ の組を50000個程度ずつの16個のグループに分けて、1つのスレッドで1つのグループの全ての7次対称方陣の個数を計算させた。結果は表2のようになった。

各グループの7次対称方陣の個数を合計して、7次対称方陣は回転や鏡像によって一致するものを重複して数えないで、1,125,154,039,419,854,784個あると求められた。この結果はオンライン整数数列大辞典(OEIS)に投稿され、受理されている[6]。計算はWindowsの計算機で12スレッド、Macの計算機で4スレッドで実行し、計算時間は約2週間かかった。提案手法の数え上げは各 $(C, E)$ の組ごとに完全に独立しているため、並列化による高速化が効果的である。817190個の問題のグループ分けについては深く考えずに実行したが、最大の計算時間が14.8日で最小の計算時間が12.9日であったため、結果として、十分効果的な負荷分散ができていた。

### 5.2 検証

7次対称方陣の数は99%の確率で $(1.125151 \pm 0.000051) \times 10^{18}$ 個の範囲に収まっているとWalter Trumpによって推定されている[7]。今回得られた結果1,125,154,039,419,854,784はこの推定の範囲内に収まっている。

4.2小節で説明したように、ある7次対称方陣から行や列の入れ替えで2304通りの対称方陣に変形できる。ここに90度回転の操作を加えると、ある7次対称方陣から $2304 \times 2 = 4608$ 通りの対称方陣に変形できる。したがって、回転や鏡像によって一致する方陣を重複して数えない時、7次対称方陣の個数は $576(= 4608/8)$ の倍数になっている事が示せる。今回得られた結果はこの性質も満たしている。

## 6. まとめ

本稿では、7次対称方陣の総数を求める手法を提案した。提案手法は7次方陣を2つに分割し、7次対称方陣の数え上げの問題を2つのより簡単な数え上げの問題に帰着させて7次対称方陣の数え上げを行なっている。実際に提案手法で計算し、7次対称方陣の総数が回転や鏡像で一致するものを重複して数えないで1,125,154,039,419,854,784個であることを初めて明らかにした。この結果を含めて、既知の方陣の個数を $n = 10$ まで表3にまとめる。なお、半偶数(4の倍数でない偶数)次の対称方陣が存在しないことが、Charles Planckによって証明されている[3]。また、方陣の個数が未知のものにはWalter Trumpによる推定値を記載した[7]。

今後は、より高次の対称方陣の個数や他の総数が知られていない魔方陣の個数を明らかにしたい。また、方陣を適当に順序付けて、 $i$ 番目の方陣を高速に求めたり、いくつか条件を指定して方陣の検索ができるような方陣の索引についても考えてみたい。

**謝辞** 様々な助言をくださった京都大学 大学院情報学 研究科 通信情報システム専攻 湊研究室の皆様へ深く感謝します。

## 参考文献

- [1] A. Ripatti. On the number of semi-magic squares of order 6. arXiv preprint arXiv:1807.02983. 2018
- [2] B.F. de Bessy. Des quarrées ou tables magiques. Imp. Royale, 1693
- [3] C. Planck. Pandiagonal magics of orders 6 and 10 with minimal numbers. The Monist, 29(2):307-316, 1919.
- [4] K. Ollerenshaw and H. Bondi. Magic Squares of Order Four. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Mathematical and Physical Sciences. Royal Society, 1982.
- [5] M. Gardner. Mathematical games. Scientific American, 234(1):118-123, 1976.
- [6] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at <https://oeis.org>, 2018, Sequence A081262
- [7] W. Trump. How many magic squares are there? <http://www.trump.de/magic-squares/howmany.html> (2018.12.14).
- [8] 大森清美. 新版魔法陣の世界. 日本評論社. 2018.
- [9] 平山諱, 阿部楽方. 方陣の研究. 大阪教育図書株式会社. 1983.

表 2 計算結果

| 計算する (C,E) の ID 番号 | 7 次対称方陣の個数         | 計算時間   | 用いた計算機  |
|--------------------|--------------------|--------|---------|
| 1~50000            | 100798108317305280 | 14.5 日 | Mac     |
| 50001~100000       | 91535720218951104  | 14.4 日 | Windows |
| 100001~150000      | 88372685889123552  | 14.2 日 | Windows |
| 150001~200000      | 83733351186221856  | 14.1 日 | Windows |
| 200001~250000      | 81588443264793504  | 14.0 日 | Mac     |
| 250001~300000      | 79361704382078592  | 13.8 日 | Windows |
| 300001~350000      | 68614934779440864  | 13.9 日 | Windows |
| 350001~400000      | 60333826371280992  | 13.9 日 | Windows |
| 400001~450000      | 58972609900819872  | 13.6 日 | Mac     |
| 450001~500000      | 56989665917916192  | 13.6 日 | Windows |
| 500001~550000      | 58076327642080032  | 13.6 日 | Windows |
| 550001~600000      | 58605580160376480  | 13.7 日 | Windows |
| 600001~650000      | 56406391669618560  | 12.9 日 | Mac     |
| 650001~700000      | 56103389221682304  | 13.5 日 | Windows |
| 700001~750000      | 54683346217110336  | 13.0 日 | Windows |
| 750001~817190      | 70977954281055264  | 14.8 日 | Windows |

表 3 本稿の結果を含めた方陣の既知の個数

| n  | 半魔方陣                           | 魔方陣                             | 対称方陣                          |
|----|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| 3  | 9                              | 1                               | 1                             |
| 4  | 68,688                         | 880                             | 48                            |
| 5  | 579,043,051,200                | 275,305,224                     | 48,544                        |
| 6  | 94,590,660,245,399,996,601,600 | $(1.775399(42) \times 10^{19})$ | 0                             |
| 7  | $(4.2848(17) \times 10^{38})$  | $(3.79809(50) \times 10^{34})$  | 1,125,154,039,419,854,784     |
| 8  | $(1.0806(12) \times 10^{59})$  | $(5.2225(18) \times 10^{54})$   | $(2.5228(14) \times 10^{27})$ |
| 9  | $(2.9008(22) \times 10^{84})$  | $(7.8448(38) \times 10^{79})$   | $(7.28(15) \times 10^{40})$   |
| 10 | $(1.4626(16) \times 10^{115})$ | $(2.4149(12) \times 10^{110})$  | 0                             |

\*  $1.775399(42) \times 10^{19}$  などの推定値は, 99%の確率で正確な値が  $(1.775399 \pm 0.000042) \times 10^{19}$  の範囲内であることを意味する.