

絡み目を用いた選好の自然な表現

水野 隆文^{1,a)}

概要：一対比較等を用いて代替案の選好を提示する場合、全順序のような整合した構造を示さない場合がある。意思決定においては、そのような不整合な順序構造から、全体を見渡す大域的な視点から整合した順序を導き、最良の代替案を提示する。本研究では、絡み目を用いた新しい図表により、視点の異なる順序構造同士の関係を表現する手法を提案する。提案する図表では、各代替案をループにより表現し、2つの代替案の間の順序はループの交差により表現する。そして、一対比較等により提示される順序構造と、大域的な視点による順序構造との関係の自然さを、自由圏の間の関手の可換性により表現する。これにより、一対比較の結果から最良の代替案を選択するためのアルゴリズムについて示唆を与える。

キーワード：可視化、一対比較、ランキング、絡み目、自然変換

A Natural Representation on a Link Diagram to Visualize Relationships between Pairwise Comparisons and Priorities Derived from Them

TAKAFUMI MIZUNO^{1,a)}

1. はじめに

代替案同士を比較し、代替案の集合から最良の代替案を選択すること(ランキング)は、意思決定や社会選択において重要な位置を占める [1]。ここでは、代替案の集合 $N = \{1, \dots, n\}$ について、代替案同士1対1で行う引き分けの無い比較の総当たり戦から、代替案の順位を決める問題を対象とする。このような一対比較の結果は、つぎの隣接行列 $L = (l_{ij})$ により表現できる。

$$L = (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $l_{ij} + l_{ji} = 1$, $i \neq j$, $l_{ii} = 0$ であり、代替案 i が j に勝った(あるいは、優れている、好ましい)とき $l_{ij} = 1$, それ以外るとき $l_{ij} = 0$ である。一対比較の結果は、ノード

の集合を N とし、 $l_{ij} = 1$ のときにノード i から j に有向辺を与える有向グラフによっても表現される。一対比較により構成される、任意の2頂点間にちょうど1本の有向辺がある有向グラフは、特に、支配グラフ [2] やトーナメントグラフ [3] と呼ばれる。

隣接グラフや支配グラフから代替案の順序を決定し、最良の代替案を選択する手法は数多くあるが、一対比較の結果とそこから導かれた順序を、一つの図として可視化する方法はなかった。本稿では、この両者の関係を可視化する絡み目の図を与え、その表現の自然さを数理モデルにより表し、自然な関係を導くランキング手法について提案する。

2. 一対比較の可視化

本稿で提案する図は、各代替案を、地面の上に浮く輪(ループ)として表現し、代替案の優劣を、輪の重なりで表現する [4]。代替案 i が j に勝つ場合は、 i を表現する輪が j を表現する輪の上に重なる。各輪は、自分以外のすべての輪と2回交差するように配置する。1つの交差で一対比較の結果を、もう一方で代替案全体についての順序を表現する。例えば、つぎの隣接行列

¹ 名城大学
Meijo University, 4-102-9 Yada-Minami, Higashi-ku,
Nagoya-shi, Aichi 461-8534, Japan
^{a)} tmizuno@meijo-u.ac.jp

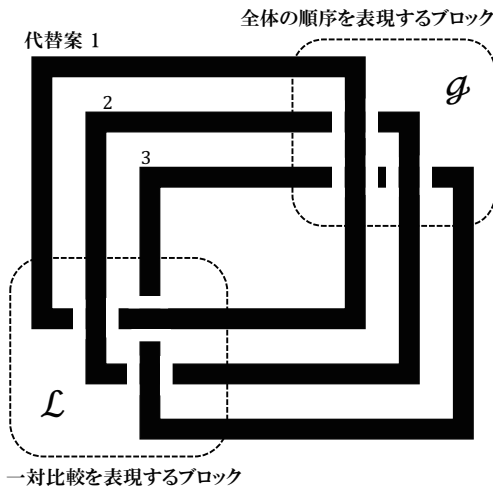


図 1 隣接行列 (2) と, 全体の順序 $1 \succ 2 \succ 3$ の表現

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

から, 代替案の順序 $1 \succ 2 \succ 3$ が得られたとき, これを図 1 のように表現する. 図の左下のブロックの交差で一対比較の結果を表現し, 右上のブロックの交差でそこから導かれた全体の順序を表現する.

3. 表現の自然さ

この図における, 一対比較の結果と全体の順序の間の「自然さ」を, 自然変換により表現する. そこで, つぎのように自由圏を構成する. 対象の集合を代替案の集合とし, 代替案 i が j に勝つときに, 対象 i から j への射 ij が存在し, 恒等射については $id(i) = i$ とする. 射 f と g について, $codom(f) = dom(g)$ のとき, これらを合成した射 $f;g$ も射の集合に含む*1.

提案する図では, 左下のブロックで圏 \mathcal{L} を構成し, 右上のブロックで圏 \mathcal{G} を構成する. 図上で輪をたどるときに, ある輪から下の輪へジャンプのみを許す移動が, それぞれの射を表現する.

すると, 一対比較の結果と全体の順序の関係は, \mathcal{G} から \mathcal{L} への共変関手 F を用いて表現できる. 関手 F は, $F(i) = i$ により右上と左下でひとつの輪が繋がっていることを表す. 射の対応は複数考えられるが, 例えば図 1 では, つぎのように関手 F を与えることができる.

$$F(1) = 1, \quad F(2) = 2, \quad F(3) = 3, \quad (3)$$

$$F(12) = 13; 32, \quad F(13) = 13, \quad F(23) = 21; 13. \quad (4)$$

このような構成により, 一対比較と全体の順序の自然な関係を, 共変関手 F と \mathcal{G} の恒等関手の間の自然変換 η として把握できる.

*1 f の後に g を合成する射. $f;g \equiv g \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} F(i) = i & \xleftarrow{\eta} & i \\ \mathcal{L} \quad F(ij) \downarrow & & ij \downarrow \quad \mathcal{G} \\ F(j) = j & \xleftarrow{\eta} & j \end{array} \quad (5)$$

ここで, 一対比較と全体の順序の自然な関係における順位の整合をつぎのように表現できる. ある代替案 $p \in Obj(\mathcal{G})$ について, W を p に勝つ代替案の集合, V を p に負ける代替案の集合とする. すべての $i \in W, j \in V$ について, 射の対応を $F(ij) = ij$ と与えることができるとき, 本稿では, p の順位が整合していると表現する. すると, 図上での, p の輪の分離可能性により, p の順位の整合性を表現できる.

4. ランキングのアルゴリズム

前述の構成により, 一対比較の結果から全体の順序を決めるランキングは, 圏 \mathcal{G} と共変関手 F を構成するという問題として解釈される. ここでは, \mathcal{G} で輪を上から下に 1 回移動したときに, F で移った先での上から下への移動を高々 2 回に抑えるような, \mathcal{G} と F の構成法を与える.

ある代替案 p をピボットとして, p に勝つ代替案の集合を W , p に負ける集合を $V = N/(\{p\} \cup W)$ とする. p の順位は $|W| + 1$ であり, $w \in W$ は p に 1 段階で勝ち, $q \in V$ には多くとも 2 段階で勝つ. 集合 W, V について, このようなピボットの選択と集合の分割を再帰的に繰り返すと, 代替案の順序が求まり, 所望の圏と関手が得られる.

ピボットの選択に自由度があるが, 例えば, 対象となる代替案の集合の中で, 一番勝ち数の多い代替案を選択することができる.

5. おわりに

本稿では, 一対比較と, それから導かれる全体の順序を同時に可視化する, 絡み目を用いた図を与えた. 一対比較の勝敗を局所構造と呼び, 全体での順序を大域構造と呼ぶと, この図は, 局所構造と大域構造の関係の可視化する. さらに, 両者の関係の自然さを, 自由圏の自然変換により表現した. 自然なランキングを与えるアルゴリズムでは, 大域構造で勝つならば局所構造では多くとも 2 段階で勝つという関係を構築したが, この順序の存在は, 支配グラフに必ず支配点が存在する事実 [2] により保証される.

参考文献

- [1] Langville, A.N., Meyer, C.D; 岩野和生 他訳: レイティング・ランキングの数理, 共立出版 (2015).
- [2] 小林みどり: あたらしいグラフ理論入門, 牧野書店 (2013).
- [3] R.J. ウィルソン; 西関隆夫, 西関裕子 訳: グラフ理論入門 原著第 4 版, 近代科学社 (2001).
- [4] 水野隆文: 一対比較の結果を表現する図の提案, 情報処理学会 第 80 回 (平成 30 年) 全国大会講演論文集 (4), pp.3-4 (2018).