

機会制約ポートフォリオ最適化における 銀行預金と銀行融資の有効性の評価

綿谷 剛至¹ 田川 聖治^{2,a)}

概要: 本稿では、銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化と、銀行を利用しないポートフォリオ最適化の機会制約問題について、それらの等価問題を紹介するとともに、適応型差分進化アルゴリズムを適用する。さらに、中規模なポートフォリオ最適化の数値実験から、銀行預金の金利、銀行融資の金利、銀行融資の限度額、並びにリターンが、ポートフォリオの危険率（リスク）に与える影響を検証する。

Effectiveness of Bank Deposit and Bank Loan For Chance Constrained Portfolio Optimization

WATATANI TAKESHI¹ TAGAWA KIYOHARU^{2,a)}

1. はじめに

本稿では、銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化と、銀行を利用しないポートフォリオ最適化の機会制約問題を紹介します。それらの等価問題に対して差分進化アルゴリズム（DE: Differential Evolution）[1]を拡張した適応型DE（JADE）[2]を適用する。また、数値実験から銀行預金と銀行融資の有効性と特徴を明らかにする。

2. 機会制約ポートフォリオ最適化

ポートフォリオを n 個の資産への投資比率 $x_i \in \mathbb{R}$ のベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ によって表現する。また、資産 i の収益率 ξ_i は、正規分布に従う確率変数とする。

ポートフォリオ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ によるリターンは、

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i = \boldsymbol{\xi} \mathbf{x}^T \quad (1)$$

となる。リターン $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ も以下の正規分布に従う。

¹ 近畿大学大学院 総合理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering Research,
Kindai University, Higashi-Osaka 577-8502 Japan

² 近畿大学 理工学部
School of Science and Engineering,
Kindai University, Higashi-Osaka 577-8502 Japan

a) tagawa@info.kindai.ac.jp

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \text{Normal}(\mu_r(\mathbf{x}), \sigma_r^2(\mathbf{x})) \quad (2)$$

式(1)のリターンが下限値 γ を下回る確率を危険率 α とし、それを最小化する機会制約問題の等価問題は、

$$\begin{cases} \min & f(\mathbf{x}) = \frac{\gamma - \mu_r(\mathbf{x})}{\sigma_r(\mathbf{x})} \\ \text{sub. to} & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

となる。ただし、標準正規分布の分布関数 Φ から、ポートフォリオ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ のリスクは $\alpha = \Phi(f(\mathbf{x}))$ である。

3. 銀行預金と銀行融資の利用

銀行への投資比率を $x_0 \in \mathbb{R}$ とする。ここで、銀行預金の場合は $x_0 > 0$ であり、銀行融資の場合は $x_0 < 0$ である。また、預金の金利を D 、融資の金利を L ($0 \leq D < L$) とし、銀行の融資額は自己資金の m 倍までとする。

銀行を利用した機会制約問題の等価問題は、

$$\begin{cases} \min & f(\mathbf{x}) = \frac{\gamma - (\mu_r(\mathbf{x}) + \mu_0 x_0)}{\sigma_r(\mathbf{x})} \\ \text{sub. to} & x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ & -m \leq x_0 \leq 1, \\ & 0 \leq x_i \leq m + 1, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4)$$

となり、銀行の収益率は $\mu_0 = D$ または $\mu_0 = L$ である。

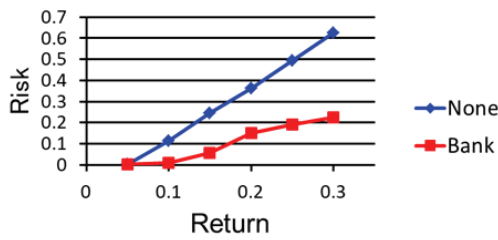


図 1 銀行利用の有無の比較 ($L = 0.06$, $m = 2$)

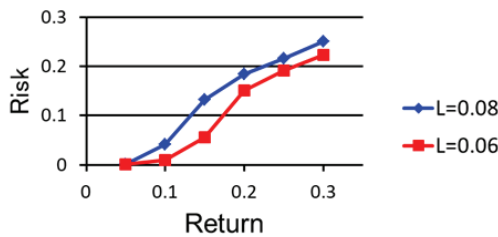


図 2 リターンとリスクの関係 ($m = 2$)

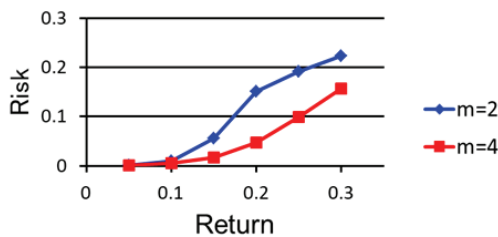


図 3 リターンとリスクの関係 ($L = 0.06$)

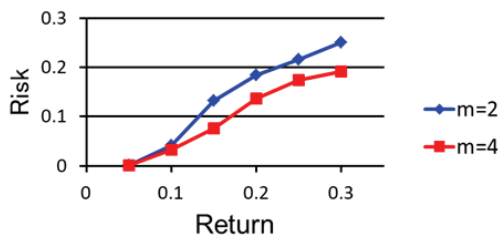


図 4 リターンとリスクの関係 ($L = 0.08$)

4. 数値実験

資産数 $n = 10$ の例題 [3] を、式 (3) と式 (4) の最適化問題に変換し、JADE を適用した。預金の金利は $D = 0.02$ として、融資の金利 L と制限 m を変えて得られたリターン γ とリスク α の関係を図 1 から図 4 に示す。図 1 から、銀行を利用するとリスクが大幅に抑えられる。図 2 から、融資の金利 L が低いとリスク α が小さい。図 3 と図 4 から、融資の限度額 m が大きいとリスク α が小さい。

上記の銀行を利用した最適化問題において、リターン γ と銀行の投資比率 x_0 の関係を図 5 から図 7 に示す。実験結果から、リターン γ が小さいときは銀行預金 ($x_0 > 0$)

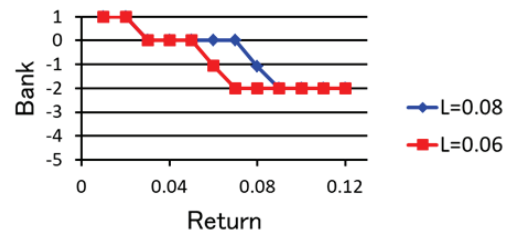


図 5 リターンと銀行の投資比率の関係 ($m = 2$)

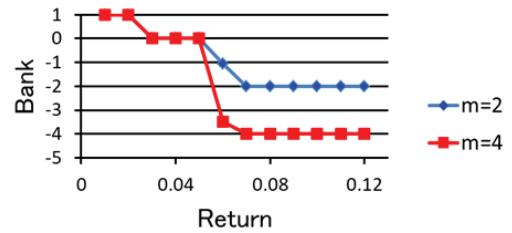


図 6 リターンと銀行の投資比率の関係 ($L = 0.06$)

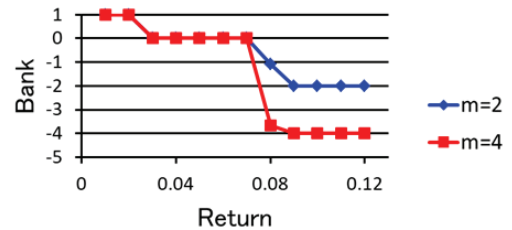


図 7 リターンと銀行の投資比率の関係 ($L = 0.08$)

を利用し、リターン γ が大きいときは銀行融資 ($x_0 < 0$) を利用することが確認できる。図 5 から、銀行融資を受けるか否かは、金利 L とリターン γ の兼ね合いで決まることがわかる。また、図 6 と図 7 から、銀行融資を受けた場合の借金は、何れも限度額 ($x_0 = -m$) となっている。

5. おわりに

機会制約ポートフォリオ最適化では、銀行の預金と融資を適切に利用することでリスクが抑えられることを確認した。また、銀行融資を受けて資産に投資する場合、お金は借りられるだけ借りた方がよいことを明らかにした。

参考文献

- [1] K. V. Price, R. M. Storn, and J. A. Lampinen : Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization, Springer (2005).
- [2] J. Zhang and A. C. Sanderson : JADE: adaptive differential evolution with optional external archive, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 13, No. 5, pp. 945–958 (2009).
- [3] B. Niu, W. Yi, L. Tan, J. Liu, Y. Li, and H. Wang: Multi-objective comprehensive learning bacterial foraging optimization for portfolio problem, *Proc. of ICSI 2017*, LNCS 10385, Springer, pp. 69-76 (2017).