Vol.2018-MPS-120 No.10
2018/9/26

銀行預金と銀行融資を利用した機会制約ポートフォリオ最適化

田川 聖治[1,a)]　綿谷 剛至[2]

概要：本稿では，銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化を機会制約問題に定式化し，適応型差分進化アルゴリズム（JADE）を適用する．まず，銀行を利用したポートフォリオ最適化の定式化では，安定資産である銀行預金のほか，銀行融資を受けた株などのリスク性資産への投資を認める．次に，機会制約問題の定式化では，期待したリターンが得られない確率によってリスクを評価し，そのリスクを最小化する．さらに，機会制約問題を確率が陽に含まれない等価問題に変換し，個体の表現方法を工夫することで JADE を適用する．最後に，リターンと預金や融資の金利がリスクに与える影響を評価する．

Chance Constrained Portfolio Optimization Using Bank Deposit and Bank Loan

Tagawa Kiyoharu[1,a)]　Watatani Takeshi[2]

1. はじめに

ポートフォリオとは，金融商品の組合せのことである．また，ポートフォリオを組むとは，どのような投資信託を購入しようとか，株はどの銘柄を何株ほど持つか，などを検討するという意味である．もともとの語源は，紙ばさみや書類入れという意味であり，欧米では紙ばさみに資産の明細書を保管していたことが言葉の由来である [1].

ノーベル経済学賞を受賞した Markowitz[2] らによって，ポートフォリオの最適化問題が定式化された．その後，金融工学の分野では，ポートフォリオ最適化の定式化を中心とした研究が行われている [3], [4]．また，ポートフォリオ最適化の求解では，進化計算も利用されている [5].

本稿は，銀行の預金と融資を含むポートフォリオ最適化を機会制約問題 [6] に定式化し，差分進化（DE：Differential Evolution）[7] を拡張した適応型 DE[8] を適用する．

1　近畿大学 理工学部
School of Science and Engineering,
Kindai University, Higashi-Osaka 577-8502 Japan
2　近畿大学大学院 総合理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering Research,
Kindai University, Higashi-Osaka 577-8502 Japan
a)　tagawa@info.kindai.ac.jp

2. ポートフォリオ最適化

2.1 ポートフォリオの定義

資産数を n 個としてポートフォリオを組む．資産 i への投資金額を X_i とし，投資の自己資金を X とすると，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X \tag{1}$$

となる．空売りは禁止して $X_i \geq 0$ とする．

投資のための自己資金 X は投資家ごと異なる．そこで，資産 i への投資比率 $x_i = X_i/X$ を用いると，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{2}$$

となる．投資比率 x_i の上下限値は以下の通りである．

$$0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

本稿では，ポートフォリオを n 個の資産への投資比率 $x_i \in \Re$ のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \Re^n$ で表現する．

資産 i の収益率 ξ_i は，以下のような平均 μ_i，分散 σ_i^2 の正規分布 [9] に従う確率変数としてモデル化する．

$$\xi_i \sim \mathrm{Normal}(\mu_i,\ \sigma_i^2) \tag{4}$$

式 (4) の正規分布の平均 μ_i と分散 σ_i^2 は，資産 i の価格変動に関する過去のデータから推定する．平均 μ_i が大きいと高い収益率が期待できる．また，分散 σ_i^2 は資産 i の収益率 ξ_i の不確実性であり，リスクの指標となる．

通常，資産 i と資産 j からの収益には相関関係がある．両者の相関係数 ρ_{ij} が $\rho_{ij} > 0$ ならば，資産 i の価値が上がると資産 j の価値も上がる．逆に $\rho_{ij} < 0$ であるならば，片方の価値が上がると他方の価値は下がる．そこで，過去のデータから n 個の資産の相関係数 ρ_{ij} を調べることで，以下のような相関行列 $\boldsymbol{R}$ を求めることができる．

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

ただし，相関係数は $\rho_{ij} = \rho_{ji}$，$-1 \le \rho_{ij} \le 1$ である．

式 (5) の相関行列 $\boldsymbol{R}$ を考慮すると，n 個の収益率 $\xi_i \in \Re$，$i = 1, \cdots, n$ のベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \Re^n$ は，以下のような多変量の正規分布に従う確率変数となる．

$$\boldsymbol{\xi} \sim \mathrm{Normal}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V}) \tag{6}$$

式 (6) の正規分布の平均は $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \Re^n$ である．また，分散共分散行列 $\boldsymbol{V}$ は，各収益率 ξ_i の標準偏差 σ_i と相関行列 $\boldsymbol{R}$ から，以下のように得られる．

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{S} \tag{7}$$

ただし，対角行列 $\boldsymbol{S}$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

2.2 従来の最適化問題の定式化

ポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ によるリターンは，

$$r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, x_i = \boldsymbol{\xi}\, \boldsymbol{x}^T \tag{9}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{\xi} \in \Re^n$ は確率変数であるため，リターン $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Re$ も確率変数となる．さらに，正規分布の線形性 [9] から，$r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Re$ は以下の正規分布に従う．

$$r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \mathrm{Normal}(\mu_r(\boldsymbol{x}), \sigma_r^2(\boldsymbol{x})) \tag{10}$$

式 (10) の正規分布の平均（期待値）は，

$$\mu_r(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, x_i = \boldsymbol{\mu}\, \boldsymbol{x}^T \tag{11}$$

である．また，式 (10) の正規分布の分散は，

$$\sigma_r^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{x}^T \tag{12}$$

である．ここで，式 (12) のリターンの分散 $\sigma_r^2(\boldsymbol{x}) \in \Re$ をポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ のリスクの指標とする．

ポートフォリオ最適化 [4] は，式 (12) の分散で評価したポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ のリスクの最小化を目的として，式 (11) のリターンの期待値に対する下限値 γ と式 (2) を制約条件とし，以下の最適化問題に定式化される．

$$\left[\begin{array}{ll} \min & \sigma_r^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{x}^T \\ \text{sub. to} & \mu_r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}\, \boldsymbol{x}^T \ge \gamma, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{13}$$

式 (13) は凸 2 次計画問題であるため，従来の数理計画法の最適化手法 [10] を用いて容易に解が得られる．

2.3 機会制約問題の定式化

式 (12) の分散 $\sigma_r^2(\boldsymbol{x})$ の大小によるリスクの評価は感覚的にわかりにくい．そこで，式 (9) のリターンが下限値 γ を下回る確率を危険率 $\alpha \in (0, 1)$ とし，その最小化を目的として，以下のように機会制約問題を定式化する．

$$\left[\begin{array}{ll} \min & \alpha \\ \text{sub. to} & \Pr(r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \ge \gamma) \ge 1 - \alpha, \\ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{14}$$

ただし，$\Pr(E)$ は事象 E が起きる確率である．

例えば，ポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ の危険率 α が 10%ならば，γ 以上のリターンが得られる確率は 90%である．

2.4 機会制約問題の等価問題

通常，機会制約問題 [6] の難点は，その求解で負荷の大きなモンテカルロ法による確率の計算が必要となることである．しかし，式 (14) の機会制約問題では確率変数であるリターン $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Re$ が式 (10) の正規分布に従うため，確率を陽に含まない等価な最適化問題に変換できる [11]．

まず，式 (14) の機会制約条件の余事象 $\Pr(r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \le \gamma)$ において，以下のように $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ を標準化する．

$$\Pr\left(\frac{r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mu_r(\boldsymbol{x})}{\sigma_r(\boldsymbol{x})} \le \frac{\gamma - \mu_r(\boldsymbol{x})}{\sigma_r(\boldsymbol{x})}\right) \le \alpha \tag{15}$$

式 (15) は標準正規分布の分布関数を Φ とすると，

$$\Phi\left(\frac{\gamma - \mu_r(\boldsymbol{x})}{\sigma_r(\boldsymbol{x})}\right) \le \alpha \tag{16}$$

となる．ここで，Φ は以下のように定義される [9]．

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2}\right) d\,\tau \tag{17}$$

分布関数 Φ は単調増加であるため，危険率 α を最小化

する式 (14) の機会制約問題は，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最小化する以下の確率を含まない最適化問題と等価である．

$$\left[\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\gamma - \mu_r(\boldsymbol{x})}{\sigma_r(\boldsymbol{x})} \\ \text{sub. to} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{18}$$

上記の機会制約問題を解いて得られたポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ のリスクは，式 (16) から $\alpha = \Phi(f(\boldsymbol{x}))$ である．

3. 銀行預金と銀行融資の利用

3.1 銀行の預金と融資のモデル

安定資産である銀行への投資比率を $x_0 \in \Re$ とする．銀行預金の場合は $x_0 > 0$ であり，その金利を D とする．また，銀行融資の場合は $x_0 < 0$ であり，その金利を L とする．すなわち，$x_0 \in \Re$ の収益率 $\mu_0 \in \Re$ は定数であり，

$$\mu_0 = \begin{cases} D & \text{if} \quad x_0 > 0 \\ L & \text{if} \quad x_0 < 0 \end{cases} \tag{19}$$

となる．預金と融資の金利の関係は $0 \leq D < L$ である．

ポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ に $x_0 \in \Re$ を加えると，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + x_0 = 1 \tag{20}$$

となる．

銀行預金の上限は自己資金であり，銀行の融資額は自己資金の m 倍までとする．このため，銀行の投資比率 x_0 と自己資金に銀行融資を加えた投資比率 x_i の上下限値は，

$$-m \leq x_0 \leq 1, \quad 0 \leq x_i \leq m+1,\ i = 1, \cdots, n \tag{21}$$

となる [*1]．

3.2 提案する最適化問題の定式化

ポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ のリターンは，式 (20) から，

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) &= r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu_0 x_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i + \mu_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mu_0) x_i + \mu_0 \end{aligned} \tag{22}$$

となる．$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Re$ は以下の正規分布に従う．

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \mathrm{Normal}(\mu_g(\boldsymbol{x}),\, \sigma_g^2(\boldsymbol{x})) \tag{23}$$

ただし，分散は $\sigma_g^2(\boldsymbol{x}) = \sigma_r^2(\boldsymbol{x})$ である．また，式 (20) から，平均（期待値）は以下のように導出できる．

$$\mu_g(\boldsymbol{x}) = \mu_r(\boldsymbol{x}) + \mu_0 x_0 = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu_0) x_i + \mu_0 \tag{24}$$

銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化も，分散によるポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ のリスクの最小化を目的として，式 (24) のリターンの期待値に対する下限値 γ を制約条件とし，以下の最適化問題に定式化できる．

$$\left[\begin{array}{ll} \min & \sigma_g^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{x}^T \\ \text{sub. to} & \mu_g(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu_0) x_i + \mu_0 \geq \gamma, \\ & x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & -m \leq x_0 \leq 1, \\ & 0 \leq x_i \leq m+1,\ i = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{25}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \Re^n$ である．

式 (25) の最適化問題では収益率 μ_0 が式 (19) から 2 値を取るため，従来の最適化手法 [10] は直接適用できない．

3.3 機会制約問題と等価問題

銀行の預金と融資を利用したポートフォリオ最適化の機会制約問題は，式 (22) のリターンが下限値 γ を下回る確率である危険率 $\alpha \in (0, 1)$ の最小化を目的として，

$$\left[\begin{array}{ll} \min & \alpha \\ \text{sub. to} & \Pr(g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq \gamma) \geq 1 - \alpha, \\ & x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & -m \leq x_0 \leq 1, \\ & 0 \leq x_i \leq m+1,\ i = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{26}$$

となる．また，式 (26) の機会制約問題の等価問題は，

$$\left[\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\gamma - \mu_g(\boldsymbol{x})}{\sigma_g(\boldsymbol{x})} \\ \text{sub. to} & x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ & -m \leq x_0 \leq 1, \\ & 0 \leq x_i \leq m+1,\ i = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{27}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \Re^n$ である．

4. 適応型差分進化（JADE）

制約条件のない最適化問題には，差分進化（DE）などの進化計算アルゴリズムが直接適用できる．ただし，DE は強力な最適化手法であるが，その探索性能は制御パラメータであるスケール係数と交叉率の設定値に依存する．このため，それらの制御パラメータの値を自動調整するメカニズムを組込んだ適応型 DE が活発に研究されている．

本稿では，DE の個体表現を工夫することで，優れた適応型 DE の 1 つである JADE[8] を，式 (18) や式 (27) の制約条件のある最適化問題に適用する．以下に目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最小化する JADE のアルゴリズムを説明する．

[*1] 銀行融資や投資額に制限がないと，投資比率が無限に増える恐れがある．本稿の銀行融資に対する制限は妥当なものと考える．

4.1 個体の遺伝型と表現型

JADE は世代 t で個体の遺伝子型 $\boldsymbol{v}_k$，$k = 1, \cdots, N_P$ を集団 $\boldsymbol{P}_t$ に保持する．個体の遺伝子型 $\boldsymbol{v}_k \in \Re^n$ は

$$\boldsymbol{v}_k = (v_{1,k}, \cdots, v_{i,k}, \cdots, v_{n,k}) \tag{28}$$

である．また，初期集団の個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_0$ は $0 \le v_{i,k} \le 1$, $i = 1, \cdots, n$ として，$\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_0$ はランダムに生成する．

遺伝子型の個体 $\boldsymbol{v}_k$ は最適化問題の解候補である表現型の個体 $\boldsymbol{x}_k$ に変換する．ここで，個体の表現型を工夫することで，最適化問題の等式制約条件を成立させる．

式 (18) の最適化問題の解候補 $\boldsymbol{x}_k \in \Re^n$ への変換は

$$x_{i,k} = \frac{v_{i,k}}{v_{1,k} + \cdots + v_{n,k}},\ i = 1, \cdots, n \tag{29}$$

として，制約条件 $x_{1,k} + \cdots + x_{n,k} = 1$ を満たす．

式 (27) の最適化問題の解候補 $\boldsymbol{x}_k \in \Re^n$ に遺伝子型の個体 $\boldsymbol{v}_k \in \Re^n$ を変換する際は，銀行の投資比率 $x_{0,k}$ を

$$x_{0,k} = 1 - (v_{1,k} + \cdots + v_{n,k}) \tag{30}$$

とする．ここで，式 (30) による投資比率が $-m \le x_{0,k}$ となれば，資産 i の投資比率を $x_{i,k} = v_{i,k}$，$i = 1, \cdots, n$ とする．一方，式 (30) による投資比率が $x_{0,k} < -m$ ならば，$x_{0,k} = -m$ に修正するとともに，資産 i の投資比率は

$$x_{i,k} = \frac{v_{i,k}\,(m+1)}{v_{1,k} + \cdots + v_{n,k}},\ i = 1, \cdots, n \tag{31}$$

として，$x_{0,k} + x_{1,k} + \cdots + x_{n,k} = 1$ を満たす．

4.2 戦略による子個体の生成

集団内の各個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$ を順番に親個体に指定し，親個体から子個体を生成する．子個体を生成するための手順は戦略と呼ばれ，DE では幾つかの戦略が提案されている [7]. JADE は「DE/current-to-$p$best/1」[8] と命名された独自の戦略を使用する．以下に JADE の戦略を説明する．

はじめに，式 (32) に示すような位置 μ_{SF} と尺度 σ_{SF} のコーシー分布に従う確率変数として，親個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$ に対するスケール係数 $SF_k \in [0, 1]$ を生成する．

$$SF_k \sim \mathrm{Cauchy}(\mu_{SF}, \sigma_{SF}) \tag{32}$$

ただし，$SF_k > 1$ の場合は $SF_k = 1$ とし，$SF_k < 0$ の場合は式 (32) のコーシー分布に従う SF_k を再び生成する．

次に，集団内で上位 $100p$%にある個体 $\boldsymbol{v}_p$ と，別に 2 つの個体 $\boldsymbol{v}_{k1}$ と $\boldsymbol{v}_{k2}$ を集団 $\boldsymbol{P}_t$ からランダムに選ぶ．ここで，以下のように親個体 $\boldsymbol{v}_k$ の変異個体 $\boldsymbol{z}_k$ を生成する．

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{v}_k + SF_k\,(\boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{v}_k) + SF_k\,(\boldsymbol{v}_{k1} - \boldsymbol{v}_{k2}) \tag{33}$$

上記の $\boldsymbol{z}_k$ の要素 $z_{i,k}$ は以下のように修正する．

$$z_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad z_{i,k} < 0 \\ m+1 & \text{if} \quad m+1 < z_{i,k} \end{cases} \tag{34}$$

ただし，式 (18) の銀行を利用しない最適化問題に JADE を適用する場合は，式 (34) において $m = 0$ とする．

式 (35) のような平均 μ_{CR} と分散 σ_{CR}^2 の正規分布に従う確率変数を範囲 [0, 1] に収まるようにトリミングし，親個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$ に対する交叉率 $CR_k \in [0, 1]$ を生成する．

$$CR_k \sim \mathrm{Normal}(\mu_{CR}, \sigma_{CR}^2) \tag{35}$$

以下の親個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$ と変異個体 $\boldsymbol{z}_k \in \Re^n$ の二項交叉により，子個体 $\boldsymbol{u}_k = (u_{1,k}, \cdots, u_{n,k}) \in \Re^n$ を生成する．

$$u_{i,k} = \begin{cases} z_{i,k} & \text{if} \quad \mathrm{rand}_i \le CR_k \ \vee \ i = i_r \\ v_{i,k} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{36}$$

ただし，$\mathrm{rand}_i \in [0, 1]$，$i = 1, \cdots, n$ は一様乱数であり，要素 $z_{i,k}$ の添字 $i_r \in [1, n]$ はランダムに選択する．

上記の子個体 $\boldsymbol{u}_k \in \Re^n$ をその親個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$ と比較し，$f(\boldsymbol{u}_k) \le f(\boldsymbol{v}_k)$ ならば子個体 $\boldsymbol{u}_k$ の勝ちであり，子個体 $\boldsymbol{u}_k$ を次世代の集団 $\boldsymbol{P}_{t+1}$ の個体とする．そうでなければ，親個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$ を次世代の集団 $\boldsymbol{P}_{t+1}$ の個体とする．

4.3 制御パラメータの適応的調整

各世代 t において，次世代の集団 $\boldsymbol{P}_{t+1}$ が決定した時点で，式 (32) の位置 μ_{SF} を以下のように更新する．

$$\mu_{SF} = (1 - c)\,\mu_{SF} + c\,S_{SF^2}/S_{SF} \tag{37}$$

ただし，子個体 $\boldsymbol{u}_k$ が親個体に勝ったときのスケール係数 SF_k の合計を S_{SF}，その自乗の合計を S_{SF^2} とする．係数は $c = 0.1$ とし，式 (32) の尺度は $\sigma_{SF} = 0.1$ とする．

同様に，式 (35) の平均 μ_{CR} も以下のように更新する．

$$\mu_{CR} = (1 - c)\,\mu_{CR} + c\,S_{CR}/S_{NS} \tag{38}$$

ただし，子個体 $\boldsymbol{u}_k$ が親個体に勝ったときの交叉率 CR_k の合計を S_{CR}，子個体の勝った回数を S_{NS} とする．係数は $c = 0.1$ とし，式 (35) の分散は $\sigma_{CR}^2 = 0.1^2$ とする．

4.4 JADE のアルゴリズム

JADE の終了条件は，世代数の最大値 N_T とする．

手順 1 初期集団 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_0 \subseteq [0, 1]^n$，$k = 1, \cdots, N_P$ をランダムに生成する．世代数を $t = 0$ とする．

手順 2 $\mu_{SF} = 0.5$，$\mu_{CR} = 0.5$ と初期化する．

手順 3 世代数が $t = N_T$ ならば，最良の個体 $\boldsymbol{v}_b \in \boldsymbol{P}_{N_T}$ を最適化問題の解 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ として終了する．

手順 4 各親個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$，$k = 1, \cdots, N_P$ から子個体 $\boldsymbol{u}_k \in \Re^n$，$k = 1, \cdots, N_P$ を生成する．

手順 5 親個体 $\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{P}_t$ と子個体 $\boldsymbol{u}_k \in \Re^n$ を比較し，次世代の集団 $\boldsymbol{P}_{t+1}$ を決定する．$t = t + 1$ とする．

手順 6 位置 μ_{SF} と平均 μ_{CR} を更新する．

手順 7 手順 3 に戻る．

表 1　収益率 ξ_i の平均 μ_i と分散 σ_i^2

ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
μ_i	0.05	0.06	0.07	0.08
σ_i^2	0.10^2	0.20^2	0.15^2	0.25^2

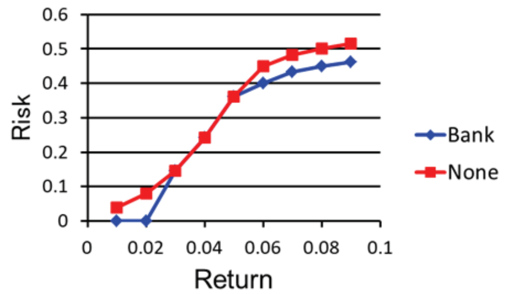

図 1　銀行利用の有無におけるリスクの比較

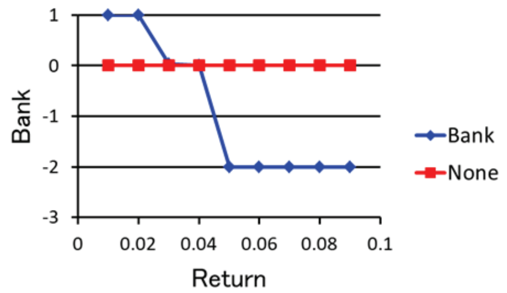

図 2　銀行利用の有無における銀行への投資比率

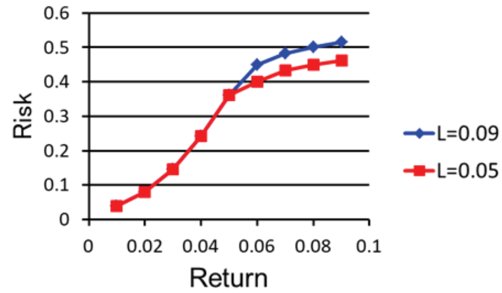

図 3　リターンとリスクの関係（$D = 0.01$）

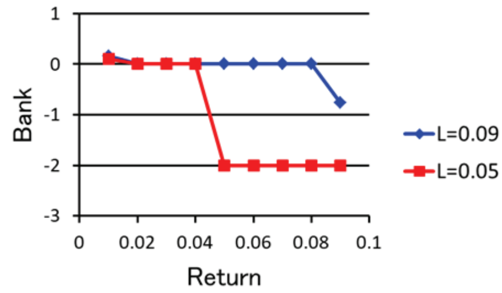

図 4　リターンと銀行の投資比率の関係（$D = 0.01$）

5.　数値実験

5.1　テスト問題と実験方法

4 つの資産を組合せたポートフォリオ最適化 [4] を考える．表 1 に各資産 i の収益率 ξ_i の平均 μ_i と分散 σ_i^2 を示す．また，収益率 ξ_i の相関行列 $\boldsymbol{R}$ を式 (39) に示す．

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.7 & 0.1 & -0.4 \\ -0.7 & 1.0 & -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & -0.5 & 1.0 & -0.3 \\ -0.4 & 0.2 & -0.3 & 1.0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

JADE は Java 言語で実装した．JADE のパラメータは予備実験から $N_P = 50$，$N_T = 100$，$p = 0.1$ とした．

5.2　銀行の預金と融資の効果

銀行の預金と融資の利用がポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ に与える影響を調べた．式 (27) の最適化問題で銀行預金の金利を $D = 0.03$，銀行融資の金利を $L = 0.05$，融資の制限を $m = 2$ とする．式 (18) と式 (27) の最適化問題に対して得られた解 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ について，リターンの下限値 γ に対するリスク α を比較した結果を図 1 に示す．図 1 から，リターン γ が大きくなるとリスク α も高くなり，両者のトレードオフの関係が確認できる．また，式 (27) の最適化問題の解 $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ における銀行への投資比率 x_0 を図 2 に示す．

図 1 と図 2 から，リターン γ が小さい場合は銀行預金を利用し，リターン γ が大きい場合は銀行融資を利用することで，リスク α を抑えられることが確認できる．

5.3　銀行融資の金利の影響

銀行融資の金利がポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ に与える影響を調べた．銀行預金の金利を $D = 0.01$ とし，銀行融資の金利が $L = 0.05$ と $L = 0.09$ の場合について，リターンの下限値 γ に対するリスク α を求めた結果を図 3 に示す．さらに，上記の預金と融資の場合について，リターンの下限値 γ に対する銀行への投資比率 x_0 を図 4 に示す．

図 4 から，リターン γ が 4% 以下の場合，金利の高低に関わらず銀行融資は利用されていない．このため，図 3 では金利の違いによる危険率の差はない．一方，リターン γ が 5% 以上の場合，金利 L が低い方の銀行融資は利用され，金利 L が高い方に比べて危険率が抑えられている．

5.4　銀行預金の金利の影響

銀行預金の金利がポートフォリオ $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ に与える影響を調べた．銀行融資の金利を $L = 0.05$ とし，銀行預金の金利が $D = 0.01$ と $D = 0.03$ の場合について，リターンの下限値 γ に対するリスク α を求めた結果を図 5 に示す．さらに，上記の預金と融資の場合について，リターンの下限値 γ に対する銀行への投資比率 x_0 を図 6 に示す．

図 5 と図 6 から，リターンの下限値 γ が 2% 以下の場合，金利 D が高い方の銀行預金に全資金が投入され，金利 D

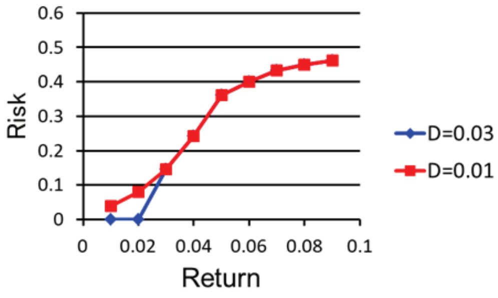

図 5 リターンとリスクの関係（$L = 0.05$）

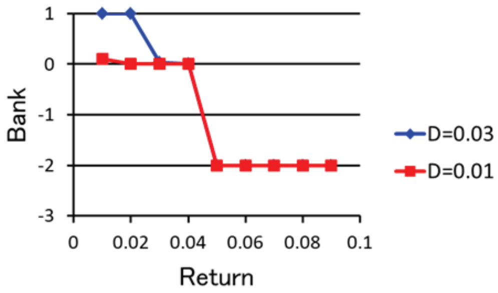

図 6 リターンと銀行の投資比率の関係（$L = 0.05$）

が低い方に比べて危険率が抑えられている．一方，リターン γ が 5% 以上の場合，銀行融資は利用されるが，銀行預金は使われず，金利の違いによる危険率の差はない．

6. おわりに

本稿では，銀行預金と銀行融資を利用したポートフォリオ最適化を考案し，機会制約問題として定式化した．機会制約問題はポートフォリオのリスクを期待するリターンが得られない確率（危険率）で評価するため，従来の分散によるリスクの評価に比べて感覚的にわかりやすい．

次に，ポートフォリオ最適化の機会制約問題を確率が陽に含まれない等価問題に変換し，適応型 DE （JADE）[8] を適用した．本来の JADE は制約条件のない最適化問題を対象とするが，個体の表現方法を工夫することで，制約条件を含む上記の等価問題に対しても適用可能とした．

小規模なポートフォリオ最適化の数値実験から，銀行の預金と融資について，以下のことを明らかにした．

- リターンの下限値が大きい場合，金利の低い銀行融資を利用することで，リスクを下げることができる．
- リターンの下限値が小さい場合，金利の高い銀行預金を利用することで，リスクを下げることができる．

今後の課題は，大規模なポートフォリオ最適化において，銀行預金と銀行融資の効果を検証することである．

謝辞 本研究は，JSPS 科学研究費補助金（科研費）課題番号 17K06508 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] SMBC 日興証券：初めてでもわかりやすい用語集，http://www.smbcnikko.co.jp/ (2017).
[2] H. Markowitz: Portfolio selection, Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 77–91 (1952)
[3] 山下智志：市場リスクの計量化と VaR，朝倉書店 (2000).
[4] 枇々木規雄・田辺隆人：ポートフォリオ最適化と数理計画法，朝倉書店 (2005).
[5] 伊庭斉志：金融工学のための遺伝的アルゴリズム，オーム社 (2011).
[6] 椎名孝之：確率計画法，朝倉書店 (2015).
[7] K. V. Price, R. M. Storn, and J. A. Lampinen：Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization，Springer (2005).
[8] J. Zhang and A. C. Sanderson：JADE: adaptive differential evolution with optional external archive，*IEEE Trans. on Evolutionary Computation*，Vol. 13, No. 5，pp.945–958 (2009).
[9] 前園宜彦：概説 確率統計 第 2 版，サイエンス社 (2009).
[10] 坂和正敏・西崎一郎：数理計画法入門，共立出版 (2014).
[11] 田川聖治・綿谷剛至：差分進化による機会制約ポートフォリオ最適化，平成 29 年度計測自動制御学会四国支部講演会予稿集，pp. 161–164 (2017).
[12] 枇々木規雄：ポートフォリオ最適化入門，オペレーションズ・リサーチ，2016 年 6 月号，pp. 335–340 (2016).