

数学的推論能力育成のための試行錯誤的な 解法マップ作成環境の構築

塩谷 賢司[†] 小尻 智子[†] 徳竹 圭太郎[‡]

関西大学システム理工学部[†] 東京工業大学環境・社会理工学院[‡]

1. はじめに

我々が数学の問題を解く時、その時にわかっている条件を十分に検討し、それらを組み合わせて適用できる公式を類推する。その後、公式を用いて計算を行い、新たな条件を導出する。これを解に到達するまで繰り返す。この過程のうち、使用できる公式を類推することは数学的推論と呼ばれる。数学的推論では、求めたい解を意識し、解へ近づけられるような公式を条件から類推することが必要である。しかし、既知の公式を類推することができず、結果として問題の解き方を暗記してしまう学習者が存在する。

数学の証明問題を対象として類推の練習を行うシステムが存在する[1]。このシステムでは条件に対し、公式の書かれたカードを選択させることで証明問題の解が導出できるようになっている。しかし、解を求めるために必要な条件を学習者自身で生み出すことができないため、解を意識した類推ができない。

本研究では、条件から公式を類推するだけでなく、解に公式を適用して解を満たすために必要な条件を導出できるようにすることで、数学的推論能力を育成するシステムを構築する。対象は図形の分野とする。

2. 数学的推論能力育成支援のアプローチ

数学の問題は、初期条件と解から構成されている。問題を解く際、既知の条件に公式を適用して新たな条件を生成する。生成された条件が

解となるまで公式の適用を繰り返す。この過程は図1のような条件と公式から成るグラフ形式で表現することができる。本研究ではこのグラフを Mathematical Trial and Error マップ (MaTE マップ) と呼ぶ。最上位に存在する条件 1~3 は初期条件である。公式の上位に位置する条件は公式を適用する条件であり、下位に存在する条件は公式を適用した結果導出される条件である。

数学的推論には演繹と帰納がある。帰納は解もしくは解の導出に必要な条件を導き出す公式を類推すること、演繹は条件から公式を用いて新たな条件を導き出すことである。演繹

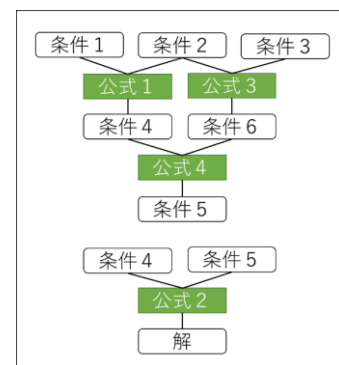


図1 MaTE マップ

ではその時点で導出されている条件をくまなく精査することが望まれる。一方、演繹ばかり行っていると MaTE マップが発散的に広がり解に到達しない可能性がある。したがって、演繹と帰納をバランスよく行いながら、解に到達するような公式を導出していかなければならない。

本研究では、公式を選択することで MaTE マップを容易に作成できるシステムを構築する。MaTE マップの作成過程を観察することで学習者の推論方法を分析し、効率的・効果的な数学的推論が行えるようフィードバックを生成する。

3. 数学的推論能力育成支援システム

演繹と帰納から成る数学的推論能力を育成するためには、公式を適用するだけで MaTE マップ

Support System for Fostering Mathematical Reasoning Skills through Creation of Solution Map

Kenji Shiotani[†], Tomoko Kojiri[†], Keitaro Tokutake[‡]

[†]Kansai University

[‡]Tokyo Institute of Technology

プが構築できることが望ましい。本研究では条件と公式を一階述語論理で表現し、選択された公式に応じて条件を生成できるようにすることで、学習者が公式の類推のみに焦点をあてることができるようにする。

図形の問題を対象とした条件の述語の例を表1に示す。条件はオブジェクトとその属性、オブジェクト間の関係で表現される。また、公式は公式を適用するのに必要な条件と導出される結果で表現できる。数学的推論は必要な条件と導出結果を用いて以下のようなルールとみなすことができる。初期条件と解から選択された公式に基づいてこれらのルールを順次適用していくことで、MaTE マップを生成することができる。

- ・演繹： $IF \langle \text{必要な条件} \rangle THEN \langle \text{導出結果} \rangle$
- ・帰納： $IF \langle \text{導出結果} \rangle THEN \langle \text{必要な条件} \rangle$

システムは、学習者が選択した公式とその順序をもとに、必要に応じてアドバイスを生成する。表2に生成されるアドバイスを示す。アドバイス1は公式適用時に、2~5は学習者がマップ作成に行き詰まり、ヒントボタンが押されたタイミングで表示される。

図2に構築したプロトタイプ・システムのインタフェースを示す。本システムはiPad上で動作するアプリケーションとして実装した。問題を生成すると、初期条件と解を表すノードが表示される。学習者はあらかじめ用意された公式から適切なものを選択することで、MaTE マップを作成していくことができる。

表1 条件の述語表現例

オブジェクト	Point(A), Circle (B) Line(Point(C),Point(D))	点 A, 円 B, 線分 CD
属性	Length (A)	A の長さ
関係	Cross (Line(Point(A), Point(B)), Line(Point(B), Point(C)), Point(B))	線分 AB と線分 BC が点 B で交差

表2 生成されるアドバイス

	アドバイス生成のタイミング	アドバイス内容
1	適用する公式が誤っている	必要な条件が選択されていません
2	公式を適用していない初期条件がある	初期条件を全て使っていますか
3	公式の適用が演繹に偏っている	現在わかっている条件を導出する公式はありませんか
4	公式の適用が帰納に偏っている	現在わかっている条件から適用できる公式はありませんか
5	2~4 は満たしているが、解にたどり着いていない	条件を別の組み合わせで適用できる公式はありませんか

4. おわりに

本研究では数学的推論能力を育成するために、学習者が演繹と帰納の両方から解の導出

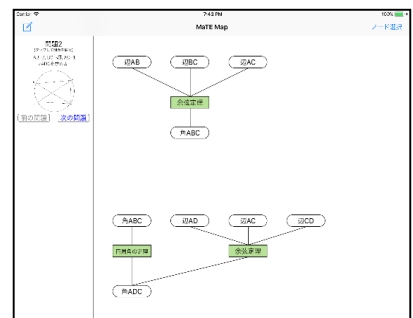


図2 システムインタフェース

過程を作成できるシステムを構築した。今後は評価実験を実施して本システムが一般的な数学的推論能力の育成に効果があるかを検証していく必要がある。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費(16K12563)の助成による。

参考文献

[1] M. Kurayama: "Developing a Geometric Proof Problem-Solving Support System Utilizing Card Selection", Proceedings of the 25th International Conference on Computers in Education, pp.110-112 (2017)