1ZA-02

方向角パラメータ空間曲線の提案

久田　友海[†]　　斎藤　隆文[‡]

東京農工大学　工学部情報工学科[†]

東京農工大学　大学院生物システム応用科学府[‡]

1　はじめに

意匠デザインにおける，美的な空間曲線への需要は大きい．曲線の美しさは曲率の影響を大きく受けることが知られている．よって，美的な曲線の生成には曲率の制御が容易な曲線の生成手法が望ましい．

現在普及しているCADシステムではBézier曲線やB-Splineが多く利用されている．これらの手法では，曲線の位置を制御する制御点の座標を入力として曲線を生成する．このため，曲線の位置制御は容易だが，曲率の制御には向いていない．これらの手法で美的な曲線を生成するためには熟練が必要となる．

位置制御と曲率制御が共に容易な曲線として，方向角パラメータ曲線が挙げられる．この手法では，曲線の曲率半径が直接制御可能であるため，曲率の制御も容易である．ただし，生成可能な曲線は平面曲線のみである．

本稿では，方向角パラメータ曲線を拡張し，空間曲線を生成可能にする手法を提案する．これによって，空間曲線の意匠デザインへの利用が容易になることが期待できる．

2　方向角パラメータ曲線

2.1 方向角パラメータ曲線

方向角パラメータ曲線(以下TAP曲線と呼ぶ)では，曲線の形状を曲率半径から定義する．方向角θをパラメータとして，曲率半径をTAP関数$\rho(\theta)$とするとき，TAP曲線上の点は式(1)で表される．

$$P(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\rho(\phi)e^{i\phi}d\phi+P_0 \tag{1}$$

これは複素平面上での定義である．θ_0とθ_1は始点と終点の方向角，P_0は始点の位置である．

Proposal of Tangent Angle Parameterization Space Curve
†Tomomi KUDA, Department of Computer and Information Science, Tokyo University of Agriculture and Technology.
‡Takafumi SAITO, Graduate School of Bio-Applications and System Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology.

2.2 方向角パラメータ曲線の特徴

方向角パラメータ曲線は次に示す特徴を持っている．

1. 円弧が定数関数で表現可能
2. 曲率プロファイルの制御が容易
3. 重ね合わせの原理が成り立つ

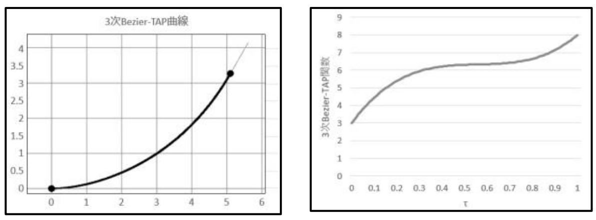
また，TAP関数が多項式で定義されるTAP曲線は多項式TAP曲線と呼ばれ，次の特徴を持っている．

4. 点位置がclosed-formで求まる
5. 曲線の弧長が多項式で表される
6. 特定の対数美的曲線を含む

2.3 Bézier-TAP曲線

多項式TAP曲線の例として，Bézier-TAP曲線が挙げられる．これは，Bézier曲線の基底関数等として利用されるBernstein多項式をTAP関数として利用するものである．

Bézier-TAP曲線では，始点と終点の方向角を定めると，曲線の弦ベクトルをBernstein係数の線形結合として表現できる．よって端点の位置と方向角が与えられるとき，線形方程式を解くことで容易に補間を行うことが出来る．3次のBézier-TAP曲線とそのTAP関数の例を図1に示す．



(a)TAP曲線　　(b)TAP関数

図1　3次Bézier-TAP曲線とTAP関数

3　方向角パラメータ空間曲線

TAP曲線で生成可能な曲線は平面曲線のみであった．これを拡張し，空間曲線を生成可能にした方向角パラメータ空間曲線(TAP空間曲線，Tangent Angle Parameterization Space Curve)について述べる．以下では提案手法との区別のため，先行手法であるTAP曲線はTAP平面曲線と呼ぶ．

3.1 方向角パラメータ空間曲線

方向角パラメータ平面曲線を定義していた複素平面を U 軸と V 軸からなる UV 平面とするとき，これに W 軸を加えた UVW 直交座標空間に TAP 空間曲線を定義する．W 軸の単位ベクトルをwとするとき，TAP 空間曲線上の点は式(2)のように定義する．

$$Q(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\phi)\left(e^{i\phi} + wG_w\right)d\phi + P_0 \qquad (2)$$

ここでG_wは，曲線の W 軸への傾きを表すパラメータである．UV 平面と TAP 空間曲線の接線ベクトルとの間の角度は常に一定であり，その角度の正接がG_wとなる．TAP 空間曲線は 2.2 節で示した有利な特徴を失わずに拡張できている．

3.2 TAP 空間曲線による補間

UVW 空間内での TAP 空間曲線は，端点を入力とする補間に必要な自由度を持っていない．そこで，座標変換を行うことでその自由度を補う．

XYZ 空間で端点の位置や接線方向を与えられたとき，UVW 空間の基底と TAP 空間曲線のパラメータを適切に定めることで補間が可能である．この問題の解法として，UVW 空間の基底を探索する実装を行った．入力の端点を UV 平面に射影し，TAP 平面曲線による補間を行う．このとき得られるパラメータで TAP 空間曲線を生成すると，一般には空間内の終点座標が一致しない．これを一致させるような基底を探索することで解を得る．3 次元の正規直行基底を定める場合の自由度は 2 だが，曲線と UV 平面の間の角度が一定となる制約を利用することで探索は 1 次元となる．この探索ではニュートン法等を利用して解を得られる．

Bézier-TAP 空間曲線による補間の例を図 2 に示す．

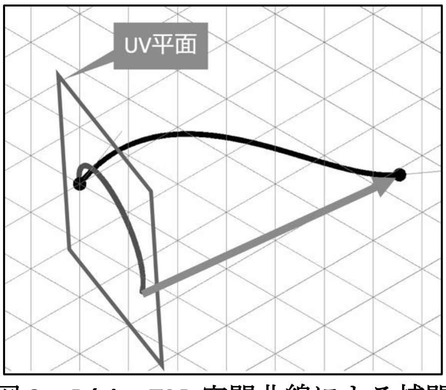


図 2　Bézier-TAP 空間曲線による補間

図のグリッドは XYZ 軸に沿ったものである．UV 平面内の平面曲線を W 軸方向へ拡張することで空間曲線を生成している．

3.3 曲線の存在範囲

TAP 空間曲線では，補間が不可能な入力が存在する．Bézier-TAP 空間曲線では補間が可能な入力の範囲を求めることが出来る．

図 3 のように，2 つの端点からの接線ベクトルの交点を，接線方向を操作する制御点とする場合を考える．端点を$(\pm 0.5, 0,0)$に固定したとき，図 4 の領域内に制御点があれば曲線は正しく生成される．

図 3　接線方向を定める制御点

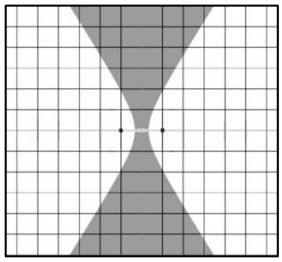
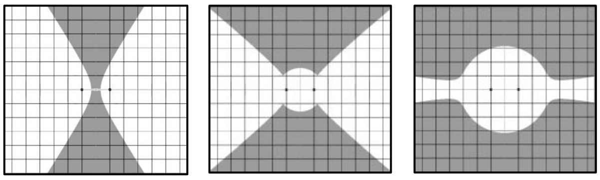


図 4　曲線の生成範囲

図 4 で示したものは Bézier-TAP 平面曲線の生成範囲にあたる．ここで曲線の端点を，接線方向を変えずに移動させた場合を考える．端点の座標を$(-0.5,0,0)$と$(0.5,0,z)$としたときの，zの値に応じた生成範囲を図 5 に示す．



(a)z=0　(b)z=1　(c)z=2

図 5　Bézier-TAP 空間曲線の生成範囲

ここに示したように，Bézier-TAP 空間曲線では，その生成可能な 3 次元領域を明らかにすることが出来た．

4　おわりに

美的な空間曲線の生成のため，TAP 平面曲線を拡張した，TAP 空間曲線を提案する．これによって，意匠デザインへの美的な空間曲線の利用が容易になることが期待できる．

今後は TAP 空間曲線を利用し，自由度が高く曲率等の制御が容易な曲面の生成に取り組む．

参考文献

[1]斎藤隆文，吉田典正，方向角パラメータ曲線の提案，Visual Computing/グラフィクスと CAD.合同シンポジウム，2016