Vol.2017-AL-165 No.15
2017/11/17

希望リストを複数持つ安定マッチング問題

岡本 和也[1,a)]　宮崎 修一[2,b)]

概要：安定マッチング問題とは，男性集合，女性集合，各人の希望リストが与えられ，安定なマッチングを求める問題である．本研究では，同じ男女を対象とした希望リスト集合が k 個与えられ，k 個全ての希望リスト集合で安定なマッチングが存在するか否かを問う判定問題の計算複雑性を考察した．本研究では以下の結果を得た．(1) 任意の $k \geq 2$ に対して，各人の希望リストの長さが 4 以下に制限されていても NP 完全である．(2) 任意の k に対して，男性の希望リストの長さが 2 以下であれば，女性の希望リストの長さに制限がなくても多項式時間で解くことができる．(3) 任意の k に対して，任意の女性の希望リストが k 個の集合全てで同じであれば，多項式時間で解くことができる．

1. はじめに

本稿では，不完全リストを許した安定結婚問題（SMI）を対象とする．SMI の入力は $I = (U, W, L)$ と記述される．ここで U は男性集合，W は女性集合を表し，$|U| = |W|(= n)$ とする．L は各人の希望リストの集合であり，人 p の L における希望リストを $L(p)$ と書く．希望リストは異性を好きな順序で並べた全順序であり，必ずしも異性全員を含む必要はない．p が q のリスト $L(q)$ に含まれている時，q は p を**受け入れ可能**という．p と q がお互いに受け入れ可能であるとき，(p, q) を**受け入れ可能ペア**と呼ぶ．

マッチングとは，互いに受け入れ可能な男女ペアの集合で，各人が高々一度しか現れないものである．マッチング M，男性 m，女性 w に対して，$(m, w) \in M$ であるとき $M(m) = w$ および $M(w) = m$ と書く．$(m, w) \in M$ であるような w が存在するとき，m は M で**マッチしている**といい，そのような w が存在しないとき，m は M で**独身である**という．女性についても独身という用語を同様に定義する．マッチング M に対し，(i) (m, w) は受け入れ可能ペアである，(ii) m は M で独身であるか，$M(m)$ より w が好きである，(iii) w は M で独身であるか，$M(w)$ より m が好きである，の 3 つが成り立つとき，(m, w) は L における M の**ブロッキングペア**である，または (m, w) は L で M を **ブロックする**という．L における M のブロッキングペアが存在しないとき，M は L で**安定である**という．SMI 例題には少なくとも一つの安定マッチングが存在することが知られている [3].

本研究では，同じ男女集合に対して複数の希望リストが与えられるという SMI の拡張を考える．k を正整数とするとき，*SMkI* の入力は $I = (U, W, L_1, L_2, \ldots, L_k)$ である．ここで，U と W は前と同様男女の集合であり，各 L_i は希望リストの集合である．SMkI は，全ての L_i で安定となるマッチング M が存在するか否かを問う判定問題である．そのようなマッチングを**共通安定マッチング**と呼ぶことにする．また，a と b を正整数とするとき，入力の男性の希望リストの長さが高々 a，女性の希望リストの長さが高々 b に制限された SMkI を (a, b)-SMkI と書く．希望リストの長さに制限がない場合は，a や b を ∞ と書くことにする．

SMkI は SMI の自然な拡張であるが，著者の知る限りでは過去に取り扱われていないようである．安定マッチングは入力サイズに対して指数個存在し得るので [5], [7], [13]，各 L_i に対して安定マッチングを列挙し全ての共通部分を求めるというアルゴリズムは，正しい答えを求めるものの多項式時間では動作しない．

1.1 本研究の結果

本研究では，任意の $k \geq 2$ に対して $(4, 4)$-SMkI が NP 完全であることを示した．また，任意の k に対して $(2, \infty)$-SMkI が $O(kn)$ 時間で解けることを示した．この結果，$\ell \geq 3$ に対する $(3, \ell)$-SMkI の複雑性が未解決となる．また，任意の k に対して，以下の制限を加えた SMkI が多項式時間で解けることを示した．任意の女性 w について $L_1(w) = L_2(w) = \cdots = L_k(w)$ が成り立つ．

[1] 京都大学 医学部附属病院
[2] 京都大学 学術情報メディアセンター
[a)] kazuya@kuhp.kyoto-u.ac.jp
[b)] shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

1.2 関連研究

前述したように，複数希望リストに対する安定マッチング問題を取り扱った研究は見受けられない．唯一関連する研究として我々が見つけたものに，Weems [14] により提唱された *bistable* **マッチング問題**がある．安定結婚問題の例題 I に対し，各人の希望リストを逆順にした例題を $\hat{I}$ とする．I と $\hat{I}$ の両方で安定なマッチングを *bistable* マッチングという．Weems は希望リストが完全リスト（すなわちどの男女対も受け入れ可能である）の場合に対し，bistable なマッチングを求めるか，存在しない場合はそのように答える $O(n^2)$ 時間アルゴリズムを発表した．これは SM2I において，希望リストが完全リストであり，任意の p に対して $L_1(p)$ と $L_2(p)$ が逆順となっている特別な場合である．Sethuraman と Teo [11] は，bistable マッチング問題の安定ルームメイト版が多項式時間で解けることを示した．より詳しくは，書籍 [10] の 293–296 ページを参照して頂きたい．

2. NP 完全性

定理 2.1 任意の $k \geq 2$ に対して，$(4,4)$-SMkI は NP 完全である．

証明． $(4,4)$-SMkI が NP に入ることは簡単なので省略する．以下では $(4,4)$-SM2I の NP 困難性を示す．3 以上の k に対する NP 困難性は，以下の証明において $L_2 = L_3 = \cdots = L_k$ とすればよい．

以下では 3CNF SAT からの多項式時間帰着を与える．3CNF SAT の定義は以下の通りである．x を 1(真) または 0(偽) を取る論理変数とする．変数 x またはその否定 $\overline{x}$ を**リテラル**と呼ぶ．リテラルの論理和を**節**といい，節の論理積を**和積形論理式** (*CNF* **論理式**) という．各節が高々 3 つのリテラルしか含まない CNF 論理式を *3CNF* **論理式**という．3CNF SAT とは，入力として 3CNF 論理式 f が与えられたとき，$f = 1$ となるような各変数への割り当てが存在するか否かを問う判定問題である．一般性を失うことなく，各節は丁度 3 個のリテラルを含むと考えてよい（節がリテラルを 2 個以下しか含んでいない場合は，同じリテラルを複製すればよい）．

f を 3CNF SAT の入力とし，f に現れる変数を $x_1, x_2, \ldots, x_n$，節を $C_1, C_2, \ldots, C_m$ とする．f から $(4,4)$-SM2I の入力 I を，以下のようにして作る．各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対し，x_i の出現回数を s_i とする．変数 x_i の j 番目のリテラル $(1 \leq j \leq s_i)$ に対し，2 人の男性 $a_{i,j}$，$b_{i,j}$（**リテラル男性**と呼ぶ）および 2 人の女性 $c_{i,j}$，$d_{i,j}$（**リテラル女性**と呼ぶ）を用意する．また，節 C_ℓ に対し，9 人の男性 u_ℓ^i $(1 \leq i \leq 9)$（**節男性**と呼ぶ）および 9 人の女性 v_ℓ^i $(1 \leq i \leq 9)$（**節女性**と呼ぶ）を用意する．結果，I は男性 $15m$ 人，女性 $15m$ 人から成る．

リテラル男女の希望リストを図 1 に，節男女の希望リストを図 2 に掲載する．図 1 において，L_2 における $a_{i,1}$ の希望リスト内の $c_{i,j-1}$ と $d_{i,1}$ の希望リスト内の $b_{i,j-1}$ は存在しない（すなわち彼らの希望リストの長さは 2 である）．同様に，L_2 における b_{i,s_i} の希望リスト内の $d_{i,j+1}$ と c_{i,s_i} の希望リスト内の $a_{i,j+1}$ は存在しない．次に図 1 における $U_{i,j}$ と $V_{i,j}$ について説明する．変数 x_i の j 番目の出現が，節 C_ℓ の t 番目のリテラルだとする．このリテラルが肯定リテラルであれば，$U_{i,j}$ は存在せず，$V_{i,j}$ は以下の様に決める．$t=1$ ならば $V_{i,j} = v_\ell^4$，$t=2$ ならば $V_{i,j} = v_\ell^7$，$t=3$ ならば $V_{i,j} = v_\ell^1$．このリテラルが否定リテラルであれば，$V_{i,j}$ は存在せず，$U_{i,j}$ は以下の様に決める．$t=1$ ならば $U_{i,j} = u_\ell^1$，$t=2$ ならば $U_{i,j} = u_\ell^4$，$t=3$ ならば $U_{i,j} = u_\ell^7$．最後に，図 2 における $B_{\ell,1}, B_{\ell,2}, B_{\ell,3}, D_{\ell,1}, D_{\ell,2}, D_{\ell,3}$ を説明する．$t = 1,2,3$ に対して，節 C_ℓ の t 番目のリテラルが変数 x_i の j 番目の出現であるとする．これが肯定リテラルであれば，$D_{\ell,t}$ は存在せず $B_{\ell,t} = b_{i,j}$ とする．否定リテラルであれば，$B_{\ell,t}$ は存在せず $D_{\ell,t} = d_{i,j}$ とする．以上で帰着は完了である．帰着が多項式時間で実行可能であること，および各人の希望リストの長さが高々 4 であることは明らかである．

L_1	$a_{i,j}$:	$c_{i,j}$		$d_{i,j}$	$c_{i,j}$:	$b_{i,j}$		$a_{i,j}$
	$b_{i,j}$:	$d_{i,j}$	$V_{i,j}$	$c_{i,j}$	$d_{i,j}$:	$a_{i,j}$	$U_{i,j}$	$b_{i,j}$
L_2	$a_{i,j}$:	$c_{i,j}$	$c_{i,j-1}$	$d_{i,j}$	$c_{i,j}$:	$b_{i,j}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i,j}$
	$b_{i,j}$:	$d_{i,j}$	$d_{i,j+1}$	$c_{i,j}$	$d_{i,j}$:	$a_{i,j}$	$b_{i,j-1}$	$b_{i,j}$

図 1 変数 x_i の j 番目のリテラルに対応したリテラル男女の希望リスト

次に帰着の正当性の証明を行なうが，それに先立って部分マッチングを定義する．各 i, j に対して，$M_{i,j}^1 = \{(a_{i,j}, c_{i,j}), (b_{i,j}, d_{i,j})\}$，$M_{i,j}^0 = \{(a_{i,j}, d_{i,j}), (b_{i,j}, c_{i,j})\}$ と定義する．次に各 ℓ に対して，

$$
\begin{aligned}
M_\ell^1 = \{&(u_\ell^1, v_\ell^3), (u_\ell^2, v_\ell^1), (u_\ell^3, v_\ell^2), (u_\ell^4, v_\ell^4), (u_\ell^5, v_\ell^5), \\
&(u_\ell^6, v_\ell^6), (u_\ell^7, v_\ell^8), (u_\ell^8, v_\ell^9), (u_\ell^9, v_\ell^7)\}, \\
M_\ell^2 = \{&(u_\ell^1, v_\ell^2), (u_\ell^2, v_\ell^3), (u_\ell^3, v_\ell^1), (u_\ell^4, v_\ell^6), (u_\ell^5, v_\ell^4), \\
&(u_\ell^6, v_\ell^5), (u_\ell^7, v_\ell^7), (u_\ell^8, v_\ell^8), (u_\ell^9, v_\ell^9)\}, \\
M_\ell^3 = \{&(u_\ell^1, v_\ell^1), (u_\ell^2, v_\ell^2), (u_\ell^3, v_\ell^3), (u_\ell^4, v_\ell^5), (u_\ell^5, v_\ell^6), \\
&(u_\ell^6, v_\ell^4), (u_\ell^7, v_\ell^9), (u_\ell^8, v_\ell^7), (u_\ell^9, v_\ell^8)\}
\end{aligned}
$$

と定義する．

まず，f が充足可能であると仮定し，I に対する共通安定マッチング M の存在を示す．T を f の充足割り当てとし，T から M を構築する．各 i に対して，$T(x_i) = 1$ であれば全ての j に対して $M_{i,j}^1 \subseteq M$，$T(x_i) = 0$ であれば全ての j に対して $M_{i,j}^0 \subseteq M$ とする．次に，各 ℓ に対し節 C_ℓ は t 番目のリテラルで充足されているものとする（ただし，

L_1

u_ℓ^1:	v_ℓ^1	v_ℓ^2	$D_{\ell,1}$	v_ℓ^3		v_ℓ^1:	u_ℓ^2	u_ℓ^3	$B_{\ell,3}$	u_ℓ^1
u_ℓ^2:	v_ℓ^2	v_ℓ^3		v_ℓ^1		v_ℓ^2:	u_ℓ^3	u_ℓ^1		u_ℓ^2
u_ℓ^3:	v_ℓ^3	v_ℓ^1		v_ℓ^2		v_ℓ^3:	u_ℓ^1	u_ℓ^2		u_ℓ^3
u_ℓ^4:	v_ℓ^4	v_ℓ^5	$D_{\ell,2}$	v_ℓ^6		v_ℓ^4:	u_ℓ^5	u_ℓ^6	$B_{\ell,1}$	u_ℓ^4
u_ℓ^5:	v_ℓ^5	v_ℓ^6		v_ℓ^4		v_ℓ^5:	u_ℓ^6	u_ℓ^4		u_ℓ^5
u_ℓ^6:	v_ℓ^6	v_ℓ^4		v_ℓ^5		v_ℓ^6:	u_ℓ^4	u_ℓ^5		u_ℓ^6
u_ℓ^7:	v_ℓ^7	v_ℓ^8	$D_{\ell,3}$	v_ℓ^9		v_ℓ^7:	u_ℓ^8	u_ℓ^9	$B_{\ell,2}$	u_ℓ^7
u_ℓ^8:	v_ℓ^8	v_ℓ^9		v_ℓ^7		v_ℓ^8:	u_ℓ^9	u_ℓ^7		u_ℓ^8
u_ℓ^9:	v_ℓ^9	v_ℓ^7		v_ℓ^8		v_ℓ^9:	u_ℓ^7	u_ℓ^8		u_ℓ^9

L_2

u_ℓ^1:	v_ℓ^1	v_ℓ^4	v_ℓ^2		v_ℓ^3		v_ℓ^1:	u_ℓ^2		u_ℓ^3	u_ℓ^7	u_ℓ^1
u_ℓ^2:	v_ℓ^2		v_ℓ^3	v_ℓ^5	v_ℓ^1		v_ℓ^2:	u_ℓ^3	u_ℓ^8	u_ℓ^1		u_ℓ^2
u_ℓ^3:	v_ℓ^3		v_ℓ^1		v_ℓ^2		v_ℓ^3:	u_ℓ^1		u_ℓ^2		u_ℓ^3
u_ℓ^4:	v_ℓ^5	v_ℓ^7	v_ℓ^6		v_ℓ^4		v_ℓ^4:	u_ℓ^4		u_ℓ^5	u_ℓ^1	u_ℓ^6
u_ℓ^5:	v_ℓ^6		v_ℓ^4	v_ℓ^8	v_ℓ^5		v_ℓ^5:	u_ℓ^5	u_ℓ^2	u_ℓ^6		u_ℓ^4
u_ℓ^6:	v_ℓ^4		v_ℓ^5		v_ℓ^6		v_ℓ^6:	u_ℓ^6		u_ℓ^4		u_ℓ^5
u_ℓ^7:	v_ℓ^9	v_ℓ^1	v_ℓ^7		v_ℓ^8		v_ℓ^7:	u_ℓ^9		u_ℓ^7	u_ℓ^4	u_ℓ^8
u_ℓ^8:	v_ℓ^7		v_ℓ^8	v_ℓ^2	v_ℓ^9		v_ℓ^8:	u_ℓ^7	u_ℓ^5	u_ℓ^8		u_ℓ^9
u_ℓ^9:	v_ℓ^8		v_ℓ^9		v_ℓ^7		v_ℓ^9:	u_ℓ^8		u_ℓ^9		u_ℓ^7

図 2　ℓ 番目の節に対応した節男女の希望リスト

真になるリテラルが 2 つ以上存在する場合には，どれか 1 つを任意に選ぶものとする）．このとき $M_\ell^t \subseteq M$ とする．

補題 2.2　上述のように作られた M は，I の共通安定マッチングである．

証明． x_i に対するリテラル男女 $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$, $d_{i,j}$ $(1 \leq j \leq s_i)$ を考える．$T(x_i) = 1$ であれば，男性は皆 L_1 と L_2 ともに第 1 希望の女性とマッチしている．同様に，もし $T(x_i) = 0$ であれば，女性は皆 L_1 と L_2 ともに第 1 希望の男性とマッチしている．従って，同じ変数に関係するリテラル男女の間でブロッキングペアは生じない．また，異なる変数間でのリテラル男女は受け入れ不能なので，そのような男女間にもブロッキングペアは生じない．

節 C_ℓ に対応する 18 人の節男女について，M_ℓ^1, M_ℓ^2, M_ℓ^3 のいずれが選ばれたとしても，節男女の中でのブロッキングペアが生じないことは容易に検証できる．また，異なる節に対応する節男女は受け入れ不能なので，そのような男女間にもブロッキングペアは生じない．

最後に，リテラル男女と節男女の間でのブロッキングペアの可能性について考察する．節 C_ℓ を考える．M の部分マッチングとして M_ℓ^1 が選ばれていたと仮定する．ということは，C_ℓ は第 1 リテラルによって充足されていることになる．このリテラルが変数 x_i の j 番目の出現であるとする．これが肯定リテラルの場合，希望リスト作成のルールより，$D_{\ell,1}$ は存在せず $B_{\ell,1} = b_{i,j}$ である．従って，可能なブロッキングペアは L_1 における $(b_{i,j}, v_{\ell,4})$ のみである．しかし，C_ℓ は第 1 リテラルによって充足されているので，$T(x_i) = 1$ となっているはずである．よって，M の作り方のルールより $M_{i,j}^1 \subseteq M$ となっており，$b_{i,j}$ は L_1 において第 1 希望の女性とペアになっているはずである．従って $b_{i,j}$ がブロッキングペアを形成することはあり得ない．次に C_ℓ の第 1 リテラルが否定リテラルであったとすると，$B_{\ell,1}$ は存在せず $D_{\ell,1} = d_{i,j}$ である．従って, 起こり得るブロッキングペアは L_1 における $(u_{\ell,1}, d_{i,j})$ のみである．しかし C_ℓ は第 1 リテラルで充足されているので，$T(x_i) = 0$ であり，$d_{i,j}$ は L_1 において M で第 1 希望の男性とペアになっているはずである．よって $d_{i,j}$ はブロッキングペアを形成しない．残り 2 つの場合，すなわち M_ℓ^2 が選ばれた場合と M_ℓ^3 が選ばれた場合のどちらにおいても，同様の議論によりブロッキングペアの存在を否定することができる．□

逆に，I が共通安定マッチング M を持つと仮定し，f に対する充足割り当て T が存在することを示す．まず，共通安定マッチング M の満たすべき性質について考察する．

補題 2.3　各 i に対して，全ての j について $M_{i,j}^1 \subseteq M$ であるか，全ての j について $M_{i,j}^0 \subseteq M$ であるかのどちら

マッチング	ブロッキングペア		マッチング	ブロッキングペア		マッチング	ブロッキングペア
$X^1_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^7_ℓ, v^1_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^5_ℓ, v^8_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^5_ℓ, v^8_ℓ)
$X^1_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^7_ℓ, v^1_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^8_ℓ, v^2_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^2_\ell$	–
$X^1_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^4_ℓ, v^7_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^5_ℓ, v^8_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^5_ℓ, v^8_ℓ)
$X^1_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^7_ℓ, v^1_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^1_ℓ, v^4_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^1_ℓ, v^4_ℓ)
$X^1_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^7_ℓ, v^1_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^1_ℓ, v^4_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^1_ℓ, v^4_ℓ)
$X^1_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^3_\ell$	–		$X^2_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^1_ℓ, v^4_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^1_ℓ, v^4_ℓ)
$X^1_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^7_ℓ, v^1_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^1_\ell$	–		$X^3_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^1_\ell$	(u^2_ℓ, v^5_ℓ)
$X^1_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^7_ℓ, v^1_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^8_ℓ, v^2_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^2_\ell$	(u^2_ℓ, v^5_ℓ)
$X^1_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^4_ℓ, v^7_ℓ)		$X^2_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^4_ℓ, v^7_ℓ)		$X^3_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^3_\ell$	(u^2_ℓ, v^5_ℓ)

表 1　27 個のマッチングと，L_2 におけるブロッキングペア

かが成り立つ．

証明． まず，各 i と j について $M^1_{i,j} \subseteq M$ または $M^0_{i,j} \subseteq M$ のいずれかであることを示す．これが正しくないとする．$a_{i,j}$ と $b_{i,j}$ にとって L_1 と L_2 の両方で受け入れ可能な女性は $c_{i,j}$ と $d_{i,j}$ のみなので，$a_{i,j}$ または $b_{i,j}$ のうち少なくともどちらか（$m_{i,j}$ とする）は M で独身である．同じ理由により，$c_{i,j}$ または $d_{i,j}$ のいずれか（$w_{i,j}$ とする）は M で独身である．よって $(m_{i,j}, w_{i,j})$ は L_1 と L_2 の両方で M に対するブロッキングペアとなり，M の安定性に矛盾する．

ここで，補題が誤りであると仮定すると，(i) $M^1_{i,j} \subseteq M$ かつ $M^0_{i,j+1} \subseteq M$ である i と j，または (ii) $M^0_{i,j} \subseteq M$ かつ $M^1_{i,j+1} \subseteq M$ である i と j $(1 \leq j \leq s_i - 1)$ が存在する．(i) の場合には $(a_{i,j+1}, c_{i,j})$ が L_2 における M のブロッキングペアであり，(ii) の場合には $(b_{i,j}, d_{i,j+1})$ が L_2 における M のブロッキングペアである．いずれの場合も M の安定性に矛盾する．□

補題 2.4　各 ℓ に対し，$M^1_\ell \subseteq M$，$M^2_\ell \subseteq M$，$M^3_\ell \subseteq M$ のいずれかが成り立つ．

証明． 男性 $u^1_\ell, u^2_\ell, u^3_\ell$ の中に，M で女性 $v^1_\ell, v^2_\ell, v^3_\ell$ のいずれともペアになっていない男性がいたとして，それを m_ℓ とする．$D_{\ell,1}$ はリテラル女性であり，L_2 においては u^1_ℓ にとって受け入れ不能であるため，m_ℓ は M で独身である．同様の議論により，M で独身の女性 $w_\ell \in \{v^1_\ell, v^2_\ell, v^3_\ell\}$ が存在する．結果 (m_ℓ, w_ℓ) は L_1 および L_2 における M のブロッキングペアとなり，M の安定性に矛盾する．従って，M において $u^1_\ell, u^2_\ell, u^3_\ell$ は，$v^1_\ell, v^2_\ell, v^3_\ell$ とペアになっているはずである．この 3 人同士をペアにする組み合わせは，以下のように 6 通りある．

$$X^1_\ell = \{(u^1_\ell, v^1_\ell), (u^2_\ell, v^2_\ell), (u^3_\ell, v^3_\ell)\}$$
$$X^2_\ell = \{(u^1_\ell, v^2_\ell), (u^2_\ell, v^3_\ell), (u^3_\ell, v^1_\ell)\}$$
$$X^3_\ell = \{(u^1_\ell, v^3_\ell), (u^2_\ell, v^1_\ell), (u^3_\ell, v^2_\ell)\}$$
$$X^4_\ell = \{(u^1_\ell, v^1_\ell), (u^2_\ell, v^3_\ell), (u^3_\ell, v^2_\ell)\}$$
$$X^5_\ell = \{(u^1_\ell, v^2_\ell), (u^2_\ell, v^1_\ell), (u^3_\ell, v^3_\ell)\}$$
$$X^6_\ell = \{(u^1_\ell, v^3_\ell), (u^2_\ell, v^2_\ell), (u^3_\ell, v^1_\ell)\}$$

この中で，X^4_ℓ は (u^3_ℓ, v^1_ℓ) に，X^5_ℓ は (u^2_ℓ, v^3_ℓ) に，X^6_ℓ は (u^1_ℓ, v^2_ℓ) に，それぞれ L_1 でブロックされる．よって $X^1_\ell, X^2_\ell, X^3_\ell$ のみが M の部分マッチングとなり得る．$u^4_\ell, u^5_\ell, u^6_\ell, v^4_\ell, v^5_\ell, v^6_\ell$ の 6 人および $u^7_\ell, u^8_\ell, u^9_\ell, v^7_\ell, v^8_\ell, v^9_\ell$ の 6 人にも同じ議論が適用でき，

$$Y^1_\ell = \{(u^4_\ell, v^4_\ell), (u^5_\ell, v^5_\ell), (u^6_\ell, v^6_\ell)\}$$
$$Y^2_\ell = \{(u^4_\ell, v^5_\ell), (u^5_\ell, v^6_\ell), (u^6_\ell, v^4_\ell)\}$$
$$Y^3_\ell = \{(u^4_\ell, v^6_\ell), (u^5_\ell, v^4_\ell), (u^6_\ell, v^5_\ell)\}$$

$$Z^1_\ell = \{(u^7_\ell, v^7_\ell), (u^8_\ell, v^8_\ell), (u^9_\ell, v^9_\ell)\}$$
$$Z^2_\ell = \{(u^7_\ell, v^8_\ell), (u^8_\ell, v^9_\ell), (u^9_\ell, v^7_\ell)\}$$
$$Z^3_\ell = \{(u^7_\ell, v^9_\ell), (u^8_\ell, v^7_\ell), (u^9_\ell, v^8_\ell)\}$$

のみが M の部分マッチングとなり得る．

よって 27 通りの組み合わせが存在し，$M^1_\ell = X^3_\ell \cup Y^1_\ell \cup Z^2_\ell$，$M^2_\ell = X^2_\ell \cup Y^3_\ell \cup Z^1_\ell$，$M^3_\ell = X^1_\ell \cup Y^2_\ell \cup Z^3_\ell$ となっている．表 1 が示すように，残りの 24 個のマッチングは全て，L_2 におけるブロッキングペアを持つ．表 1 では，「マッチング」という列に 27 個のマッチングが示されており，その隣の「ブロッキングペア」という列に，L_2 における対応するブロッキングペアが示されている．これで補題が証明できた．□

補題 2.3 により，全ての j について $M^1_{i,j} \subseteq M$ であるか，全ての j について $M^0_{i,j} \subseteq M$ であるかのいずれかである．前者の場合は $T(x_i) = 1$，後者の場合は $T(x_i) = 0$ と定める．以下では，この割り当て T が f を充足することを示す．仮に T が f を充足しないとし，C_ℓ を非充足節とする．$t = 1, 2, 3$ について，C_ℓ の第 t リテラルは変数 x_{i_t} の j_t 番目の出現であるとする．

主張 1　$\boldsymbol{M^1_\ell \not\subseteq M}$.

証明． C_ℓ の第 1 リテラルが肯定リテラルであるとする．すると，帰着のルールにより，L_1 における b_{i_1,j_1} と v^4_ℓ の希望リストは以下のようになっている．

b_{i_1,j_1} :　d_{i_1,j_1}　v^4_ℓ　c_{i_1,j_1}　　　　v^4_ℓ :　u^5_ℓ　u^6_ℓ　b_{i_1,j_1}　u^4_ℓ

C_ℓ は T で非充足なので，$T(x_{i_1})=0$ である．よって T の作成ルールから，$M^0_{i_1,j_1}\subseteq M$ となっているはずである．これはすなわち，$M(b_{i_1,j_1})=c_{i_1,j_1}$ であることを意味する．もし $M^1_\ell\subseteq M$ であれば，$M(v^4_\ell)=u^4_\ell$ となっており，上記の希望リストから分かるように (b_{i_1,j_1},v^4_ℓ) が L_1 で M をブロックするため，M の安定性に矛盾する．

次に，C_ℓ の第 1 リテラルが否定リテラルであるとする．つまり，$\overline{x_{i_1}}$ の形で出現している．帰着のルールにより，L_1 における d_{i_1,j_1} と u^1_ℓ の希望リストは以下のようになっている．

$$u^1_\ell:\ v^1_\ell\ \ v^2_\ell\ \ d_{i_1,j_1}\ \ v^3_\ell \qquad\qquad d_{i_1,j_1}:\ a_{i_1,j_1}\ \ u^1_\ell\ \ b_{i_1,j_1}$$

C_ℓ は非充足なので $T(x_{i_1})=1$ であり，T の作成ルールより $M^1_{i_1,j_1}\subseteq M$ となっているはずである．これは，$M(d_{i_1,j_1})=b_{i_1,j_1}$ を意味する．もし $M^1_\ell\subseteq M$ であれば，$M(u^1_\ell)=v^3_\ell$ となっており，上記の希望リストから分かる通り，(u^1_ℓ,d_{i_1,j_1}) が L_1 において M をブロックするため，M の安定性に矛盾する．以上により，$M^1_\ell\not\subseteq M$ が結論付けられた． □

以下の 2 つの主張の証明は，主張 1 の証明と同様に行なうことができるため省略する．

主張 2 $M^2_\ell\not\subseteq M$.
主張 3 $M^3_\ell\not\subseteq M$.

主張 1，2，3 より，$M^1_\ell,M^2_\ell,M^3_\ell$ のいずれも M の部分マッチングとなり得ないことが分かった．しかしこれは補題 2.4 に矛盾する．よって，T は f の充足割り当てであるという結論を得る．以上で 2.1 の証明が完結した． □

上記の帰着では，L_1 においては受け入れ可能だが L_2 においては受け入れ可能でないペアを利用している．従って，受け入れ可能ペアが全ての L_i で同じであれば SMkI は多項式時間可解かといった，自然な疑問が生じる．しかし，次の系が示すように，そのような制限を設けても問題は NP 完全となる．SMkI において，全ての希望リストが完全リストである（すなわち全員が全てのリストにおいて異性全員を書いている）ような特別な制限を加えた問題をを SMk と書くことにする．明らかに全てのペアが全ての L_i において受け入れ可能ペアであるので，SMk は上記の性質を満たす．

系 2.5 任意の $k\geq 2$ に対して SMk は NP 完全である．
証明． 明らかに SMk は NP に属する．NP 困難性の証明は，定理 2.1 で得られる不完全リストの後尾に，リストに現れない人を任意の順序で追加すればよい．帰着の正しさの証明は，定理 2.1 の証明を若干修正するだけでよい． □

3. 多項式時間可解な場合

本節では，一般性を失うことなく，L_i において m が w を受け入れ可能であるとき，およびそのときにのみ，L_i において w が m を受け入れ可能であると仮定する．もしこの条件が成り立っておらず，例えば m は w を受け入れ可能だが w は m を受け入れ不能な場合は，(m,w) はマッチングのペアにもブロッキングペアにもなり得ないので，w を m のリストから削除しても安定マッチングの集合は不変であり，問題の解に影響を与えない．このような前処理は，希望リストの全長に対する線形時間で行うことができる．

ただし，(m,w) が L_i で受け入れ可能ペアであるが L_j では受け入れ可能ペアでない場合，L_i において m と w を相互のリストから削除してはいけないことに注意する．これは，(m,w) は共通安定マッチングのペアにはなり得ないが，L_i において，あるマッチングのブロッキングペアとなる可能性があり，上記の削除を施すことで不安定なマッチングが安定になり，共通安定マッチングの有無を変えてしまう可能性があるからである．

3.1 片側の希望リストの長さが 2 以下の場合

本節では，片側の希望リストの長さが 2 以下の場合に SMkI が多項式時間で解けることを示す．以下では，男性の希望リストの長さが制限されているものとする．この証明には，安定結婚問題の基本的性質である，ローテーションの半順序集合と安定マッチング全体からなる分配束構造との関係を利用する．これらについての解説は，書籍 [5] を参照して頂きたい．書籍 [5] では完全リストに対する説明がなされているが，不完全リストに対しても同様の性質が成り立つ．

定理 3.1 $(2,\infty)$-SMkI を解く $O(kn)$ 時間アルゴリズムが存在する．
証明． まず男性プロポーズの Gale-Shapley アルゴリズムを使い，各 L_i $(i=1,2,\ldots,k)$ に対する男性最適安定マッチング M_i を得る．各 L_i について，どの安定マッチングでもマッチしている男女の集合は不変である [4]．従って，M_i と M_j でマッチしている人の集合が違うような i と j が存在すれば，即座に No と答えればよい．以後は，全ての M_i でマッチしている人の集合が同じであると仮定する．

次に各 i に対して，L_i における全てのローテーション $\rho^i_1,\rho^i_2,\ldots,\rho^i_{n_i}$ を求める．男性の希望リストの長さは高々 2 なので，各男性は高々 1 つのローテーションにしか含まれていない．よってローテーション半順序集合において，どの 2 つのローテーションも比較不能である．従って，L_i の安定マッチング全体と，$\{\rho^i_1,\rho^i_2,\ldots,\rho^i_{n_i}\}$ の部分集合全体には 1 対 1 対応が存在する．すなわち，部分集合 $S\subseteq\{\rho^i_1,\rho^i_2,\ldots,\rho^i_{n_i}\}$ は，男性最適安定マッチング M_i から S に含まれる全てのローテーションを任意の順序で削除した結果となる安定マッチング $M_{i,S}$ に対応している．M_i でマッチしている男性 m について考える．もし m がローテーションに含まれなければ，m のパートナーは L_i の全ての安定マッチングで同じ女性である．もし m がローテー

ション ρ_j^i に含まれるならば，m の $M_{i,S}$ におけるパートナーは，$\rho_j^i \notin S$ であれば第 1 希望の女性であり，$\rho_j^i \in S$ であれば第 2 希望の女性である．

あとは，$M_{1,S_1} = M_{2,S_2} = \cdots = M_{k,S_k}$ となるような k 個の部分集合 $S_i \subseteq \{\rho_1^i, \rho_2^i, \ldots, \rho_{n_i}^i\}$ $(1 \le i \le k)$ が存在するか否かを調べればよい．このために，各ローテーション ρ_j^i $(1 \le i \le k, 1 \le j \le n_i)$ に対して論理変数 x_j^i を用意する．ここで，$x_j^i = 1$ は ρ_j^i を S_i に入れることを意味する．次に，これらの変数を使って 2CNF SAT の入力を以下のように作る．

M_1 でマッチしている各男性 m に対して，m の $M_{1,S_1}, M_{2,S_2}, \ldots, M_{k,S_k}$ でのパートナーが全て一致するように，変数値を 0 または 1 に決定するか，2CNF 節を作るかのいずれかを行う．(m, w) が L の少なくとも 1 つの安定マッチングに含まれるとき，w を m の L での**安定パートナー**と呼ぶ．また，w が全ての L_i で m の安定パートナーであるとき，w を m の**共通安定パートナー**と呼ぶ．m が共通安定パートナーを持たない場合は，即座に No と答えればよい．m が共通安定パートナーを 1 人（w とする）持つ場合は，各 i に対して，M_{i,S_i} での m のパートナーが w になるよう変数値を決定する．すなわち，もし m がローテーションに含まれない場合は，変数は存在せず何もしない．m がローテーション ρ_j^i に含まれる場合，w が $L_i(m)$ の第 1 希望である場合は $x_j^i = 0$，第 2 希望である場合は $x_j^i = 1$ とする．この過程で，これまでに決めた変数値と矛盾すれば即座に No と答える．最後に，m が共通安定パートナーを 2 人（w' と w'' とする）持つ場合を考える．この場合，全ての i に対して，$L_i(m)$ は w' と w'' の両方を含み，m は L_i でのローテーションに含まれている．そのローテーションを $\rho_{j_i}^i$ とする．各 $i = 2, \ldots, k$ に対して，以下のように 2 個の CNF 節を作る．$L_1(m)$ と $L_i(m)$ 内での w' と w'' の順序が同じ場合，$(x_{j_1}^1 \vee \overline{x_{j_i}^i})$ と $(\overline{x_{j_1}^1} \vee x_{j_i}^i)$ を作る．順序が逆の場合，$(x_{j_1}^1 \vee x_{j_i}^i)$ と $(\overline{x_{j_1}^1} \vee \overline{x_{j_i}^i})$ を作る．上記のような作業を，M_1 でマッチしている全ての男性 m について行って得られた節を全て集めたものを，目的の 2CNF 論理式とする．この式の充足解が $M_{1,S_1} = M_{2,S_2} = \cdots = M_{k,S_k}$ となるような k 個の部分集合 S_i に対応することは，これまでの議論から容易に分かる．

男性の希望リストの長さは高々 2 であり，受け入れ可能性が男女相互で対称となるように前処理をしているため，L_i の全長は $O(n)$ である．従って，各 i に対して M_i の計算と L_i のローテーションの列挙は $O(n)$ 時間で実行できるので，入力全体でこれらに掛かる時間は $O(kn)$ である．各男性について 2CNF 節の構築は $O(k)$ 時間ででき，男性数は n 以下なので $O(kn)$ 時間で 2CNF 論理式を構築することができる．その式のサイズは $O(kn)$ である．最後に得られた式に対して 2CNF SAT を解くが，2CNF SAT は線形時間で解ける [1], [2] ので，計算時間は $O(kn)$ である．以上より，アルゴリズム全体の計算時間は $O(kn)$ である．□

3.2 各女性の k 個のリストが全て同じ場合

本節では，各女性の希望リストが全ての L_i で同じである場合に，SMkI が多項式時間で解けることを示す．

定理 3.2 各女性の希望リストが全ての L_i $(1 \le i \le k)$ で同じであれば，SMkI を $O(N)$ 時間で解くアルゴリズムが存在する．ここで，N は入力中の希望リストの長さの総和である．

証明． 入力を $I = (U, W, L_1, L_2, \ldots, L_k)$ とする．ここでは各女性 w に対して $L_1(w) = L_2(w) = \cdots = L_k(w)$ が成り立つので，前述した前処理により，各男性 m に対して $L_i(m)$ に含まれる女性の集合は全ての i で同じである．次に，k 個の希望リスト集合 $L_1, L_2, \ldots, L_k$ から，1 つの希望リスト集合 L を以下のようにして作る．各女性 w については，k 個の希望リストが全て同じであるので，$L(w) := L_1(w)$ とする．各男性 m については，$L(m)$ に含まれる女性の集合は $L_i(m)$ に含まれる女性の集合（上述したように全ての i で一致する）と同じである．$L(m)$ における女性の順序は，以下のようにして決める．$L(m)$ に含まれる 2 人の女性 w' と w'' に対して，全ての $L_i(m)$ でその順序が一致すれば $L(m)$ でもそれらと同じ順序にする．もし w' と w'' の順序が異なる $L_i(m)$ と $L_j(m)$ があれば，$L(m)$ では w' と w'' の間には順序がないもの（比較不能）とする．このようにして作られた $L(m)$ は半順序リストであり，$I' = (U, W, L)$ は希望リストに半順序を許した SMI (*SMPI* と呼ぶ) の例題と見ることができる．

ここで，希望リストが必ずしも全順序でない安定結婚問題に対する**超安定性** [5], [6] について説明する．マッチング M に対して，(1) $(m, w) \notin M$ であるが m と w は互いに受け入れ可能，(2) m は M で独身であるか，$M(m)$ より w を好むか，w と $M(m)$ が比較不能である，(3) w は M で独身であるか，$M(w)$ より m を好むか，m と $M(w)$ が比較不能である，の 3 条件を全て満たすとき，(m, w) は M に対する**超安定性でのブロッキングペア**であるという．超安定性でのブロッキングペアを持たないマッチングを**超安定マッチング**という．Irving [6] は，入力の希望リストが同順位を含んでよい完全リストの場合に，超安定マッチングを見つけるか，存在しないならばそのように答える $O(n^2)$ 時間アルゴリズムを与えた．Manlove [8] はこの結果を不完全リストに拡張し，入力の希望リストの長さの総和を N とした場合の $O(N)$ 時間アルゴリズムを与えた．Manlove は更に，このアルゴリズムが同順位だけでなく任意の半順序の場合（すなわち SMPI）にも適用可能であることを示した (文献 [10] の 169 ページ)．以下で，M が I の共通安定マッチングであることと，M が I' の超安定マッチング

であることが，同値であることを示す．

まず，M が I の共通安定マッチングではないとし，(m,w) を L_i における M のブロッキングペアとする．定義より，w は M で独身であるか，$L_i(w)$ において $M(w)$ より m を好む．後者の場合は，$L(w)$ においても $M(w)$ より m を好む．同様に，m は M で独身であるか，$L_i(m)$ において $M(w)$ より w を好む．後者の場合は，m は $L(m)$ で $M(m)$ より w を好むか，w と $M(m)$ が比較不能であるかのいずれかである．どの組み合わせを取っても，(m,w) は I' において M に対する超安定性でのブロッキングペアになるため，M は I' の超安定マッチングではない．

逆に，M が I' の超安定マッチングではないとし，(m,w) を超安定性でのブロッキングペアとする．$L(w)$ は全順序なので，w は M で独身であるか，$L(w)$ において $M(w)$ より m を好む．後者の場合は，w は全ての $L_i(w)$ において $M(w)$ より m を好む．また，m については，(i) M で独身である，(ii) $L(m)$ で $M(m)$ より w を好む，(iii) $L(m)$ で w と $M(m)$ が比較不能である，のいずれかが成り立つ．(i) の場合，(m,w) は全ての L_i において M のブロッキングペアである．(ii) の場合は，全ての $L_i(m)$ において m は $M(m)$ より w を好むため，(m,w) は全ての L_i において M のブロッキングペアである．(iii) の場合は，ある $L_i(m)$ において m は $M(m)$ より w を好むため，(m,w) は L_i において M のブロッキングペアである．いずれの場合も M は I の共通安定マッチングではない．

I から I' を構築すること，および I' を解くことは $O(N)$ 時間で実行可能であるため，定理の主張が成り立つ． □

上記の証明を利用すると，この特別な場合において，男性最適マッチングと女性最適マッチングの存在が示せる．共通安定マッチング M が，任意の男性 m および任意の共通安定マッチング M' に対して，$M(m) = M'(m)$ であるか，m が全ての L_i で $M'(m)$ より $M(m)$ を好むとき，M を**男性最適共通安定マッチング**と呼ぶことにする．上記の定義で男女を入れ替えることにより，**女性最適共通安定マッチング**も同様に定義する．

$I = (U, W, L_1, L_2, \ldots, L_k)$ を SMkI の例題とし，$I' = (U, W, L)$ を証明中で作られた SMPI の例題とする．SMPI 例題においては超安定マッチング全体が分配束構造をなす ([9], [12] および [10] の 169 ページ) ため，I' は男性最適安定マッチング M_U および女性最適安定マッチング M_W を持つ．女性の希望リストは L および全ての L_i で同じなので，M_W は I の女性最適共通安定マッチングである．次に男性 m を考え，$L(m)$ において w_1 と w_2 が比較不能であるとする．この場合，m がある超安定マッチングで w_1 とペアになり，別の超安定マッチングで w_2 とペアになることはあり得ない．よって，I' における M_U の男性最適性から，任意の m および I' に対する任意の超安定マッチング M に対して，$M_U(m) = M(m)$ であるか，m は $L(m)$ で $M(m)$ より $M_U(m)$ を好む．L の構成法より，$M_U(m) = M(m)$ であるか，全ての $L_i(m)$ で m が $M(m)$ より $M_U(m)$ を好むかのいずれかである．従って $M_U(m)$ は I の男性最適共通安定マッチングである．

4. 終わりに

本稿では，k 個の希望リスト集合 $L_1, L_2, \ldots, L_k$ が与えられ，全ての L_i で安定となるマッチングが存在するか否かを問う判定問題の複雑性を議論した．本研究では，任意の $k \geq 2$ に対して，全ての希望リストの長さが 4 以下でも問題が NP 完全になること，また男性の希望リストの長さが高々 2 の場合には問題が多項式時間で解けることを示した．また，各女性が全ての L_i で同じリストを持っている場合も多項式時間で解けることを示した．

今後の課題としては，$\ell \geq 3$ に対して $(3,\ell)$-SMkI の計算複雑性を同定することが挙げられる．また，SMkI に対して近似を考える方向性もある．目的関数の一例としては，できるだけ多くの L_i において安定となるマッチングを求めるというものである．どれか 1 つの L_i において安定なマッチングを求めることは，自明な k-近似アルゴリズムになっている．また，定理 2.1 を利用すると，P≠NP ならば任意の正定数 ϵ に対して，偶数の k に対しては多項式時間の $(2-\epsilon)$-近似アルゴリズムが存在しないこと，奇数の k に対しては多項式時間の $(2-\frac{2}{k+1}-\epsilon)$-近似アルゴリズムが存在しないことがいえる．この上下限を縮めることは，興味深い研究課題である．また，別の目的関数として，全ての L_i に対するブロッキングペアの総数を最小化する問題も考えられる．

参考文献

[1] B. Aspvall, M. F. Plass, and R. E. Tarjan, "A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas," *Information Processing Letters*, Vol. 8(3), pp. 121–123, 1979.
[2] S. Even, A. Itai, and A. Shamir, "On the complexity of the time table and multi-commodity flow problems," *SIAM Journal on Computing*, Vol. 5(4), pp. 691–703, 1976.
[3] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol.69, No. 1, pp. 9–15, 1962.
[4] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.11, Issue 3, pp. 223–232, 1985.
[5] D. Gusfield and R. W. Irving, The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms, MIT Press, Boston, MA, 1989.
[6] R. W. Irving, "Stable marriage and indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.48, pp. 261–272, 1994.
[7] R. W. Irving and P. Leather, "The complexity of counting stable marriages," *SIAM Journal on Computing*, Vol.15, pp. 655–667, 1986.

[8] D. F. Manlove, "Stable marriage with ties and unacceptable partners," University of Glasgow, Computing Science Department Research Report, TR-1999-29, 1999.

[9] D. F. Manlove, "The structure of stable marriage with indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 122, Issues 1–3, pp. 167–181, 2002.

[10] D. F. Manlove, Algorithmics of Matching under Preferences, World Scientific, 2013.

[11] J. V. Sethuraman and C. P. Teo, "A polynomial-time algorithm for the bistable roommates problem", *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 63, Issue 3, pp. 486–497, 2001.

[12] B. Spieker, "The set of super-stable marriages forms a distributive lattice," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 58, Issue 1, pp. 79–84, 1995.

[13] E. G. Thurber, "Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem," *Discrete Mathematics*, Vol. 248, Issues 1–3, pp. 195–219, 2002.

[14] B. P. Weems, "Bistable versions of the marriages and roommates problems," *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 59, Issue 3, pp. 504–520, 1999.