

2 資産に依存するオプションの高速・高精度価格計算手法

高柳 健一郎[†] 山本 有作[†] 杉原 正 顯^{††}

本論文では、オプション価値が2つの金融資産の価格に依存するタイプのオプションについて、価格計算のための新しいアルゴリズムを提案する。従来、このタイプのオプションの価格計算にはモンテカルロ法や2項モデルが使われてきたが、これらは収束が遅く、たとえば価格を5桁の精度で求める場合に、最新のPCで数分程度の時間を要する場合が多い。本論文で提案する手法では、オプションの価値を関数とガウス分布との2次元畳み込み積として表現し、この畳み込み積を2重指数型数値積分公式と高速ガウス変換との組合せにより効率的に計算する。本手法を実装し、PC上で評価したところ、スプレッド・オプション、Maxオプション、クワント・オプションなどの典型的な2資産依存型オプションの価格を計算する場合に、従来法に比べて10倍から100倍程度の高速度性が得られた。

A Fast and Accurate Algorithm for Pricing Options on Two Assets

KENICHIRO TAKAYANAGI,[†] YUSAKU YAMAMOTO[†]
and MASA AKI SUGIHARA^{††}

In this paper, we propose a new algorithm for pricing options whose value depends on the prices of two assets. Though the Monte Carlo method and the binomial method have been widely used to price this type of options, their convergence is relatively slow. In fact, these methods often take several minutes on a modern PC to compute the price up to 5-digit accuracy. In our approach, we express the option value as a two-dimensional convolution of a function with the Gaussian distribution and compute the convolution efficiently with a combination of the double-exponential integration formula and the fast Gauss transform. Numerical experiments show that our method is 10 to 100 times faster than the conventional methods when pricing spread, max and quanto options.

1. はじめに

将来のある時点において、株式や外貨などの金融資産をあらかじめ決められた価格で購入あるいは売却する権利のことをオプションと呼ぶ。たとえば、3カ月後に1ドルを102円で買う権利はオプションの例である。この例のように資産を購入する権利をコールオプションと呼び、売却する権利をプットオプションと呼ぶ。オプションを利用すると市場変動による損失のリスクを回避できるため、近年日本でもオプションの需要は大きく伸びつつある。上記の例は権利行使時点があらかじめ定められている最も単純なオプション

(ヨーロピアン・コールオプション)であるが、権利行使時点を保有者が自由に選べるアメリカン・オプション、資産価格がある値を超えた場合に権利が消滅するバリア・オプション、複数の資産に関するオプションなど、様々な特性を持つ複雑なオプションも広く用いられている^{6),10),12)}。

オプションを入手するには代価を支払うことが必要であり、その代価をオプションの価格と呼ぶ。資産価格がブラック-ショールズのモデル²⁾に従う場合、無裁定条件と呼ばれる経済学的な仮定を採用すると、この価格は、リスク中立測度と呼ばれるある確率測度の下でオプションから得られる利益(ペイオフ)の期待値をとることにより計算できる⁶⁾。特に、ヨーロピアン・オプションに対してはこの期待値が解析的に計算でき、有名なブラック-ショールズのオプション価格公式が導かれる²⁾。しかし、このように解析的に価格が求められるオプションは限られており、一般には数値計算の利用が重要となる。

本論文では、2つの資産に依存するオプションの価

[†] 名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻
Department of Computational Science and Engineering,
Graduate School of Engineering, Nagoya University

^{††} 東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻
Department of Mathematical Informatics, Graduate
School of Information Science and Technology, The
University of Tokyo

格を求める問題を扱う。このタイプのオプションには、2種類の資産を交換する権利であるスプレッド・オプション、2種類の資産のうち高価な方をあらかじめ決められた価格で購入できる Max オプション、自国通貨で外国の資産を購入する権利であるクウォント・オプションなど、実用上重要なオプションが数多く含まれる。これらのオプション価格の計算法としては、従来からモンテカルロ法と2項モデルによる解法とが広く使われてきた^{(8),(10),(12),(14)}。しかし、これらの解法は収束が遅く、たとえば価格を5桁程度の精度で求める場合にも、最新のPCで数分程度の時間がかかる場合が多い。

そこで本論文では、これらのオプションに対して高速・高精度な新しい価格計算手法⁽¹⁷⁾を提案する。最近、1資産に依存する種々のオプションに対して、高速ガウス変換⁽⁹⁾を利用した新しい価格計算法が提案されており、アメリカン・オプション⁽³⁾、天候デリバティブ⁽¹⁸⁾などに適用されて、高速に価格を計算できることが示されている。さらに、この手法を2重指数型数値積分公式⁽¹⁶⁾と組み合わせることにより、バリア・オプションをはじめとする複雑なオプションに対しても高速・高精度な価格計算を行えることが示されている^{(4),(19)}。本論文では、この手法を2つ以上の資産に依存するオプションに対しても拡張し、その効果を調べる。特に、従来から広く使われている計算法であるモンテカルロ法および2項モデルと計算速度・精度を比較することを目的とする。

以下では、まず2章において本論文で対象とするオプションについて説明し、価格計算の原理と従来の数値計算法を述べる。次に3章で、高速ガウス変換を用いた新しい価格計算法を提案する。4章では提案手法に対する数値実験を行い、モンテカルロ法および2項モデルと計算時間・計算精度を比較する。最後に5章でまとめを行う。

2. 資産に依存するオプションと従来の価格計算法

2.1 用語の定義

最初に、以下で使う定義を述べる。まず、本論文の最初で例にあげたオプションのように、将来のあらかじめ決められた時点でのみ権利行使が可能なオプションをヨーロッパ・オプションと呼ぶ。また、この時点点をオプションの満期と呼ぶ。以下ではオプションの売買が行われる時点時刻0、満期時刻 T とする。また、あらかじめ決められた購入(売却)価格を行使価格と呼び、 K で表す。また、権利行使によりオプ

ションの保持者が得られる利益をペイオフと呼ぶ。時刻 t における資産価格を S_t とすると、ヨーロッパ・コールオプションの保持者は満期 T において市場価格 S_T の資産を価格 K で買うことができるから、もし $S_T > K$ ならばペイオフは $S_T - K$ である。一方、もし $S_T \leq K$ ならば権利を放棄する方が得策であり、このときペイオフは0となる。これらを合わせて、ペイオフは $(S_T - K)^+ \equiv \max(S_T - K, 0)$ と書ける。

2.2 本論文で対象とするオプション

次に、2資産に依存するオプションのうち、本論文で扱う3種類のオプションについて説明する。

2.2.1 スプレッド・オプション

スプレッド・オプションとは、満期において資産1と資産2とを交換する権利であり、そのペイオフは $(S_{2,T} - S_{1,T} - K)^+$ と書ける。ここで、 $S_{1,t}, S_{2,t}$ はそれぞれ資産1, 2の時刻 t における価格を表す。また、 K は資産1と2の価格差を補正するための定数であり、 $S_1 \rightarrow S_2$ という交換を代価 K を払って行うと考えられるので、やはり行使価格と呼ばれる。スプレッド・オプションは、金融資産の取引のほか、エネルギー取引においてもよく使われる⁽⁵⁾。なお、このオプションについては、 $K = 0$ の場合にはオプション価格を1変数の積分で表す半解析的公式があるが⁽¹³⁾、 $K \neq 0$ の場合はそのような公式は存在しない。

2.2.2 Max オプション

Max オプションとは、資産1と2のうち高価な方を行使価格 K で購入できるオプションであり、ペイオフは $(\max(S_{1,T}, S_{2,T}) - K)^+$ と書ける。

2.2.3 クウォント・オプション

クウォント・オプションとは、自国通貨で外国の金融資産を購入する権利であり、様々な変種があるが、ここではペイオフが $S_{2,T}(S_{1,T} - K)^+$ と書けるタイプを考える。これは、たとえば $S_{1,t}$ が米国のある株式のドル建て価格、 $S_{2,t}$ が円/ドルの為替レートとすると、米国株式を日本円の定まった行使価格 K (円)で購入する権利と見なせる。

2.2.4 バリア付きの変種

以上のオプションに対して、さらにバリア付きの変種も考えられる。たとえばアップ・アンド・アウト型のバリアとは、 $[0, T]$ 中のあらかじめ決められた時刻 $t_i = i\Delta t$ ($\Delta t = \frac{T}{n}, i = 1, 2, \dots, n$)で一方の資産の価格を観測し、それがあるしきい値(バリアレベル) H を超えた場合にはオプションの権利が無効になるという特約のことである(この場合、バリア越えのチェックは離散時点のみで行われるので、正確には離散型のバリアと呼ぶ)。例としては、上記のクウォント・オ

プションにおいて、為替レートが H を超えた場合に無効となるバリア付きクウォント・オプションがあげられる。

バリア付きのオプションは、オプションの売り手にとっては、ペイオフが無制限に大きくなることがないので安心して売れるというメリットがある。ただし、一般に価格はバリアなしの場合に比べて割安となる。一方、買い手にとっては、もし為替レートが期間中にバリアレベル H を超えることはないと予想できるならば、割安に権利を得られるというメリットがある。

以上では 2 資産に依存するオプションのうち代表的な 3 種のみを説明したが、他にも様々な種類のオプションが取引されている。詳しくは、たとえば文献 12)、15) を参照されたい。

2.3 価格評価の原理

オプションの価格を計算するには、まず資産価格の変動の確率モデルを定義する必要がある。このために最もよく使われるのは資産価格が幾何的ブラウン運動に従うというブラック-ショールズモデル²⁾であり、2 資産の場合には、リスク中立確率測度⁶⁾の下で次の確率微分方程式で表される。

$$dS_{1,t} = (r - \delta_1)S_{1,t}dt + \sigma_1 dW_{1,t} \quad (1)$$

$$dS_{2,t} = (r - \delta_2)S_{2,t}dt + \sigma_2 dW_{2,t} \quad (2)$$

$$dW_{1,t}dW_{2,t} = \rho dt \quad (3)$$

ここで、 r は銀行預金などの無危険資産の利子率、 δ_1 、 δ_2 はそれぞれ資産 1、2 の配当率である。 σ_1 、 σ_2 はボラティリティと呼ばれ、それぞれ資産 1、2 の確率的変動の大きさを表す。以上のパラメータはすべて定数である。また、 $W_{1,t}$ 、 $W_{2,t}$ はブラウン運動であり、相関 ρ を持つ。

このモデルの下では、無裁定条件と呼ばれる経済学的な仮定を採用すると、オプションの時刻 0 における価格 $Q_0(S_{1,0}, S_{2,0})$ は次のようにペイオフ $h(S_{1,T}, S_{2,T})$ の期待値として表されることが知られている⁶⁾。

$$Q_0(S_{1,0}, S_{2,0}) = e^{-rT} E_0[h(S_{1,T}, S_{2,T})]. \quad (4)$$

ここで、 e^{-rT} は割引因子と呼ばれ、オプションの代価を支払うのが時刻 0 なのにオプションからの利益を得られるのが時刻 T であるという差を補正する役目を持つ。

1 資産のヨーロピアン・オプションの場合には、式 (4) が解析的に評価でき、ブラック-ショールズのオプション価格公式が導かれる。しかし、一般のオプションの価格評価では、式 (4) を数値的に計算することが必要となる。

2.4 従来の価格計算法

2 資産に依存するオプションの価格を計算するための手法としては、従来、モンテカルロ法と 2 項モデルが広く用いられてきた。本節では、これらについて簡単に説明する。

2.4.1 モンテカルロ法

モンテカルロ法では、式 (1)、(2)、(3) のモデルに従い、 $(S_{1,t}, S_{2,t})$ 空間でのサンプルパスを多数発生させる。そして、各パスに対してペイオフ $h(S_{1,T}, S_{2,T})$ を計算し、その平均値により $E_0[h(S_{1,T}, S_{2,T})]$ を近似する。

なお、確率微分方程式を直接差分近似すると、モンテカルロ法による統計誤差の他に離散化誤差が発生する。そのため、方程式 (1)、(2)、(3) を解析的に積分してサンプルパスを(確率変数を含む形で)求め、そのうえでモンテカルロ法を行う手法が現在では主流となっている。詳しくは、文献 8) を参照されたい。

2.4.2 2 項モデル

2 項モデルでは、時間と空間とを離散的にした格子上で確率過程により、ブラック-ショールズモデルの確率過程を近似する。そして、この離散的な確率過程の下で、期待値を計算する。

いま、離散的な確率過程の時間刻みを Δt とし、時刻 t での資産価格の組を (S_1, S_2) とする。このとき 2 項モデルでは、時刻 $t + \Delta t$ において、資産価格 S_1 、 S_2 がそれぞれ上がるか、下がるかの 2 通りの変化のみをすると考える。すなわち、 $t + \Delta t$ での起こりうる資産価格の組は次の 4 通りとなる。

- (uS_1, AS_2) (S_1 上昇, S_2 上昇)
- (uS_1, BS_2) (S_1 上昇, S_2 下降)
- (dS_1, CS_2) (S_1 下降, S_2 上昇)
- (dS_1, DS_2) (S_1 下降, S_2 下降)

ここで、 $u > 1$ 、 $d < 1$ とする。また、この 4 つの場合がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で起こると仮定する。なお、 S_2 の上がり方・下がり方の度合いを S_1 が上昇したか下降したかによって変えているのは、資産間の相関を取り込むためである。

この定式化では、決めるべきパラメータは u 、 d 、 A 、 B 、 C 、 D の 6 個あるが、これらは $AD = BC$ という条件(格子ができるための条件)と、離散的な確率過程の 1 次と 2 次のモーメント(各資産の平均・分散と資産間の相関の 5 個)が連続的な確率過程と一致するという条件から定める。詳しくは、文献 14) を参照されたい。

3. 高速ガウス変換を用いた価格計算法の提案

3.1 原 理

3.1.1 漸化式の導出

本節では、本論文で提案する価格計算法¹⁷⁾の原理について述べる。バリア付きの場合とバリアなしの場合を統一的に扱うため、まず、時刻 $t_i = i\Delta t$ ($\Delta t = \frac{T}{n}, i = 1, 2, \dots, n$) を考え、時刻 t_i におけるオプション価値を次のように定義する。

$$Q_i(S_{1,i}, S_{2,i}) \equiv e^{-r(T-t_i)} E_i[h(S_{1,T}, S_{2,T})] \quad (5)$$

ここで、 $E_i[\cdot]$ は時刻 t_i における状態が与えられたときの期待値演算子である。また、 S_{1,t_i}, S_{2,t_i} を略して $S_{1,i}, S_{2,i}$ と書いた。これは、 $i = 0$ のとき、式 (4) で与えられる時刻 0 でのオプション価格に一致する。

いま、期待値演算子の性質を用いると、

$$\begin{aligned} Q_i(S_{1,i}, S_{2,i}) &= e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \\ &\quad \times E_i[e^{-r(T-t_{i+1})} E_{i+1}[h(S_{1,T}, S_{2,T})]] \\ &= e^{-r\Delta t} E_i[Q_{i+1}(S_{1,i+1}, S_{2,i+1})] \end{aligned} \quad (6)$$

となる。したがって、

$$Q_n(S_{1,n}, S_{2,n}) = h(S_{1,n}, S_{2,n}) \quad (7)$$

より始め、漸化式 (6) を繰り返し使って時刻を遡ることにより、時刻 0 におけるオプション価格を計算できる。

離散型バリア付きのオプションの場合、たとえば S_1 に対するアップ・アンド・アウト型の条件がついた場合は、 n をバリア越えの観測日数に選び、各 t_i に対していったん $Q_i(S_{1,i}, S_{2,i})$ を計算した後、バリアを越えるとオプションが無効になるという条件

$$Q_i(S_{1,i}, S_{2,i}) = 0 \quad \text{if } S_{1,i} > H \quad (8)$$

により、 Q_i の値を設定し直せばよい。一方、バリアなしの場合は、 $n = 1$ とし、ペイオフから直接期待値としてオプション価格を計算すればよい。

3.1.2 推移確率密度の計算

漸化式 (6) を計算するには、推移確率密度

$f(S_{1,i+1}, S_{2,i+1} | S_{1,i}, S_{2,i})$ が必要である。そこで、方程式 (1), (2), (3) を変数変換によって扱いやすい形に変形し、推移確率密度を計算する。

まず、 $s_{1,t} = \log S_{1,t}$, $s'_{2,t} = \log S_{2,t}$ とおくと、伊藤の補題¹¹⁾により、 $s_{1,t}, s'_{2,t}$ は次の確率微分方程式を満たす。

$$ds_{1,t} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_{1,t} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} ds'_{2,t} &= \mu_2 dt \\ &\quad + \sigma_2(\rho dW_{1,t} + \sqrt{1-\rho^2} dW'_{2,t}) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、

$$\mu_1 = r - \delta_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \quad (11)$$

$$\mu_2 = r - \delta_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \quad (12)$$

とおいた。また、 $ds'_{2,t}$ の式では、 $dW_{2,t}$ が $dW_{1,t}$ と、 $dW_{1,t}$ と独立なブラウン運動 $dW'_{2,t}$ により

$$dW_{2,t} = \rho dW_{1,t} + \sqrt{1-\rho^2} dW'_{2,t} \quad (13)$$

と書けることを用いた。さらに、

$$s_{2,t} = s'_{2,t} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho s_{1,t} \quad (14)$$

とおくと、 $s_{2,t}$ は次の確率微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} ds_{2,t} &= (\mu_2 - \mu_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho) dt \\ &\quad + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} dW'_{2,t}. \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、式 (9)、式 (15) はそれぞれ独立なブラウン運動に関する確率微分方程式だから、独立に t_i から t_{i+1} まで積分でき、次の式を得る。

$$s_{1,i+1} = s_{1,i} + \mu_1 \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t} z_1, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} s_{2,i+1} &= s_{2,i} + (\mu_2 - \mu_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho) \Delta t \\ &\quad + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{\Delta t} z_2. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 z_1, z_2 はともに正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立な変数である。さらに、

$$y_{1,t} = (s_{1,t} - \mu_1 t) / (\sigma_1 \sqrt{\Delta t}) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} y_{2,t} &= \left\{ s_{2,t} - \left(\mu_2 - \mu_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho \right) t \right\} \\ &\quad / (\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{\Delta t}) \end{aligned} \quad (19)$$

とおくと、次の式を得る。

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + z_1 \quad (20)$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + z_2 \quad (21)$$

これより、 $y_{1,t}, y_{2,t}$ の推移確率密度は

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(y_{1,i+1}, y_{2,i+1} | y_{1,i}, y_{2,i}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(y_{1,i+1} - y_{1,i})^2}{2} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{(y_{2,i+1} - y_{2,i})^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

と与えられることが分かる。

3.1.3 漸化式の積分による表現

$Q_i(S_{1,i}, S_{2,i})$ を新しい変数 $y_{1,i}, y_{2,i}$ の式で表した関数を $\tilde{Q}_i(y_{1,i}, y_{2,i})$ とすると、式 (22) の推移確率密度を用いることにより、漸化式 (6) は次のように積分で書ける。

$$\begin{aligned} &\tilde{Q}_i(y_{1,i}, y_{2,i}) \\ &= e^{-r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} dy_{1,i+1} \int_{-\infty}^{\infty} dy_{2,i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{Q}_{i+1}(y_{1,i+1}, y_{2,i+1}) \\ & \times \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(y_{1,i+1} - y_{1,i})^2}{2} \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(y_{2,i+1} - y_{2,i})^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

バリア付きのオプションの場合には、式 (8) を実現するため、 $y_{1,i+1}$ に関する積分の上端を、バリア H に対して $S_{1,i+1} \rightarrow y_{1,i+1}$ に対応する変数変換を行って得られる値 h で置き換えればよい。

3.2 数値積分による漸化式の計算

2重積分 (23) を数値積分により近似するため、まず積分の上下端が $\pm\infty$ である場合には、これを被積分関数が十分小さくなる点で打ち切る。次に、各方向 $y_{1,i+1}$ 、 $y_{2,i+1}$ に対して 1 次元の数値積分公式を適用する。 $y_{1,i+1}$ 方向の標本点数を N_1 、標本点の座標を $\{Y_{1,i+1}^{(l)}\}_{l=1}^{N_1}$ 、重みを $\{w_{1,i+1}^{(l)}\}_{l=1}^{N_1}$ 、 $y_{2,i+1}$ 方向の標本点数を N_2 、標本点の座標を $\{Y_{2,i+1}^{(m)}\}_{m=1}^{N_2}$ 、重みを $\{w_{2,i+1}^{(m)}\}_{m=1}^{N_2}$ とすると、積分 (23) は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} & \tilde{Q}_i(Y_{1,i}^{(j)}, Y_{2,i}^{(k)}) \\ & = e^{-r\Delta t} \sum_{m=1}^{N_2} \left[\sum_{l=1}^{N_1} \tilde{Q}_{i+1}(Y_{1,i+1}^{(l)}, Y_{2,i+1}^{(m)}) \right. \\ & \quad \times \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(Y_{1,i+1}^{(l)} - Y_{1,i}^{(j)})^2}{2} \right\} w_{1,i+1}^{(l)} \left. \right] \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{(Y_{2,i+1}^{(m)} - Y_{2,i}^{(k)})^2}{2} \right\} w_{2,i+1}^{(m)} \\ & \quad (j = 1, 2, \dots, N_1, k = 1, 2, \dots, N_2) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、内側の l に関する和は添字 l, m, j のみに関係し、外側の m に関する和は添字 m, j, k のみに関係することに注意すると、これらの和はそれぞれ $O(N_1^2 N_2)$ 、 $O(N_1 N_2^2)$ で計算でき、式 (24) を定義どおりに計算するための計算量は $O(N_1 N_2 (N_1 + N_2))$ であることが分かる。

1次元の数値積分公式としては、バリアなしの場合は、無限区間の積分でかつ被積分関数にガウス型の急減少因子がかかっていることから、台形公式を用いる。一方、バリア付きの場合は、半無限区間の積分となるため、半無限区間のための 2 重指数型数値積分公式¹⁶⁾を用いる。

3.3 高速ガウス変換の適用による高速化

漸化式 (24) の計算は、 l に関する和と m に関する和の 2 つのステップに分解できるが、これらはともに数列とガウス分布との離散畳み込み積を複数組行うと

いう形をしている。たとえば、 l に関する和は、 m を固定して考えると、ベクトル

$$\left(\tilde{Q}_{i+1}(Y_{1,i+1}^{(l)}, Y_{2,i+1}^{(m)}) w_{1,i+1}^{(l)} \right)_{l=1}^{N_1} \quad (25)$$

とガウス分布との畳み込み積となっている。

一般に、このような畳み込み積

$$\begin{aligned} G(x_i) & = \sum_{j=1}^N q_j \exp \left\{ \frac{(x_i - y_j)^2}{\delta} \right\} \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (26)$$

を高速に計算する方法として、高速多重極展開法¹⁾の一種である高速ガウス変換^{1),9)}がある。次項での説明に必要となるため、以下、高速ガウス変換の原理について簡単に説明する。

まず、条件

$$|x_i - x_0| < \delta^{1/2} \quad (\forall i) \quad \text{かつ} \quad (27)$$

$$|y_j - y_0| < \delta^{1/2} \quad (\forall j) \quad (28)$$

を満たす点 x_0, y_0 が存在すると仮定し、式 (26) のガウス分布を x_0, y_0 に関して次のようにエルミート関数 $h_n(x)$ で展開する。

$$\begin{aligned} e^{-(x_i - y_j)^2/\delta} & = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\beta!} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{y_j - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\alpha} \\ & \quad \times h_{\alpha+\beta} \left(\frac{x_0 - y_0}{\sqrt{\delta}} \right) \left(\frac{x_i - x_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\beta} \end{aligned} \quad (29)$$

この展開は、条件 (28) が成り立つならばきわめて速く収束し、 α, β の上限 α_{\max} を 10 程度にとれば倍精度計算では十分であることが知られている⁹⁾。そこで、式 (29) を $\alpha = \beta = \alpha_{\max}$ で打ち切り、式 (26) に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} G(x_i) & \cong \sum_{\beta=0}^{\alpha_{\max}} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{x_i - x_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\beta} \\ & \quad \times \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}} h_{\alpha+\beta} \left(\frac{x_0 - y_0}{\sqrt{\delta}} \right) \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=1}^N q_j \left(\frac{y_j - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\alpha} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

この式より、 $G(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は次の 3 ステップで計算できることが分かる。

$$(i) \quad A_{\alpha} \equiv \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=1}^N q_j \left(\frac{y_j - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\alpha} \quad (\alpha = 0, \dots, \alpha_{\max}) \text{ を計算}$$

$$(ii) \quad B_{\beta} \equiv \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}} A_{\alpha} h_{\alpha+\beta} \left(\frac{x_0 - y_0}{\sqrt{\delta}} \right) \quad (\beta = 0, \dots, \alpha_{\max}) \text{ を計算}$$

$$(iii) \quad G(x_i) = \sum_{\beta=0}^{\alpha_{\max}} B_{\beta} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{x_i - x_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\beta}$$

($i = 1, \dots, N$) を計算

α_{\max} を固定したとき、ステップ (i)、ステップ (iii) はそれぞれ $O(N)$ の計算量で計算できる。また、ステップ (ii) は N に依存しない定数の計算量で計算できる。したがってこの場合には、離散畳み込み積 (26) が $O(N)$ で計算できることが分かる。なお、一般には条件 (28) は成立しないため、さらに工夫が必要となるが、この点については文献 9) を参照されたい。

式 (24) の評価においてこの高速ガウス変換を利用することにより、計算量を $O(N_1 N_2 (N_1 + N_2))$ から $O(N_1 N_2)$ に削減できる。

なお、オプション価格を式 (23) のような積分を用いた漸化式で表現し、これを数値積分を用いて計算することにより価格を求めるというのは、きわめて自然なアイデアのように思われる。このような方法が今まで普及しなかったのは、数値積分の式 (24) を直接計算すると $O(N_1 N_2 (N_1 + N_2))$ の計算量が必要となり、従来法に比べて優位性が得られなかったためと考えられる。これに対して本論文では、高速ガウス変換という、比較的新しく金融工学の分野では馴染みのない手法を導入することにより、この演算量を $O(N_1 N_2)$ に落とすことができた。この点が本論文で提案するアルゴリズムの一番のポイントである。

3.4 level-3 BLAS の利用

高速ガウス変換における 3 個のステップは、すべて行列・ベクトルの積の形をしている。たとえば、ステップ (i) は、第 (α, j) 要素が $\frac{1}{\alpha!} \left((y_j - y_0) / \sqrt{\delta} \right)^{\alpha}$ であるような行列とベクトル $\mathbf{q} = (q_j)_{j=1}^N$ との積である。ここで、式 (24) の l に関する和を計算するには m 組の畳み込み積が必要であり、各畳み込み積に現れるガウス関数の値は m によらないことに注意すると、 m 本のベクトル $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ に対して同時に高速ガウス変換を行えばよいことになる。このとき、ステップ (i) は行列・行列積となる。さらに、ステップ (ii)、(iii) も行列・行列積となることが分かる。これは、式 (24) の m に関する和についても同様である。

一般に行列・行列積はデータ参照の局所性が高く、キャッシュを有効に利用できてプロセッサの性能を引き出しやすいことが知られている。また、各プロセッサに対して、level-3 BLAS という形で、最適化されたルーチンが提供されている。したがって、提案手法においては、複数組の高速ガウス変換の部分を level-3 BLAS を用いる形で書き換えることにより、性能をより向上させられると考えられる。

3.5 提案手法の計算量と計算精度

以上で述べたアルゴリズムから明らかなように、提案手法の計算量は、 y_1, y_2 方向の標本点数をそれぞれ N_1, N_2 とするとき、1 時間ステップあたり $O(N_1 N_2)$ である。バリアなしのオプションに対しては時間ステップ数を $n = 1$ ととればよいため、全体の計算量も $O(N_1 N_2)$ である。一方、バリア付きのオプションに対しては、バリア越えの観測日数を n とするとき、全体の計算量は $O(n N_1 N_2)$ となる。

計算精度については、数値積分で用いた台形公式および 2 重指数型数値積分公式の性質から、 $Q_i(S_{1,i}, S_{2,i})$ がすべての i に対して解析関数であれば、 N_1, N_2 を増やしたときに誤差は指数関数的に減少する。しかし、一般にはペイオフ $Q_n(S_{1,n}, S_{2,n}) = h(S_{1,n}, S_{2,n})$ に不連続点あるいは 1 階導関数の不連続点があるため、収束は N^{-1} あるいは N^{-2} 程度のオーダーとなる。

4. 数値実験

4.1 実験環境と実験の概要

前章で提案したアルゴリズムを C 言語を用いて実装し、Pentium 4 (1.9 GHz) の PC 上で評価を行った。使用した OS は Windows XP Home Edition、コンパイラは Microsoft Visual C++ Ver. 6.0 である。level-3 BLAS としては、Intel Math Kernel Library 7.2 の DGEMM を用いた。

比較対象の解法としては、モンテカルロ法と 2 項モデルを用いた。モンテカルロ法では、2.4.1 項で説明した、サンプルパスを解析的に求める方法⁸⁾ を用い、2 項モデルでは 2.4.2 項で述べた方法により離散的な確率過程を構築した。

計算対象のオプションとしては、典型的な 2 資産依存型オプションであるスプレッド・オプション、Max オプション、クウォント・オプションの 3 種を取り上げた。また、バリアがある場合の計算速度・精度を調べるため、クウォント・オプションについてはバリア付きの場合も取り上げた。

4.2 バリアなしのオプション

4.2.1 スプレッド・オプション

ここでは、次のパラメータを持つスプレッド・オプションの価格を計算した。

$$\begin{aligned} S_{1,0} &= 50 (\text{円}), S_{2,0} = 100 (\text{円}), r = 0.1, \\ \delta_1 &= 0.01, \delta_2 = 0.02, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2, \\ \rho &= 0.5, T = 0.25 (\text{年}), \\ K &= 40, 45, 50, 55, 60 (\text{円}) \end{aligned}$$

オプションのペイオフは $(S_{2,T} - S_{1,T} - K)^+$ である。2 つの資産の初期の価格差が 50 と大きいので、それ

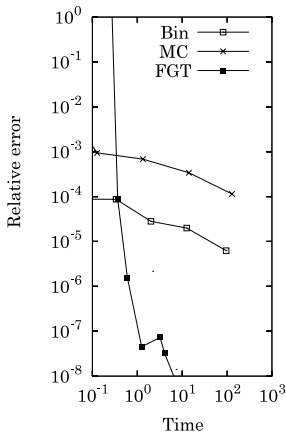


図 1 スプレッド・オプションに対する各手法の収束性

Fig. 1 Convergence of each method for a spread option.

を補正するために行使価格 K は 50 前後の値とした。

提案手法では、式 (23) における $(-\infty, \infty)$ の積分を、下端 -10 、上端 10 で打ち切った。これは、ガウス分布の値が中心から 10σ 以遠の領域では無視できるためである。また、予備実験の結果 y_2 方向の積分については $N_2 = 64$ と固定すれば十分な精度が得られると分かったため、 N_1 のみを 16 から 1024 まで 2 倍刻みに動かして計算を行った。一方、モンテカルル法については、サンプルパスの本数を 10^5 から 10^8 まで 10 倍ずつ変化させ、2 項モデルについては、時間刻みを $T/64$ から $T/1024$ まで $\frac{1}{2}$ ずつ変化させて計算を行った。

$K = 40$ の場合に対し、各計算手法の計算時間と精度の関係を図 1 に示す。ここで、Bin, MC, FGT はそれぞれ 2 項モデル、モンテカルル法、提案手法の結果を示す。横軸は計算時間 (秒) であり、縦軸は計算価格の相対誤差、すなわち

$$|\text{計算価格} - \text{参照価格}| / \text{参照価格} \quad (31)$$

である。なお、これは以下のすべての実験に対しても同様であり、以下、単に「誤差」といった場合は相対誤差を指す。参照価格としては、式 (24) において十分な標本点数 ($N_1 = 4096$, $N_2 = 64$) をとり、高速ガウス変換を用いずに定義式どおり計算した値 $Q_0 = 11.0277989$ を用いた。

図より、提案手法では計算時間とともに誤差が急激に減少し、1 秒以下で 10^{-5} の精度が達成できていることが分かる。これに対し、2 項モデルでは同じ精度を達成するのに約 100 秒と、100 倍の時間が必要である。また、モンテカルル法では、100 秒計算を行っても、誤差はまだ 10^{-4} 程度である。なお、他の K の値に対しても、ほぼ同様の収束特性が見られた。

表 1 MKL 使用時/不使用時の計算時間

Table 1 Computation time with and without the MKL.

N_1	MKL 使用時 (秒)	MKL 不使用時 (秒)
16	0.27	0.27
32	0.36	0.34
64	0.59	0.56
128	1.23	1.31
256	3.16	3.77
512	4.00	12.17
1024	8.80	16.78

また、提案手法では N_1 を 2 倍に増やしたときの計算時間は平均して 2 倍に増加しており、3.5 節で述べた、計算量が N_1 に比例するという主張が裏付けられている。なお、 N_1 を増やしたときに一部誤差が増大する箇所があるが、これはスプレッド・オプションのペイオフが 1 階導関数に不連続点を持つことの影響と考えられる。

なお、プロセッサ向けに最適化された level-3 BLAS を使うことが性能にどの程度効いているかを調べるため、Math Kernel Library (MKL) を使う場合、使わない場合の実行時間を比較した。使わない場合には、3.4 節で述べた行列・行列積を単純な 3 重 do ループにより実行した。この結果を表 1 に示す。表より、MKL の使用は N_1 が大きい場合に効果があり、最大 3 倍程度の性能向上が得られていることが分かる。なお、上で述べた従来法と提案手法の速度差を考慮すると、最適な level-3 BLAS を使わない場合でも、提案手法は従来法に比べて高速であるといえる。ここではスプレッド・オプションのみについて結果を示したが、Max オプション、クウォント・オプションはペイオフの関数のみが異なり計算は同一のため、この結論はこれらのオプションに対しても成り立つと考えられる。

4.2.2 Max オプション

次に、Max オプションに対する計算結果を図 2 に示す。ペイオフは $(\max(S_{1,T}, S_{2,T}) - K)^+$ であり、パラメータは次のとおりである。

$$\begin{aligned} S_{1,0} &= 100, S_{2,0} = 100, r = 0.1, \\ \delta_1 &= 0.01, \delta_2 = 0.02, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2, \\ \rho &= 0.5, T = 0.25, \\ K &= 95, 100, 105, 110, 115 \end{aligned}$$

図は $K = 95$ の場合であり、参照価格 (スプレッド・オプションの場合と同様にして計算) は $Q_0 = 10.5052160$ である。この場合も提案手法は 1 秒以下で 10^{-5} の精度を達成しており、2 項モデルに比べて数十倍の高速化が図られている。また、他の K に対する収束特性もほぼ同様であった。

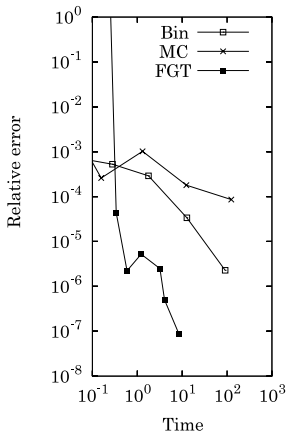


図 2 Max オプションに対する各手法の収束性

Fig. 2 Convergence of each method for a max option.

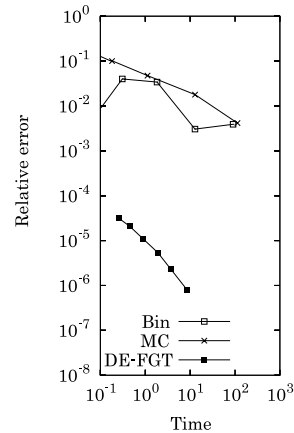


図 4 バリア付きクウォント・オプションに対する各手法の収束性

Fig. 4 Convergence of each method for a quanto option with barrier.

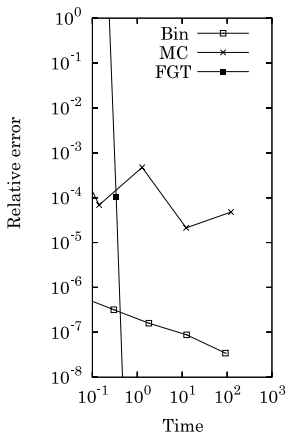


図 3 クウォント・オプションに対する各手法の収束性

Fig. 3 Convergence of each method for a quanto option.

4.2.3 クウォント・オプション

クウォント・オプションに対する計算結果を図 3 に示す。ペイオフは $S_{2,T}(S_{1,T} - K)^+$ であり、パラメータは次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 S_{1,0} &= 50, S_{2,0} = 50, r = 0.1, \\
 \delta_1 &= 0.01, \delta_2 = 0.02, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2, \\
 \rho &= 0.5, T = 0.25, \\
 K &= 40, 45, 50, 55, 60
 \end{aligned}$$

図は $K = 40$ の場合であり、参照価格は $Q_0 = 560.4783993$ である。本オプションに対しては、2 項モデルでも 1 秒以下で 10^{-6} の精度が得られている。ただし、提案手法は同じ時間でより高い精度を達成しており、1 秒以下で 10^{-11} の精度が得られている。

なお、本オプションでは提案手法の収束が前述の 2 種のオプションに比べて著しく速いが、これは、ペイオフが $S_{2,T}(S_{1,T} - K)^+$ という形でその 1 階導関数の不

連続点が直線 $S_{1,T} = K$ 上にあり、 $S_{1,T}$ 一定 (すなわち $y_{1,T}$ 一定) の位置にある標本点とうまく一致したためと考えられる。一方、スプレッド・オプション、Max オプションでは、それぞれ直線 $S_{2,T} - S_{1,T} - K = 0$, $S_{2,T} = S_{1,T}$ 上に 1 階導関数の不連続点が存在するため、このような一致は期待できない。後者の場合の収束性を詳しく解析し、より良い標本点のとり方を検討することは、今後の課題である。

4.3 バリア付きのオプション

次に、バリア付きオプションの例として、バリア付きクウォント・オプションに対する計算を行った。パラメータは 4.2.3 項のオプションとほぼ同じであるが、 $K = 50$ と固定し、 S_2 に対してアップ・アンド・アウト型のバリアを設定した。バリアの観測日数は $n = 16$ とし、バリアレベル H は 52, 54, 56, 58, 60 と変化した。また、2 項モデルによる計算では、バリアなしの場合と同様、時間刻みを $T/64$ から $T/1024$ まで変化させたが、資産価格 $S_{1,t}$ が H を超えたかどうかのチェックは、時間刻みの大きさによらず、 $T/16, 2T/16, \dots, 16T/16$ の 16 時点でのみ行うようにした。これにより、時間刻みを小さくしたとき、計算価格が 16 回の観測日数を持つ離散型バリア・オプションの価格に収束するようにした。

$H = 52$ の場合の各手法の収束特性を図 4 に示す。参照価格は $Q_0 = 15.7453590$ である。この例題に対しても、提案手法はモンテカルロ法や 2 項モデルに比べて高速・高精度であり、約 1 秒の計算で 10^{-5} の精度を実現している。

4.4 実用上に必要な計算精度についての考察

以上で述べたように、本論文で提案する手法では、

PC で 1 秒以下の計算時間で、相対誤差で 10^{-5} 程度という高い精度で 2 資産に依存するオプションの価格を計算することが可能である。しかし実際の応用では、入力データがより低い精度でしか与えられない場合など、必ずしもこれだけの精度を必要としない場合も考えられる。そこで、そのような応用に対して、提案手法がどのようなメリットをもたらすかを考える。

まず、メリットの 1 つとしては、収束の速さがあげられる。実際に必要な桁数が 3 桁程度だとしても、計算した値を信頼して利用するには、計算結果が十分収束し、それ以上精度を上げて（サンプルパスの本数、時間ステップ数などを増やしても）4 桁目あるいは 5 桁目の値が変わらない状態になっていることが望ましい。提案手法では、ここで取り上げた 4 つの例すべてに対し、このような状態が 1 秒以下の計算時間で実現できる。この点で、従来法に比べてメリットがあると考えられる。

本手法が有効なもう 1 つの場合は、オプション価格の微係数を計算する場合である。価格計算では、価格そのものと同時に、価格の初期資産価格やボラティリティなどのパラメータに関する 1 階あるいは 2 階の偏微係数を必要とすることが多い¹⁰⁾。この偏微係数を差分により近似する場合には、価格どうしの微小な差が問題となるため、通常の価格計算に比べ、より高精度な価格が必要となる。提案手法はこのような計算の際にも威力を発揮すると考えられる。

5. おわりに

本研究では、2 資産に依存するオプションの価格計算の高速化・高精度化を目的として、従来のモンテカルロ法、2 項モデルに代わる新しいアルゴリズムを提案し、その評価を行った。提案手法では、オプション価値を関数とガウス分布の畳み込み積として表現し、これを 2 重指数型数値積分公式と高速ガウス変換との組合せにより効率的に計算する。PC 上での数値実験の結果、本手法は従来法に比べて 10 倍から 100 倍程度高速であり、スプレッド・オプション、Max オプション、クウォント・オプションなど 2 資産に依存する種々のオプションの価格を 1 秒以下で 5 桁の精度で計算できることが示された。

今後の課題としては、(i) 数値積分においてペイオフ関数の不連続性を考慮することで、よりスムーズな収束特性を持つ計算手法を開発すること、(ii) 本論文で取り上げた以外の 2 資産に依存するオプションへの適用、(iii) アフィン・ジャンプ拡散モデル⁷⁾ など、ブラック-ショールズモデル以外のより複雑かつ現実的

な資産価格モデルへの適用があげられる。

謝辞 本研究に対して有益な助言をくださった査読者の方々に感謝いたします。なお、本研究は名古屋大学 21 世紀 COE プログラム「計算科学フロンティア」および科学研究費補助金若手研究 (B) (課題番号 16760053) の補助を受けている。

参考文献

- 1) Baxter, B. and Roussos, G.: A New Error Estimate of the Fast Gauss Transform, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.24, No.1, pp.257-259 (2002).
- 2) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-654 (1973).
- 3) Broadie, M. and Yamamoto, Y.: Application of the Fast Gauss Transform to Option Pricing, *Management Science*, Vol.49, pp.1071-1088 (2003).
- 4) Broadie, M. and Yamamoto, Y.: A Double-Exponential Fast Gauss Transform Algorithm for Pricing Discrete Path-Dependent Options, to appear in *Operations Research*.
- 5) Carmona, R. and Durrleman, V.: Pricing and Hedging Spread Options, *SIAM Review*, Vol.45, No.4, pp.627-685 (2003).
- 6) Duffie, D.: *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd ed., Princeton University Press (1996).
- 7) Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K.: Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions, *Econometrica*, Vol.68, pp.1343-1376 (2000).
- 8) Glasserman, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag (2004).
- 9) Greengard, L. and Strain, J.: The Fast Gauss Transform, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol.12, pp.79-94 (1991).
- 10) Hull, J.: *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th ed., Prentice-Hall (2002).
- 11) Karatzas, I. and Shreve, S.E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer-Verlag (1997).
- 12) Kwok, Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag (1998).
- 13) Margabe, W.: The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, *Journal of Finance*, Vol.33, pp.177-186 (1978).
- 14) 森平爽一郎, 小島 裕: コンピュータシヨナルファイナンス, 朝倉書店 (1997).
- 15) Smithson, C.: Multifactor Options, *Risk*, Vol.10, pp.43-45 (May 1997).
- 16) Takahashi, H. and Mori, M.: Double Exponential Formulas for Numerical Integration, *Publ.*

RIMS Kyoto Univ., Vol.9, pp.721–741 (1974).

- 17) 高柳健一郎：2 資産に依存するオプション価格の高速・高精度計算手法，名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻修士論文 (2005).
- 18) 山本有作，恵木正史：高速ガウス変換を用いた天候デリバティブの価格評価手法，情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム，Vol.45, No.SIG6 (ACS6), pp.176–185 (2004).
- 19) Yamamoto, Y.: Double-Exponential Fast Gauss Transform Algorithms for Pricing Discrete Lookback Options, to appear in *Publ. RIMS Kyoto Univ.*

(平成 17 年 1 月 24 日受付)

(平成 17 年 4 月 27 日採録)



高柳健一郎 (正会員)

1980 年生。2003 年名古屋大学工学部物理工学科 (応用物理学コース) 卒業。2005 年同大学院工学研究科計算理工学専攻修士課程修了。金融工学向け数値計算アルゴリズムの研究

開発に従事。



山本 有作 (正会員)

1966 年生。1990 年東京大学工学部計数工学科 (数理工学コース) 卒業。1992 年同大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了。同年 (株) 日立製作所中央研究所入所。2003 年名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻助手。現在，同講師。並列計算機向け行列計算アルゴリズムおよび金融工学向け高速計算アルゴリズムの研究開発に従事。高性能計算とその応用に興味を持つ。博士 (工学)。SIAM，INFORMS，日本応用数学会各会員。



杉原 正顯 (正会員)

1981 年 3 月東京大学大学院工学系研究科博士課程修了。工学博士。現在，東京大学大学院情報理工学系研究科教授。数値計算の基本アルゴリズムの解析と設計に従事。日本応用数学会会員，日本数学会各会員。