選好順序による多人数NIMにおける正規形と逆形

末續 鴻輝[1,a)]

概要：
完全情報ゲームの多くの研究は 2 人プレイのものに限定され，3 人以上でプレイするゲームに関する研究は，Li[1] や， Straffin[2]，Propp[3] などの研究があるものの，その絶対数は少ない．その理由の一つには，3 人以上のゲーム独自の問題がある．2 人ゲームにおいては，ゲーム木をすべて書き下し，終了局面から再帰的に遡ることで，それぞれの局面において先手に必勝手順が存在するか，あるいは後手に必勝手順が存在するかどうかを判定することができる．しかしながら，3 人以上のゲームにおいては，このように一意に勝者を定めることはできない．本研究では，Li が導入した順位の拡張とも言える概念を導入し，よく知られた完全情報ゲーム NIM の多人数版の解析を行う．さらにこれが，正規形のゲーム (最後の着手をしたプレイヤーの勝ちとなるゲーム）だけでなく逆形のゲーム (最後の着手をしたプレイヤーが負けとなるゲーム）を含めた拡張となっていることを示す．

The normal play and the misère play of multiplayer NIM with preference

Koki Suetsugu[1,a)]

Abstract: Almost all results of combinatorial game theory are based on two player games but some researches are done on multiplayer combinatorial games; Li[1], Straffin[2] and Propp[3]. Multiplayer games are different from 2-player games in that the winner is not determined from the game position. In order that a unique order is determined, we assume each player has a fixed “preference”, which is defined as a total ordering of the every players. Each player behaves so that the player who moves last will have the highest possible preference value. We present solutions for various forms of preferences in multiplayer NIM which include the generalization of the normal play and the misère play.

1. 序

囲碁や将棋のように，確率的要素のないゲームは完全情報ゲームと呼ばれる．組合せゲーム理論とは，完全情報ゲームの数学的構造について研究する学問であり，特に，与えられたゲームの必勝者を確定させせることに興味を持った研究がされ，多くの結果が知られている．もちろん囲碁や将棋のような複雑なゲームで必勝者を決定することは一般に困難であるが，囲碁の終盤の解析に組合せゲーム理論の結果を用いるなど [4]，ゲームの特性によっては，そのような数学的解析が可能なことがある．

主に，2 人ゲームについて多くの研究がされているが，その基礎となる定理は次の定理である．

定理 1.1. 2 人で行う引き分けのない完全情報ゲームには，いずれかのプレイヤーに必ず必勝戦略がある．

Proof. ゲームの局面をグラフの頂点，局面から局面への移行を有向辺で表して，ゲームに対応する木を用意する．

木の葉の部分では，それ以降いずれのプレイヤーも着手できないため，終了局面であり，ゲームのルールに従って，いずれかのプレイヤーが勝者であると決定される．

途中局面では，次に後手となるプレイヤーが勝てる選択肢があるのなら先手のプレイヤーに必勝戦略があり，すべての選択肢において，次に先手となるプレイヤーに必勝戦

[1] 京都大学大学院人間・環境学研究科
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501 JAPAN
[a)] suetsugu.koki@gmail.com

略があるのなら後手に必勝戦略がある．

□

このように，2 人ゲームでは必ず必勝戦略を持つプレイヤーがいるため，必勝性の解析がやりやすい．これに対し，3 人以上の完全情報ゲームを研究した例は多くはない．なぜならば，2 人ゲームのときと異なり，以下のような場合が考えられるからである:あるプレイヤーが二つの選択肢しか与えられていない．片方の選択肢を選ぶと，自分の次のプレイヤーが勝者となることが確定し，もう片方の選択肢を選ぶと自分の次の次のプレイヤーが勝者となることが確定する．

プレイヤーが自らの勝ちのみを目指すと考えられるのならば，この二つの選択肢に優越はなく，したがってこの状況での必勝者は一意に決められない．このように，多人数完全情報ゲームにおいては，2 人ゲームで確定していた必勝者があいまいになる．そこで本研究においては，プレイヤー同士の選好順序を定義した．これは，プレイヤー同士がお互いに順位付けして，自分以外のいずれかのプレイヤーを勝者にせねばならないとなっても，その選ばれる勝者が一意に定まるというものである．

選好順序を導入することで，正規形と呼ばれるルールの下での 2 人ゲームに見られた数学的構造と同様のものが多人数ゲームにおいて見られることを本研究では示し，さらに，選好順序の取り方を拡大することで，逆形と呼ばれるルールの下行われる 2 人ゲームに対しても，拡張というべき多人数ゲームが存在することを示す．

2. NIM と排他的論理和

本節では，2 人で行う組合せゲームのうち，不偏ゲームと呼ばれるものについての先行研究を紹介する．

組合せゲーム理論において，早期に見出された結果の一つが NIM と呼ばれるゲームの必勝戦略である．この結果はそれ自体が数学的に見事に完結しているだけでなく，他のゲームを解析する上でも基礎となる重要な結果であるのでここに紹介する．

定義 2.1. *NIM* の局面は，いくつかの石で構成された数個の山である．各プレイヤーは交互にいずれか一つの山を選び，好きな数の石を取る．石が全くない終了局面に到達させたプレイヤーの勝ちとなる．

このゲームの必勝戦略を判定するために，(ビットごとの) 排他的論理和 $\oplus$ を用いる．排他的論理和は，Xor などとも呼ばれる二項演算で，以下のように定義される．

定義 2.2. 自然数 x, y に対して排他的論理和 $x \oplus y$ を以下のように定義する．

$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i 2^i, y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i 2^i$ (ただし，$x_i, y_i \in \{0, 1\}$) と表せるとき，

$x \oplus y = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i \oplus y_i) 2^i$

(ただし，$0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$)

すなわち，排他的論理和とは，自然数を 2 進展開したとき，その桁ごとの繰り上がりのない和を取った値，ということになる．

排他的論理和は結合法則 $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ を満たすので，これを単に $x \oplus y \oplus z$ と書く．排他的論理和を用いて，いずれのプレイヤーがこの局面において必勝戦略を持っているかを判定することができると知られている．

山が k 個あり，石の個数がそれぞれ $n_1, n_2, ..., n_k$ 個ある NIM の局面を，$(n_1, n_2, ..., n_k)$ と表す．

定理 2.1. *NIM* の局面 $(n_1, n_2, ..., n_k)$ において，$n_1 \oplus n_2 \oplus ... \oplus n_k = 0$ のとき，かつそのときに限り，後手に必勝戦略があり，そうでないとき，かつそのときに限り先手に必勝戦略がある．

この定理から，直ちに次の系が得られる．これはこの定理に比べて弱い結果であるが，本研究において意味を持つため紹介する．

系 2.1. 任意の自然数 $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ に対して，*NIM* の局面 $(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k)$ において後手が必勝戦略を持つような自然数 n_k が唯一つ存在する．

また，ゲーム同士の和を定義することもできる．

定義 2.3. ゲーム G とゲーム H に対して，ゲーム $G + H$ を，G と H を並行して並べ，プレイヤーはいずれも片方のゲームにのみ着手できるゲームとする．G と H が両方とも最終局面に到達したとき，ゲームを終了とし，その到達させたプレイヤーの勝ちとする．

例えば，NIM の局面 $(1, 2)$ と $(4, 5)$ の和は $(1, 2, 4, 5)$ である．

ゲームの和の性質は様々なものが知られているが，ここでは次のものだけを紹介する．

定理 2.2. ゲーム G と後手必勝局面であるゲーム H に対して，$G + H$ の必勝者は G の必勝者と変わらない．

このように，最終局面に到達させた方の勝ちとするゲームを正規形のゲームと呼ぶ．正規形のゲームに対する研究は 20 世紀前半の Bouton[5]，Sprague[6]，Grundy[7] などに始まり，今なお様々な結果が見出されている．また，これらの研究は佐藤により邦書 [8] にまとめられている．

一方で，最終局面に到達させた方の負けとするゲームを逆形のゲームと呼ぶ．逆形の不偏ゲームは正規形の不偏ゲームと性質が異なり，より複雑になる．ここでも逆形商と呼ばれる半群を用いた理論などが展開されているが，本稿では性質が単純な逆形の NIM についてのみ述べる．

定理 2.3. 逆形の *NIM* の局面 $(n_1, n_2, ..., n_k)$ について，ある n_i が存在して $n_i > 1$ のとき，$n_1 \oplus n_2 \oplus ... \oplus n_k = 0$, かつそのときに限り後手に必勝戦略があり，任意の n_i に対して $n_i \leq 1$ のとき，$n_1 \oplus n_2 \oplus ... \oplus n_k = 1$, かつそのときに限り，後手に必勝戦略がある．

ここまでは，いずれのプレイヤーも盤面に対して可能な

着手が変わらないゲームを扱った．これらは不偏ゲームと呼ばれる．一方で，囲碁や将棋のように，プレイヤーに応じて可能な着手が変化するゲームも含めた場合，それは非不偏ゲームと呼ばれる．非不偏ゲームの数学的構造に関する理論については，[9], [10], [11] などに詳しい．非不偏ゲームにおいては整数や有理数と同一視できるゲームや，無限小の値を持つゲームなど，様々な興味深い構造が，不偏ゲームの理論を包含する形で登場するが，本稿では 2 人ゲーム，また研究主題として扱う多人数ゲームのいずれについても，プレイヤーに応じて可能な着手が異ならない，不偏のもののみを扱うため深入りしない．

3. 多人数ゲームの先行研究

NIM を 3 人でプレイする場合を考えてみよう．やはり，最後の着手を打ったプレイヤーの勝ちとする．残りが 2 山となったとき，片方の山には 1 つの石，もう片方の山には 2 つの石が残っていたとする．手番のプレイヤーはどのように打つのが最適だろうか．もし彼女が片方の山の石をすべて取れば，次のプレイヤーは残りの山から石をすべて取り勝つことができる．かといって，彼女が石 2 つの山から 1 つだけ石を取れば，3 番手のプレイヤーが勝つことになる．すなわち，1 番手のプレイヤーは勝つ手段がない，一方彼女はほかのいずれのプレイヤーに勝たせるかを決めることができる．このような状況は 2 人プレイでは考えられなかった状況である．先行研究はいくつかの方法を用いてこのような場合でも数学的に解析しようとしている．

Li[1] は多人数ゲームにおいて，順位を定義すれば勝者は一意に定まることを示し，さらにその結果に数学的な構造が見られることを示した．Straffin[2] は McCarthy's Revenge Rule という条件を追加し，あるプレイヤーが，自分が勝てずかつ他のプレイヤーのいずれかに勝たせられるような状況に追い込まれた場合は，自分を追い込んだ相手が負けるように着手するとして，ゲームの結果を分類した．Propp[3] は多人数ゲームを，あるプレイヤーに必勝戦略がある局面と，いずれのプレイヤーにも必勝戦略のない局面に分け，さらにそれらのクラスを分類した．ほかにも様々な観点から多人数ゲームを扱った研究はいくつかあるが，本研究は Li の研究の拡張に当たるため，この研究について詳しく紹介する．

Li の研究においては，ゲームの結果に勝者だけでなく，順位を定める．すなわち，最後に着手したプレイヤーが 1 位となり，さらにその直前のプレイヤーは 2 位，またその前のプレイヤーは 3 位... という具合に，ゲームが終了した時点で全プレイヤーに順位を割り当てる．そしてすべてのプレイヤーは自分の順位が可能な限り高くなるようにプレイすると仮定する．この仮定の下で，ゲームの結果は一意に定まる．また，2 人 NIM において排他的論理和が 0 になることと後手に必勝戦略があることが同値だったように，Li の仮定の下での多人数 NIM も，盤面から整数への (排他的論理和の拡張ともいうべき) 関数を定義して，その関数を用いて，各盤面に対して手番プレイヤーの直前のプレイヤーに必勝戦略があるかどうかを判定することができる．

定義 3.1. 自然数の集合 $S = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$ から自然数への関数 $\oplus_m$ を以下のように定める．

$\oplus_m(S) = \sum_{i=0}^{\infty} \oplus_m(\{n_{1,i}, n_{2,i}, ..., n_{k,i}\}) m^i$

ただし $n_j = \sum_{i=0}^{\infty} n_{j,i} 2^i, n_{j.i} \in \{0, 1\}$

$\oplus_m(\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = (\sum_{i=1}^{k} n_i)\ mod\ m\ (n_i \in \{0, 1\})$

すなわち，これは自然数を 2 進展開したときのビットごとの m を法とする足し算である．よって，この関数 $\oplus_m$ は排他的論理和の拡張であるとも考えられる．

系 3.1. $\oplus_2(\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = n_1 \oplus n_2 \oplus ... \oplus n_k$

定理 3.1. *Li* の順位つき m 人 *NIM* において，局面 $(n_1, n_2, ..., n_k)$ で m 番手プレイヤーが必勝戦略を持つことと，$\oplus_m(\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = 0$ となることは同値である．

Proof. NIM の局面 $g = (n_1, n_2, ..., n_k)$ に対し，$\oplus_m(\{n_1, n_2, ..., n_k\})$ を m 進展開したとき，最上位の桁の値を $\delta(g)$ と定義する．$\oplus_m(\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = 0$ ならば $\delta(g) = 0$ とする．

以下の二つについて示せばよい．A) もし $\delta(g) = 0$ ならば，g から $m-1$ 手以内で移行可能な任意の局面 f に対して $\delta(f) \neq 0$

B) もし $\delta(g) \neq 0$ ならば，g から $m-1$ 手以内で移行可能な局面 f が存在して $\delta(f) = 0$

NIM の局面 j と，j から一手で移行できる局面 k に対して，$\delta(j) \neq 0$ ならば、$\delta(k) \geq \delta(j) - 1$ が成り立ち，$\delta(j) = 0$ ならば $\delta(k) = m - 1$ が成り立つ．ゆえに，A) が成り立つ．

B) については，以下の補題より直ちに示せる．

□

補題 3.1. m を正整数とし，$c_1, c_2, ..., c_k$ を非負整数とする．このとき，以下の条件を満たす非負整数 $d_1, d_2, ..., d_k$ が存在する．

1. 任意の $i = 1, ..., k$ に対して $d_i \leq c_i$．ただし，高々 $m-1$ 個の i に対して $d_i < c_i$

2.$d_i = \sum_{j=0}^{t} d_{i,j} 2^j$ とする．このとき，任意の $u = 1, ..., t$ に対して $\sum_{i=1}^{k} d_{i,u}$ は m で割り切れる．

Proof. $\oplus_m(\{c_1, c_2, ..., c_k\}) = \sum_{i=0}^{\infty} c'_i m^i$ とする．

$c'_j \neq 0$ となるような，最大の j について考える．このとき，少なくとも c'_j 個の i に対して $c_{i,j} = 1$ となる．この条件を満たす $i(1), i(2), ...$ が $m-1$ 個以上あるなら，そのなかから適当に $m-1$ 個の i を取る．それを $c_{i(1)}, c_{i(2)} ...., c_{i(m-1)}$ とする．$c''_{i(1)}, c''_{i(2)}, ..., c''_{i(m-1)}$ を，$c_{i(1)}, c_{i(2)}, ...c_{i(m-1)}$ の 2 進展開 j 桁目を 0 に変えたものとする．$k \leq j$ に対して，$s = m - \sum_{i \notin \{i(1), i(2)...., i(m-1)\}} c_{i,k}$ とする。s を m で割った余り $s\ mod\ m$ を考えると，これは

明らかに $m-1$ 以下なので，$c''_{i(1)}, c''_{i(2)}, ..., c''_{i(m-1)}$ の 2 進展開 k 桁目を適当に変えた整数，$c'''_{i(1)}, c'''_{i(2)}, ..., c'''_{i(m-1)}$ で，$s \ mod \ m = \sum_{i\in\{i(1),i(2)....,i(m-1)\}} c'''_{i,k}$ を満たすものが存在する．これを各桁に対して適用し，最終的に得られた数を $d_{i(1)}, d_{i(2)}, ..., d_{i(m-1)}$ とする．もとの数 $c_1, c_2, ..., c_k$ のうち，$c_{i(1)}, c_{i(2)}...., c_{i(m-1)}$ を $d_{i(1)}, d_{i(2)}, ..., d_{i(m-1)}$ に置き換えれば，求める条件を満たす数列を得られる．最初の条件を満たす $i(1), i(2), ...$ が $m-1$ 個より少ないなら，$j' < j$ について $c'_{j'} \neq 0$ となるような，最大の j' について考え，以下同様に $m-1$ 個得られるまで操作を続ければよい．$m-1$ 個得られなければ，得られたもののみを 0 に変えた数列は明らかに条件を満たす．

□

4. 多人数ゲームと選好順序

本研究では，Li の順位の代わりに，選好順序をゲームのルールに新たに加える．これは，各プレーヤーにおいて，最後の手を着手してほしいプレイヤーの順位付けであり，またプレイヤー同士はお互いの選好順序を把握しているものとする．具体的には，以下のように選好順序を定義する．

定義 4.1. m 人ゲームにおいて，いずれのプレイヤー X も，プレイヤーの集合 $\{A, B, C, ...\}$ に対して，どの順に最終着手者になってほしいかの，プレイヤー上の全順序 $<_{\sigma_X}$ を持つ．あるプレイヤー X に対して，プレイヤー X の次に着手するプレイヤーを $N(X)$，その次に着手するプレイヤーを $N^2(X)$，... として以下同様に定める．また，プレイヤー X の前に着手するプレイヤーを $P(X)$，その前に着手するプレイヤーを $P^2(X)$，... として以下同様に定める．

$N^m(X) = P^m(X) = X$，また $N^{m-i}(X) = P^i(X)$ である．$N^0(X) = X, P^0(X) = X$ とする。

この定義の下で，手番のプレイヤーが A である場合のゲーム G に対する最終着手者 $W(G, A)$ を以下のように定める．

1. ゲーム G が終了局面のとき，$W(G, A) = P(A)$

2. そうでない場合, G の選択肢 G' のなかで, $W(G', N(A))$ が全順序 $<_{\sigma_A}$ の下で最大となる G' に対して，$W(G, A) = W(G', N(A))$

このように定義することで，ゲームのすべての局面は手番のプレイヤーを指定することで，最終着手者を一意に定めることができる．

定義 4.2. 任意のプレイヤー A,$B(A = N^k(B))$ に対して，それぞれの選好順序 $<_{\sigma_A}, <_{\sigma_B}$ が $X <_{\sigma_B} Y \leftrightarrow N^k(X) <_{\sigma_A} N^k(Y)$ を常に満たすならば，その選好順序を対称性のいい選好順序という．対称性のいい選好順序の下でゲームを行うならば，すべてのプレイヤーについて i 番目に勝たせたいプレイヤーが，そのプレイヤーから数えて何番目かは一致する．

このことを利用して，ある対称性のいい選好順序の下でゲームを行うときに，その選好順序の下での任意のプレイヤー A の選好順序 $N^{k_m}(A) <_{\sigma_A} N^{k_{m-1}}(A) <_{\sigma_A} ... <_{\sigma_A} N^{k_1}(A)$ を用いて，$GAMEs(k_1, ..., k_{m-1}, k_m)$ の下でゲームを行うという．

定義 4.3. 対称性のいい選好順序の下でゲーム G を行うときに，プレイヤー A の手番でプレイヤー $N^i(A)$ が最終着手者となるならば，ゲーム G は i-局面であるという．

定理 4.1. $GAMEs(0, 1, ..., m-1)$ において，ゲームの勝者は Li の順位付けのもとでのゲームの 1 位プレイヤーと一致する．

Proof. $GAMEs(0, 1, ..., m-1)$ において，すべてのプレイヤーは自分が勝者になることを第一に目指し，それが叶わないならば自分の次のプレイヤーが勝者となることを目指し，以下同様に自分の次の手番にできるだけ近いプレイヤーが勝者となることを目標にしてプレイする．これは，Li の順位理論において，まず自らが 1 位になることを目指し，叶わないならば自らが 2 位になる (すなわち，次のプレイヤーが 1 位となる) ことを目指し，以下同様に可能な限り高い順位を取ろうとすることと同値である．

□

この場合に限らず，対称性のいい選好順序の下でゲームを行うとき，それは Li の順位理論の単純な変形として現れる．すなわち，最後の着手を行ったものから順に 1 位，2 位と順位を定めるのではなく，ある適当な $\{1, 2, ..., m\}$ から $\{1, 2, ..., m\}$ への全単射 σ を用意して，最後から $\sigma(1)$ 番目に着手したプレイヤーを 1 位，最後から $\sigma(2)$ 番目に着手したプレイヤーを 2 位……最後から $\sigma(m)$ 番目に着手したプレイヤーを m 位というように順位を定めてしまえば，それは $GAMEs(\sigma(1)-1, \sigma(2)-1, ..., \sigma(m)-1)$ の下でゲームを行うことと一致する．

このことは Li も論文で (具体的な研究は行っていないものの)，拡張案の一つとして提示している．しかし，選好順序を定義することは順位理論では扱えないような，対称性を崩した例も扱えるため，本研究では順位定義の変形ではなく，選好順序の採用を行った．

選好順序を用いると，逆形の 2 人ゲームのルールを記述することができる．すなわち，$GAMEs(1, 0)$ の下でゲームを行うことが，逆形のゲームを行うことと一致する．逆形のゲームの定理 2.3 の拡張ともいうべき定理が以下に示せる．

定理 4.2. $GAMEs(i, i+1, ..., m-1, 0, 1, ..., i-1)$ の下で行う m 人 NIM について，$(i-1)$-局面 ($i = 0$ の場合、$(m-1)$-局面) となることの必要十分条件は,

$$\oplus_m(\{n_1, n_2, ..., n_k\}) = \begin{cases} 0(\text{ ある } n_j > 1) \\ i(\text{ 任意の } n_j \leq 1) \end{cases}$$

である．

系 4.1. $i)GAMEs(1,2,0)$ の下で行う 3 人 *NIM* について，0-局面となることの必要十分条件は

$$\oplus_3(\{n_1,n_2,...,n_k\}) = \begin{cases} 0(\text{ある } n_j > 1) \\ 1(\text{任意の } n_j \leq 1) \end{cases}$$

であり，

$ii)GAMEs(2,0,1)$ の下で行う 3 人 *NIM* について，1-局面となることの必要十分条件は

$$\oplus_3(\{n_1,n_2,...,n_k\}) = \begin{cases} 0(\text{ある } n_j > 1) \\ 2(\text{任意の } n_j \leq 1) \end{cases}$$

である．

Proof. 一般の場合の証明は煩雑になるので，系の $i)$ の証明を帰納法を用いて行う．

任意の $n_j \leq 1$ ならば，明らかに $\oplus_3(\{n_1,n_2,...,n_k\}) = 1$ のとき 0-局面である．次に，そうではない場合について考える．

まず，$\oplus_3(\{n_1,n_2,...,n_k\}) \neq 0$ のときを考える．このとき，定理 3.1 の議論から，あるプレイヤー A の着手により $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ を満たす局面 $(n'_1,n'_2,...,n'_k)$ へ移行できるか，プレイヤー A の着手によりある局面 G に移行できて G からプレイヤー $N(A)$ の着手により $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ を満たす局面 $(n'_1,n'_2,...,n'_k)$ へ移行できるかのいずれかが成り立つ．ここで，ある $n'_j > 1$ ならば帰納法の仮定よりこの局面は 0-局面であるから，プレイヤー A はこのいずれかを選ぶ．また，任意の $n'_j \leq 1$ ならば

プレイヤー A がある山の石数を 1 として，$\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ となる場合; プレイヤー A がその山を石数 0 として，さらにプレイヤー $N(A)$ がいずれかの山を石数 0 とすることで $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 1$ となる．

プレイヤー A がある山の石数を 0 として，$\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ となる場合; プレイヤー A がその山を石数 1 とすることで $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 1$ となる．

プレイヤー A がある山の石数を 1 とし，さらにプレイヤー $N(A)$ がいずれかの山の石数を 1 として $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ となる場合; いずれのプレイヤーもその山の石数を 0 とすることで $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 1$ となる．

プレイヤー A がある山の石数を 1 とし，さらにプレイヤー $N(A)$ がいずれかの山の石数を 0 として $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ となる場合; いずれのプレイヤーもその山の石数を 1 とすることで $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 1$ となる．

プレイヤー A がある山の石数を 0 とし，さらにプレイヤー $N(A)$ がいずれかの山の石数を 1 として $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ となる場合; いずれのプレイヤーもその山の石数を 1 とすることで $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 1$ となる．

プレイヤー A がある山の石数を 0 とし，さらにプレイヤー $N(A)$ がいずれかの山の石数を 0 として $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ となる場合; プレイヤー A がその山を 0 とし，プレイヤー $N(A)$ がその山を 1 とすることで $\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 1$ となる．

次に，$\oplus_3(\{n_1,n_2,...,n_k\}) = 0$ のときを考える．プレイヤー A がどのような着手をしても，最終着手者がプレイヤー A となることを示す．石の数が 2 個以上の山の数が十分多いならば，プレイヤー A の着手に対して定理 3.1 の議論が適用できて，プレイヤー $N(A)$ がある選択肢 G へ移行し，プレイヤー $N^2(A)$ が G より，$\oplus_3(\{n'_1,n'_2,...,n'_k\}) = 0$ を満たす局面へ移行する．帰納法の仮定により，最終着手者はプレイヤー A となる．一方で，プレイヤー A の着手により，石の数が 2 個以上の山が 2 つになる場合を考える．それぞれ，n_i, n_j とする．このときは，それ以外の山の石の個数の総和を 3 で割った余りが，

0 ならば，プレイヤー $N(A)$ は n_i の山を 1 とし，プレイヤー $N^2(A)$ は n_j の山を 0 として，帰納法の仮定よりプレイヤー A が最終着手者となる．

1 ならば，プレイヤー $N(A)$ は n_i の山を 0 とし，プレイヤー $N^2(A)$ は n_j の山を 0 として，帰納法の仮定よりプレイヤー A が最終着手者となる．

2 ならば，プレイヤー $N(A)$ は n_i の山を 1 とし，プレイヤー $N^2(A)$ は n_j の山を 1 として，帰納法の仮定よりプレイヤー A が最終着手者となる．

□

Li の結果である定理 3.1，あるいはそれを選好順序で表した定理 4.1 は，この定理において $i = 0$ とおいた場合のものである．すなわち，この結果は Li の結果の拡大とも言える．

一方で，この結果を $m = 2, GAMEs(1,0)$ の場合で考えると，逆形のゲームの必勝者を判定する定理 2.3 が得られる．これは，逆形のゲーム自体が，相手に最終着手を打たせたいゲームであり，それは選好順序を用いて考えると，$GAMEs(1,0)$ として表せるからである．すなわち，この結果は定理 2.3 の多人数版としても自然にとらえられる．

系 2.1 にも，多人数版ともいえる拡張が存在する．それをここで示す．

定理 4.3. $GAMEs(i,i-1,...0,m-1,m-2,...i+1)$ の下で m 人 *NIM* を行うときに，任意の自然数 $n_1,n_2,...,n_{k-1}$ に対して，*NIM* の局面 $(n_1,n_2,...,n_{k-1},n_k)$ が $(i-1)$-局面となるような自然数 n_k が唯一つ存在する．

Proof. 背理法を用いて証明する．定理の主張が成り立たない $(n_1,n_2,...,n_{k-1})$ が存在したとする．このとき，

A)$(n_1,n_2,...,n_{k-1},n_k)$ が $(i-1)$-局面となるような n_k が複数存在する．

B)$(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k)$ が $(i-1)$-局面となるような n_k が一つも存在しない．

のいずれかである．いずれの場合にも矛盾が生じることを示す．

A) の場合，$(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k), (n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n'_k)$ がともに $(i-1)$ 局面となるような自然数 $n_k, n'_k (n_k > n'_k)$ が存在する．このとき，あるプレイヤー A が 1 番手ならば，局面 $(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k)$ において，局面を $(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n'_k)$ と変える着手を選択できる．仮定よりこの局面は $(i-1)$-局面であるから，プレイヤー $N(N^{i-1}(A)) =$ プレイヤー $N^i(A)$ が最終着手者となる．これは，$(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k)$ が $(i-1)$-局面であることと矛盾する．

B) の場合について考える．まず，

$j \in \{0, 1, ..., i-2, i+1, i+2, ..., m-1\}$ に対して，$(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k), (n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n'_k)$ がともに j-局面となるような自然数 $n_k, n'_k (n_k > n'_k)$ が存在しないことを背理法で示す．

もし存在すると仮定すると，プレイヤー A が 1 番手ならば，局面 $(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k)$ において，局面を $(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n'_k)$ と変える着手を選択できる．仮定よりこの局面は j-局面であるから，プレイヤー $N^{j+1}(A)$ が最終着手者となる．これは，$(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k)$ が j-局面であることと矛盾する．

従って，B) の仮定より，無限に多くの n_k に対して $(n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_k)$ が i-局面であるということになる．i-局面からは $(i-1)$-局面に移行する着手が存在する．この着手は $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ のいずれかを変える着手となる (n_k を n'_k に変えて $(i-1)$-局面になるのは仮定より矛盾)．従って，鳩ノ巣原理より，ある n'_1 が存在して，異なる $n'_k, n''_k (n'_k > n''_k)$ に対して $(n'_1, n_2, ..., n_{k-1}, n'_k), (n'_1, n_2, ..., n_{k-1}, n''_k)$ がいずれも $(i-1)$-局面となる．このとき，$(n'_1, n_2, ..., n_{k-1}, n'_k)$ においてプレイヤー A が 1 番手ならば，局面を $(n'_1, n_2, ..., n_{k-1}, n''_k)$ に変える着手を選択できる．この局面が $(i-1)$-局面であるから，プレイヤー $N(N^{i-1}(A)) =$ プレイヤー $N^i(A)$ が勝つことになる．これは，$(n'_1, n_2, ..., n_{k-1}, n'_k)$ が $(i-1)$-局面であることと矛盾する．

□

5. まとめと今後の課題

多人数完全情報ゲームを扱うために，“選好順序” の概念を導入し，このモデルのもとでも完全情報ゲームには興味深い数学的構造があることを示した．本研究は，未だ統一されたモデルを持たない多人数ゲームの研究に関して，一つの指針を与えるものであり，また，多人数ゲームの人工知能作成等においても，応用可能な方法である．

一方，2 人ゲームの場合を思い出してみると，定理 2.2 では任意のゲーム G に対して G と後手必勝のゲーム H の和は，G と同じ必勝者を持つということがあったが，この性質は多人数ゲームに受け継がれていない．例として，局面 $(2, 2, 2)$ を考える．これは，$GAMEs(0, 1, 2)$ において 2-局面である．また，局面 $(1, 3)$ を考えると，これは $GAMEs(0, 1, 2)$ において 1-局面となる．しかし，局面 $(2, 2, 2, 1, 3)$ は 1 番手プレイヤーが $(2, 2, 1, 1, 3)$ とすることができ，$\oplus_3(\{2, 2, 1, 1, 3\}) = 0$ よりこれは 2-局面であるので，$(2, 2, 2, 1, 3)$ は 0-局面である．このように，2 人ゲームの性質が受け継がれていないような側面について，より詳細に分析し，数学的構造の有無についてより詳しく研究することが，今後の課題であると考える．また，3 人ゲームについては，全ての対称性のよい選好順序について何らかの結果を得られたが，4 人以上については調べられていない対称性のよい選好順序が存在する．これらのルールの下でどのような性質が得られるのかも，今後の課題である．

参考文献

[1] N-person Nim and N-person Moore’s Games, S.-Y. Robert Li, Internat. J. Game Theory 7(1978) no. 1, 31-36.

[2] Three Person Winner-Take-All Games with McCarthy’s Revenge Rule, Philip D. Straffin, College J. Math. 16(1985), no.5, 386-394.

[3] Three-player impartial games, James Propp, Theoret. Comput. Sci. 233(2000) no.1-2, 263-278.

[4] Mathematical Go Chilling Gets the Last Point, E.R.Berlekamp, D.Wolfe, CRC Press, 1994.

[5] Nim, a game with a complete mathematical theory, C.L.Bouton, Ann. of Math. 3(1902), 35-39.

[6] Über Mathematische Kampfspiele, R.Sprague, Tôhoku Math. J. 41(1935-1936), 438-444.

[7] Mathematics and Games, P.M.Grundy, Eureka 2(1939), 6-8.

[8] 石取りゲームの数学　ゲームと代数の不思議な関係, 佐藤文広, 数学書房, 2014.

[9] Winning Ways for Your Mathematical Plays: Vol. 1-4, E.R.Berlekamp, J.H.Conway, R.K.Guy, AK Peters, 2001-2004.

[10] 組合せゲーム理論入門-勝利の方程式-, M.H.Albert, R.J.Nowakowski, D.Wolfe(川辺治之訳), 共立出版, 2011.

[11] Combinatorial game theory, A.N.Siegel, American Mathematical Society, 2013.