

Kakarala-Ogunbona の画像分解における 特異値の近接度を低減させるアルゴリズム

近藤 弘^{†1} 笹田 昇平^{†1} 小幡 雅彦^{†2}
岩崎 雅史^{†3} 中村 佳正^{†4,†5}

本論文では非可逆画像圧縮における Kakarala-Ogunbona (KO) の画像分解アルゴリズムを考える。KO 分解では行列の特異値分解 (SVD) を利用した主成分分析が行われ、2 次元離散ウェーブレット変換と同様な多重解像度解析が可能である。左特異ベクトルをフィルタとして利用することが特徴である。一般に特異値の近接度が高いとき、SVD 数値計算アルゴリズムによって特異ベクトルが高精度に求められるとは限らない。本論文では KO 分解における特異値の近接度を低減させるアルゴリズムを提案する。元画像に対してランダム模様のふちどりを追加することで特異値分布を変化させる。数値実験によりその効果を示し、圧縮画像の誤差評価を行う。さらには、フィルタ行列の量子化について議論する。

An Algorithm to Increase Gaps between Singular Values in Kakarala-Ogunbona Image Decomposition

KOICHI KONDO,^{†1} SYOHEI SASADA,^{†1} MASAHIKO OBATA,^{†2}
MASASHI IWASAKI^{†3} and YOSHIMASA NAKAMURA^{†4,†5}

In this paper, the Kakarala-Ogunbona (KO) algorithm for lossy image compression is considered. It is a transformation of multiresolution image decomposition like the two dimensional discrete wavelet transformation, and is based on principal components analysis by singular value decomposition (SVD) for matrices. The point of the KO algorithm is to use left singular vectors as decomposition filters. If any singular values are very close to each other, then existing numerical SVD algorithms may fail to compute accurate singular vectors. In this paper, we propose a modified algorithm of the KO decomposition to increase gaps between singular values. The distribution of singular values are variable by adding random bordering to the original image. We show its efficiency and estimate errors of the compressed images by numerical experiments. Moreover, we discuss a quantization of the filter matrices.

1. はじめに

本論文は非可逆画像圧縮⁷⁾におけるある多重解像度解析の数値計算上の問題点について議論する。画像圧縮アルゴリズムの現在の代表例は JPEG (Joint Photographic Experts Group) である。JPEG は元画像

を離散コサイン変換 (DCT) し、DCT 係数を量子化して情報量を削減する。量子化データをハフマン符号や算術符号による符号化でデータサイズの圧縮を行う。高周波になるほど解像度をより粗く量子化することで多くの情報を削除する。高周波成分は復元画像の画質には強く影響しない。そのため高圧縮、高画質が可能となる。JPEG は画像に対して 1 回のみ分解を行うが、複数回分解を繰り返す手法が提案されている。多重分解の代表例は 2 次元離散ウェーブレット変換 (2DWT) である。基本的な手順は次のとおりである^{1),13)}。画像を 2DWT により等分に 4 分割する。左上に近似画像が現れる。右上に垂直方向、左下に水平方向、右下に対角方向の輪郭画像が現れる。近似画像を繰り返し分解すると多重解像度の低周波成分、高周波成分が現れる。多重分解画像を量子化しエントロピー符号化する

†1 同志社大学
Doshisha University

†2 株式会社 JAL インフォテック
JAL Information Technology Co., Ltd

†3 京都府立大学
Kyoto Prefectural University

†4 京都大学
Kyoto University

†5 科学技術振興機構, SORST
SORST, Japan Science and Technology Agency

ことでデータの圧縮が可能となる．圧縮符号化法としては SPIHT^{(11),(13)} や JPEG2000 の EBCOT⁽¹³⁾ などが提案されている．これらを JPEG と比べると同じ PSNR ならば約 30% から 50% の圧縮率向上がみられる⁽³⁾．ここで、PSNR とはピーク信号対雑音比 (peak signal to noise ratio) のことであり、画質の指標としてよく用いられる．2DWT 以外の画像の多重分解法として、行列の特異値分解 (SVD) を用いた手法が Kakarala-Ogunbona (KO) により提案されている⁽⁵⁾．KO 分解は SVD を利用した主成分分析が行われる．一般に画像に対する主成分分析は Karunen-Loève 変換 (KLT) と呼ばれている⁽¹³⁾．KLT は不規則信号を無相関化する直交変換のことである^{(5),(13)}．入力信号が広義定常な場合、KLT はすべての直交変換のうち符号化利得が最大となる変換であることが示されている⁽¹³⁾．符号化利得とは、変換された信号の量子化誤差を分母とし、元信号を直接量子化したときの量子化誤差を分子とする比のことである．KLT を多重画像度解析として構成したものが KO 分解である．KO 分解では画像を 2DWT と同様に低周波成分と高周波成分に分解する．2DWT で得られる高周波成分は縦、横、斜めの輪郭線であるのに対し、KO 分解の高周波成分は第 2 番目以降の主成分であり、互いに無相関となることが異なる．各分解画像の元画像に対する寄与率は特異値の大きさにより定まる．第 1 主成分の分解画像に対して繰り返し KO 分解することで多重分解画像が得られる．これを量子化し符号化すればデータサイズの圧縮となる．しかし、KO 分解に対する専用の圧縮符号化はまだ提案されていない．そのため 2DWT 用である SPIHT を代用する．この場合においても十分な性能が得られることが報告されている⁽¹⁾．KO 分解専用の圧縮符号化法の開発が求められる．また、KO 分解と 2DWT とを合わせた複合型アルゴリズムの研究も Ashino らにより提案されている⁽¹⁾．

本論文は KO 分解の SVD 計算における問題点について考察する．KO 分解ではまず与えられた画像行列の要素を並べ換えて横長行列に変換する．横長行列を特異値分解し左特異ベクトルを求める．左直交行列がフィルタとして機能する．左直交行列を横長行列にかけた後に元の形に並べ換えて分解画像が得られる．横長行列の特異値分布は画像の種類により大きく異なる．ある画像においては特異値の近接度が高くなることがある．国際標準の線形数値計算ライブラリ LAPACK⁽⁶⁾ で公開されている SVD ルーチンは特異値の近接度が高いとき特異ベクトルを高精度に求められるとは限らない⁽¹²⁾．このとき、KO 分解においては分解

とその逆変換である再構成が精度良く行われない可能性がある．そこで本論文では、特異値相互のギャップを拡大するアルゴリズムを提案する．提案手法では元画像に対してランダム模様のふちどりを追加する．これにより特異値の近接度が低減され SVD ルーチンにおける問題点が回避される．また、数値実験により提案手法の効果を検証する．

本論文の構成は次のとおりである．2 章では Kakarala-Ogunbona の画像分解について解説する．3 章では種々の画像に対する特異値分布を論じる．縦、横、斜め縞模様、および、ランダム模様の画像に関する特異値の分布を調べる．4 章では特異値の近接度を低減させるアルゴリズムを提案する．5 章では提案アルゴリズムの効果を数値実験により示す．6 章では左直交行列の量子化に関する議論を行う．7 章ではまとめを述べる．

2. Kakarala-Ogunbona の画像分解

本章では Kakarala-Ogunbona の画像分解 (KO 分解) を紹介する．画像を縦 M ピクセル、横 N ピクセルの 256 階調グレースケールとすると、画像は $M \times N$ 型行列 $X = (X_{i,j})$ ($i = 0, 1, \dots, M-1; j = 0, 1, \dots, N-1$) で表される．ただし、各成分は $[0, 255]$ の整数値である．まず、行列 $X = (X_{i,j})$ を $b \times b$ 型小ブロック行列に分割する．ただし、 M, N は b で割り切れるとする．各 $b \times b$ 型小ブロックの第 (k, l) 成分をすべて並べて $M' \times N'$ 型ブロック行列 $X^{(k,l)} = (X_{m,n}^{(k,l)})$ ($m = 0, 1, \dots, M'-1; n = 0, 1, \dots, N'-1$) とする．ここで $M' = M/b, N' = N/b$ とおく．このとき X から $X^{(k,l)}$ への変換は $k = 0, 1, \dots, b-1; l = 0, 1, \dots, b-1$ に対して

$$\mathcal{B}^{(k,l)} : X \mapsto X^{(k,l)}; \quad (1)$$

$$X_{m,n}^{(k,l)} = X_{bm+k, bn+l}$$

と表される．ブロック行列 $X^{(k,l)}$ をすべて並べて $M \times N$ 型行列 $Y = (Y_{i,j})$ とする．元の行列 X から Y への変換は

$$\mathcal{B} : X \mapsto Y = (X^{(k,l)})_{0 \leq k, l < b}; \quad (2)$$

$$Y_{M'k+m, N'l+n} = X_{m,n}^{(k,l)} = X_{bm+k, bn+l}$$

である．また、 $M' \times N'$ 型ブロック行列 $X^{(k,l)}$ のすべての要素を並べ換えて $1 \times M'N'$ 型行ベクトル $\mathbf{a}^{(bk+l)} = (a_t^{(bk+l)})$ ($t = 0, 1, \dots, M'N' - 1$) とする．この変換を

$$\mathcal{R} : X^{(k,l)} \mapsto \mathbf{a}^{(bk+l)}; \quad (3)$$

$$a_{N'm+n}^{(bk+l)} = X_{m,n}^{(k,l)}$$

とおく．すべての行ベクトル $\mathbf{a}^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, b^2 - 1$) を縦に積み上げて $b^2 \times M'N'$ 型行列 $A = (A_{s,t})$ とする．このとき Y から A への変換は

$$\mathcal{P}: Y \mapsto A = (\mathbf{a}^{(s)})_{0 \leq s < b^2}; \quad (4)$$

$$A_{bk+l, N'm+n} = a_{N'm+n}^{(bk+l)} = Y_{M'k+m, N'l+n}$$

である．元の行列 X から A への変換は

$$\mathcal{K} = \mathcal{P} \circ \mathcal{B}: X \mapsto A; \quad (5)$$

$$A_{bk+l, N'm+n} = X_{bm+k, bn+l}$$

となる．得られた横長行列 A に対して SVD を行う． A の特異値を $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{b^2-1}$ ($\sigma_s \geq \sigma_{s+1}$), 左特異ベクトルを \mathbf{u}_s ($s = 0, \dots, b^2 - 1$), 右特異ベクトルを \mathbf{v}_t ($t = 0, 1, \dots, M'N' - 1$) とおく．このとき,

$$A = USV^T, \quad (6)$$

$$S = \begin{pmatrix} \Sigma & O \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{b^2-1}),$$

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{b^2-1} \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 & \dots & \mathbf{v}_{M'N'-1} \end{pmatrix}$$

と表される．ただし, U は $b^2 \times b^2$ 型直交行列, V は $M'N' \times M'N'$ 型直交行列, Σ は $b^2 \times b^2$ 型対角行列, S は $b^2 \times M'N'$ 型長方形行列である．得られた左直交行列 U の転置を横長行列 A に左から掛けて

$$\hat{A} = U^T A \quad (7)$$

を求め． \hat{A} は A と同じ型の長方形行列である．得られた \hat{A} は $A = USV^T$ より

$$\hat{A} = SV^T \quad (8)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_0 \mathbf{v}_0 & \sigma_1 \mathbf{v}_1 & \dots & \sigma_{b^2-1} \mathbf{v}_{b^2-1} \end{pmatrix}^T$$

とも表される． \hat{A} を \mathcal{P} と逆の操作で並べ換えて

$$\hat{X} = \mathcal{P}^{-1}(\hat{A})$$

$$= (\sigma_{bk+l} \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_{bk+l}^T))_{0 \leq k, l < b}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_0 \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_0^T) & \dots & \sigma_{b-1} \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_{b-1}^T) \\ \sigma_b \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_b^T) & \dots & \sigma_{2b-1} \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_{2b-1}^T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{b^2-b} \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_{b^2-b}^T) & \dots & \sigma_{b^2-1} \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_{b^2-1}^T) \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる． \hat{X} は複数の $M' \times N'$ 型小ブロック行列 $\sigma_s \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_s^T)$ に分割された行列である．左上のブロック $\sigma_0 \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{v}_0^T)$ は第 1 主成分であり低周波画像となる．残りの $b^2 - 1$ 個のブロック行列は第 2 主成分以降であり高周波画像となる．KO 分解で得られる画像は \hat{X} によって表される．これらの操作をまとめると KO 分解は次のアルゴリズム 1 と定義される．また,

KO 分解の再構成は $X = \mathcal{K}^{-1}(U\mathcal{P}(\hat{X}))$ である．

アルゴリズム 1 (Kakarala-Ogunbona)

Input. 元画像 X .

Output. 分解画像 \hat{X} .

Step 1. $A = \mathcal{K}(X)$ を求める .

Step 2. A の特異値分解 $A = USV^T$ を求める .

Step 3. $\hat{A} = U^T A$ を求める .

Step 4. $\hat{X} = \mathcal{P}^{-1}(\hat{A})$ を求める .

主成分分析の考え方では, データ行列 A の各行は画像 X から生成された見本過程である．見本過程の平均を取り除いたデータ行列 $\bar{A} = A(I - (M'N')^{-1}ee^T)$ に対して, KO 分解を行うとする．ただし, I は $M'N' \times M'N'$ 型単位行列, e は要素がすべて 1 の $M'N' \times 1$ 型行列とする．このとき, A の共分散行列は $\bar{A}\bar{A}^T$ であり, $\hat{A} = U^T \bar{A}$ の共分散行列は $\hat{A}\hat{A}^T$ である． $\hat{A}\hat{A}^T$ は対角行列であるから, \hat{A} の各行が表す見本過程は互いに無相関となる．変換 $\hat{A} = U^T \bar{A}$ は KLT であるといえる．一方, KO 分解 $\hat{A} = U^T A$ では平均を取り除かない．これは第 1 主成分に直流成分を残すためである．

分解画像の低周波画像に対して繰り返し KO 分解を行うと多重分解画像を得る．分解の回数をレベル, j 回目で得られる画像をレベル j の分解画像と呼ぶ．得られた多重分解画像に対して圧縮符号化を行えばデータサイズの圧縮が行われる．圧縮画像を復元する場合は逆の操作を行う．KO 分解専用の圧縮符号化はまだ提案されていない．本論文では圧縮符号化として 2DWT 用の SPIHT¹¹⁾ を用いる¹⁾．2DWT による分解画像は 4 分割画像である．以降, KO 分解において $b = 2$ とする．これらの手順を図 2(c) に示す．

たとえば図 1(a) の画像 Lena を KO 分解する．その際, A の特異値は

$$\sigma_0 = 6.7 \times 10^4, \quad \sigma_1 = 2.7 \times 10^3, \quad (10)$$

$$\sigma_2 = 1.8 \times 10^3, \quad \sigma_3 = 1.0 \times 10^3$$

であり, 左直交行列 U は

$$U = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.581 & 0.404 & -0.500 \\ 0.500 & -0.405 & 0.581 & 0.498 \\ 0.500 & 0.406 & -0.578 & 0.502 \\ 0.500 & -0.579 & -0.406 & -0.500 \end{pmatrix} \quad (11)$$

となる．第 1 列目の左特異ベクトル \mathbf{u}_0 は平均化フィルタ $\sigma_0 \mathbf{v}_0^T = (\mathbf{a}^{(0)} + \dots + \mathbf{a}^{(3)})/2$ として機能する．第 2 列目以降の左特異ベクトルは高周波フィルタとして機能する．分解画像 \hat{X} は図 2(a) であり, 多重分解画像は図 2(b) となる．多重分解画像を圧縮比 1 bpp (bits per pixel) の SPIHT により圧縮符号化すると圧縮デー



図 1 サンプル画像
Fig. 1 Sample images, (a) Lena (512 x 512 pixels), (b) stripe (128 x 128 pixels).

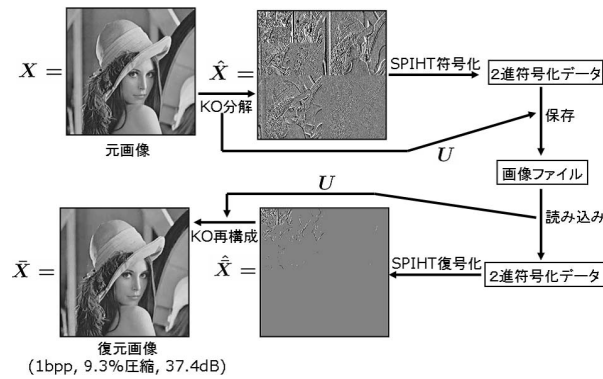
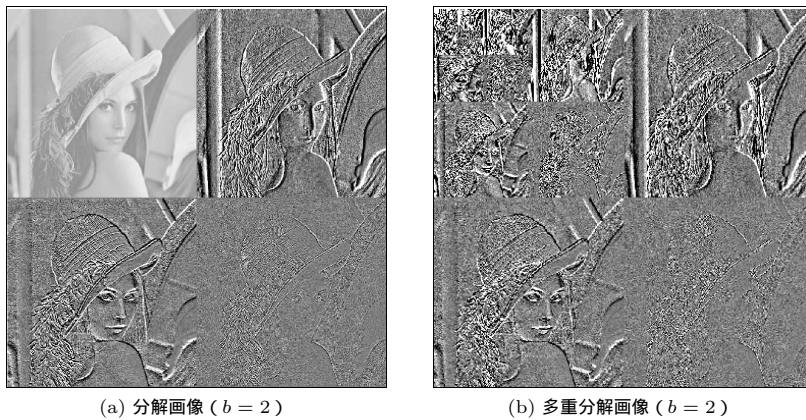


図 2 Kakarala-Ogunbona の画像分解アルゴリズム
Fig. 2 Kakarala-Ogunbona image decomposition algorithm, (a) decomposed image (b = 2), (b) multi decomposed image (b = 2), (c) diagram.

タのサイズは元データに対して 9.3%となる。さらに圧縮データを SPIHT 復号により再構成した復元画像の PSNR は 37.4 dB である。また、他の圧縮比や KO 分解, 2DWT およびそれらの複合型における圧縮性能の

比較は, Ashino らの文献 1) で詳細に検討されている。

3. 特異値の相互最小ギャップ

本章では KO アルゴリズムに含まれる特異値分解

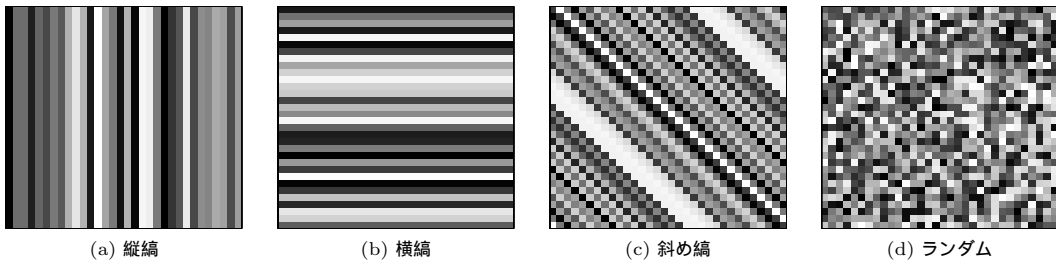


図3 特異値分布実験のサンプル画像 (32 × 32 画素)

Fig. 3 Sample images (32 × 32 pixels) for experiment of minimum gap of singular values, (a) vertical, (b) horizontal, (c) diagonal, (d) random.

(SVD) がにかえる数値計算上の問題点について議論する．横長行列 A の特異値 σ_i ($\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$) の分布は画像行列 X によって大きく異なる．計算機上では特異値の分布によらず正しい特異ベクトルを求めることは難しい．特に LAPACK の SVD ルーチンでは特異値が近接する行列を高精度に SVD できるか定かではない¹²⁾．KO 分解における SVD は AA^T の固有値分解に置き換え可能である．LAPACK には複数の固有値分解ルーチンが公開されているが，固有値分布によらずつねに高精度に固有値分解できる万能ルーチンはない．一般に行列積で生じる誤差を考えると SVD の代わりに AA^T の固有値分解を用いるのは有効ではない．本論文では，KO 分解の SVD 計算において近接または重複特異値の発生を回避するアルゴリズムを提案する．

特異値の近接度を測るため，特異値相互の最小ギャップを

$$g_{\min} = \min_i \frac{|\sigma_i - \sigma_{i+1}|}{255^2 MN/b^2} \quad (12)$$

と定義する．ただし，分母は AA^T の各成分の最大値を 1 とするための規格化定数である．たとえば，図 1(a) の Lena の場合の特異値は式 (10) であるから $g_{\min} = 1.9 \times 10^{-7}$ であり，倍精度計算におけるマシンイプシロン ϵ に比較して十分に大きい．一方，図 1(b) の縞画像の特異値は，

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 2.2 \times 10^4, & \sigma_1 &= 4.1 \times 10^3, \\ \sigma_2 &= 5.2 \times 10^{-11}, & \sigma_3 &= 1.9 \times 10^{-11} \end{aligned} \quad (13)$$

となり，最小ギャップは $g_{\min} = 1.2 \times 10^{-19}$ である．異なる特異値 σ_2, σ_3 は差がほぼ 0 で近接する．このギャップはマシンイプシロン ϵ より小さい．そのため特異値が重複と見なされ，数値安定性が保証できない．対象となる行列から単位行列の定数倍を引く操作である原点シフトを行えば相対ギャップが拡大する．つまり特異値のみならば高精度に得ることは可能で，dqds アルゴリズム⁹⁾ や mdLVs アルゴリズム⁴⁾ が提案され

ている．特異ベクトルも求めたい場合には，LAPACK の DBDSQR や著者の一部らが開発中の I-SVD アルゴリズム⁸⁾ がある．これらのアルゴリズムであっても特異値の近接度が高い行列の特異ベクトルを高精度に求められるとは限らず，計算機上では難しい課題である．いまだ決定的なアルゴリズムは存在しない．

KO 分解における横長行列 A の特異値の近接度は，どのような画像のとき高くなるか詳しくは調べられていない．そこで，特異値の近接度が高い画像の種類を調べる．図 3 のような (a) 縦縞，(b) 横縞，(c) 斜め縞，(d) ランダム模様の 4 種類の 32 × 32 画素の画像を考える．色は整数値 $[0, 255]$ でランダムに変化させ，それぞれ 10,000 個の画像を考える．この画像をそれぞれ画像行列 X とし， 4×256 型横長行列 A の特異値の相互最小ギャップ g_{\min} の分布を調べる．図 4 にその結果を示す．横軸は画像番号であり，縦軸は g_{\min} である．ただし，データは g_{\min} の小さい順にソートされている．実験は MATLAB 7.0.4 を使用し，特異値分解には組み込み関数 `svd` を用いる．計算は倍精度で行う．図 4 によると，(a) 縦縞，(b) 横縞模様では g_{\min} は $O(10^{-20})$ 程度であり，マシンイプシロン ϵ より小さい値を示す．きわめて近接している状態である．一方，(c) 斜め縞模様，(d) ランダム模様では $O(10^{-6})$ 程度である．単精度の有効桁数程度であり，倍精度計算においては十分に大きなギャップである．ランダムな画像に近づくほど特異値の近接度は低くなることが予想される．また，LAPACK の倍精度用 SVD ルーチンにおいて特異値の相互ギャップがある程度大きいならば，特異ベクトルの直交性は保たれる傾向がある¹²⁾．この結果，KO 分解においては画像はランダム模様に近い方が精度が良くなると期待される．

4. 特異値の近接度を低減させるアルゴリズム

本章では特異値の近接度を低減させるアルゴリズムを提案する．3 章の結果よりランダムな画像ほど特異

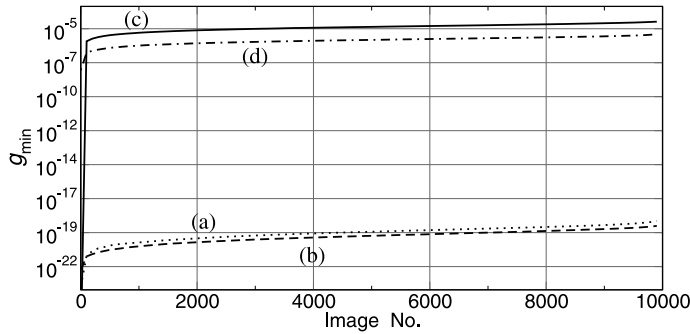


図 4 KO 分解における横長行列 A の特異値相互の最小ギャップ g_{\min} の分布, (a) 縦縞, (b) 横縞, (c) 斜め縞, (d) ランダム

Fig. 4 Minimum gaps of singular values of A in KO algorithm, (a) vertical, (b) horizontal, (c) diagonal, (d) random images.

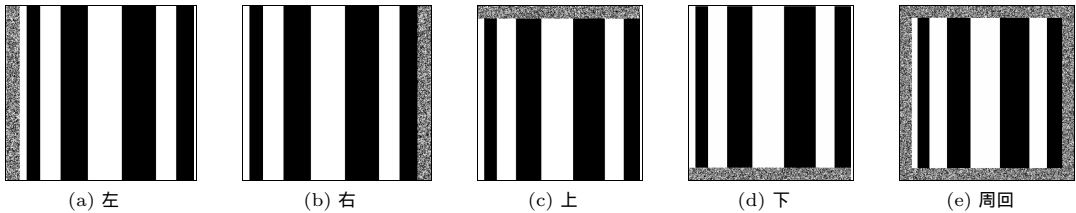


図 5 ふちどり方法の種類

Fig. 5 Five types of random bordering, (a) left, (b) right, (c) top, (d) bottom, (e) round.

値の近接度は低くなる。これより、画像行列 X の左側に幅が 2 画素のランダム模様のふちを追加した画像 (図 5 (a)) を考える。ふちどり画像を

$$\tilde{X} = \left(\begin{array}{cc|c} h_0 & h_M & X \\ \vdots & \vdots & \\ h_{M-1} & h_{2M-1} & \end{array} \right) = (H | X) \quad (14)$$

と表す。成分 h_k は $[0, 255]$ のランダムな整数とする。 \tilde{X} を横長行列 $\tilde{A} = \mathcal{K}(\tilde{X})$ に変換する。このとき、

$$\tilde{A}\tilde{A}^T = HH^T + AA^T \quad (15)$$

となる。 AA^T は $b^2 \times b^2$ 型正方行列であり固有値は σ_s^2 ($s = 0, 1, \dots, b^2 - 1$) である。また、 HH^T の固有値分布はランダムに定まるため、 $\tilde{A}\tilde{A}^T$ の固有値分布は AA^T とは大きく異なる。ふちどり画像 H により \tilde{A} の特異値の相互最小ギャップ g_{\min} を大きく選ぶことが可能となる。このとき、 \tilde{A} の特異ベクトルも変化し、計算機上では A の特異ベクトルよりも優れた直交性を持つことが期待できる。 \tilde{A} の左直交行列 \tilde{U} をフィルタ行列として利用する。 \tilde{U} を元画像 X の横長行列 $A = \mathcal{K}(X)$ にかけて変換データ $\hat{A} = \tilde{U}^T A$ とし、並べ換えて分解画像 $\hat{X} = \mathcal{P}^{-1}(\hat{A})$ を求める。この分解画像 \hat{X} を得る計算過程において数値計算上の問題は起こらない。また、 \tilde{U} と U との差が圧縮画像

へ与える影響は 5 章の数値実験により議論する。さらには、ふちどりの位置を図 5 の (b) 右側, (c) 上側, (d) 下側, (e) 周回とした場合でも式 (15) が成り立つ。ふちどり方法には 5 種類が考えられる。以上より、高い近接度を回避する手法として次のアルゴリズム 2 を提案する。また、アルゴリズムの模式図を図 6 に示す。

アルゴリズム 2 (提案手法)

Input. 元画像 X .

Output. 分解画像 \hat{X} .

Step 1. X よりふちどり画像 \tilde{X} を求める .

Step 2. $A = \mathcal{K}(X)$, $\tilde{A} = \mathcal{K}(\tilde{X})$ を求める .

Step 3. \tilde{A} の特異値分解 $\tilde{A} = \tilde{U}\tilde{S}\tilde{V}^T$ を求める .

Step 4. $\hat{A} = \tilde{U}^T A$ を求める .

Step 5. $\hat{X} = \mathcal{P}^{-1}(\hat{A})$ を求める .

5. 数値実験

本章では提案アルゴリズムを数値実験により評価する。ランダム模様のふちどり方法は図 5 の (a) 左, (b) 右, (c) 上, (d) 下, (e) 周回の 5 種類とし、これを比較する。また、4 章ではふちどりの幅を 2 画素としたが、ふちどり幅を ℓ 画素とし変化させ比較を行う。実験は MATLAB 7.0.4 を使用し、計算は倍精度で行う。まず、特異値の近接度の低減実験を行う。図 3 に示

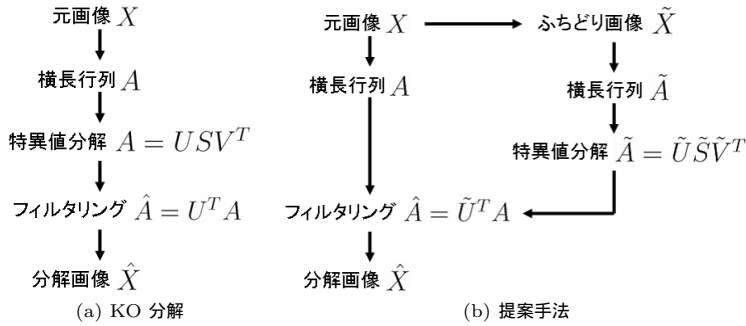


図 6 アルゴリズムの模式図

Fig. 6 Diagrams of (a) KO algorithm, and (b) proposed algorithm.

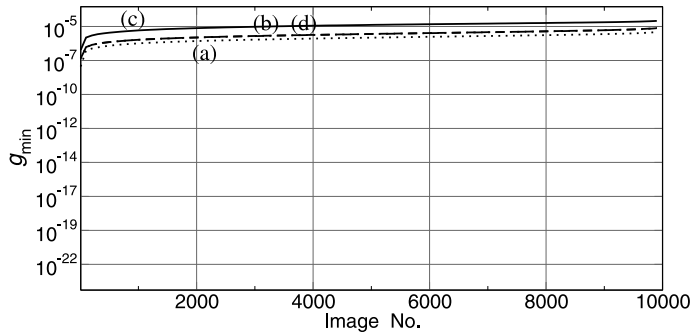


図 7 提案手法 (周回, $\ell = 2$) における横長行列 \tilde{A} の特異値相互の最小ギャップ g_{\min} の分布, (a) 縦縞, (b) 横縞, (c) 斜め縞, (d) ランダム

Fig. 7 Minimum gaps of singular values of \tilde{A} in proposed algorithm (round type, $\ell = 2$), (a) vertical, (b) horizontal, (c) diagonal, (d) random images.

す 4 種類の 32×32 画素画像を対象とし, 3 章と同様にそれぞれ 10,000 個の画像を考える. SVD ルーチンには組み込み関数 `svd` を用いる. 提案手法における 4×256 型横長行列 \tilde{A} の特異値の相互最小ギャップ g_{\min} の分布を図 7 に示す. この図は, ふちどり位置が周回で幅が $\ell = 2$ の場合の結果である. 他のふちどり位置やふちどり幅においても同様の結果を得る. (a) 縦縞, (b) 横縞模様の g_{\min} は, ふちがない従来法では図 4 で示すように $O(10^{-20})$ 程度であるが, 提案手法では図 7 のように $O(10^{-6})$ 程度に大きくなる. 特異値の近接度の低減に成功している. 一方, もともと近接度が低い (c) 斜め縞, (d) ランダム模様では g_{\min} の目立った変化は確認できない. よって, 特異値の近接度が高い場合ではその近接度は低減され, もともと低い場合では近接度の変化がほとんどない, という結果を得る.

次に, 多重分解における特異値の近接度の低減実験を行う. 図 1 (b) の近接度が高い画像に対して多重分解を 6 レベルまで行う. この結果を表 1 に示す. この実験では A の SVD を固有値分解 $AA^T = UDU^T$ に置き換

えた場合でも行う. ただし, $D = \text{diag}(\sigma_0^2, \dots, \sigma_{b^2-1}^2)$ であり, U は A の左直交行列である. 固有値分解ルーチンには MATLAB の組み込み関数 `eig` と, 最近注目を集めている MRRR²⁾ 法に基づき作成された LAPACK 3.1.0 の DSTEMR と, 文献 10) のヤコビ法 `jacobi` を用いる. 表 1 に示すように KO 分解における最小ギャップ g_{\min} は, `svd` のとき $O(10^{-19})$ 程度でありきわめて近接している. 一方, `eig`, `DSTEMR`, `jacobi` のときは $O(10^{-13})$ 程度である. `svd` の結果とは異なる. これは, 誤差の違いによると考えられる. A はきわめて横に長い行列である. そのため, AA^T の計算における各行同士の内積計算において情報落ちが発生していると考えられる. これらの異なる精度のもと提案手法では, すべてのルーチンのすべての分解レベルにおいて, 最小ギャップ g_{\min} は $O(10^{-7})$ 程度に拡大している. SVD ルーチンの違いによらず, 多重分解における近接度の低減に成功している. また, 他のふちどり位置やふちどり幅においても同様の結果を得る.

最小ギャップ g_{\min} が拡大されたことでふちどり画

表 1 多重分解における特異値の近接度 g_{\min} の変化 (縞画像, 周回, $\ell = 2$)
 Table 1 Minimum gaps g_{\min} in multi decomposition (stripe, round, $\ell = 2$).

	svd		eig		DSTEMR		jacobi	
	KO 分解	提案手法	KO 分解	提案手法	KO 分解	提案手法	KO 分解	提案手法
level-1	1.2×10^{-19}	2.9×10^{-7}	6.4×10^{-14}	1.7×10^{-7}	3.8×10^{-13}	4.2×10^{-7}	1.1×10^{-13}	2.2×10^{-7}
level-2	7.3×10^{-20}	1.1×10^{-6}	3.7×10^{-13}	1.0×10^{-6}	2.4×10^{-13}	2.7×10^{-6}	1.3×10^{-13}	1.0×10^{-6}
level-3	5.0×10^{-19}	2.4×10^{-6}	1.2×10^{-12}	6.2×10^{-6}	9.4×10^{-13}	1.1×10^{-5}	2.2×10^{-12}	6.3×10^{-6}
level-4	4.4×10^{-19}	1.5×10^{-5}	1.3×10^{-11}	3.4×10^{-5}	2.1×10^{-12}	2.0×10^{-5}	4.6×10^{-11}	1.4×10^{-6}
level-5	5.6×10^{-19}	1.2×10^{-4}	6.1×10^{-11}	4.8×10^{-5}	5.5×10^{-10}	7.5×10^{-5}	5.5×10^{-11}	9.8×10^{-5}
level-6	4.5×10^{-18}	4.0×10^{-4}	3.8×10^{-11}	3.6×10^{-4}	4.0×10^{-11}	4.4×10^{-4}	1.3×10^{-10}	4.7×10^{-4}

表 2 PSNR の変化量 (49.3 dB, 縞画像)

Table 2 Increase/decrease of PSNR (49.3 dB, stripe).

		svd	eig	DSTEMR	jacobi
左	$\ell = 2$	+0.1	+0.5	+0.5	+0.2
	$\ell = 4$	+0.7	+0.7	+0.7	+0.2
	$\ell = 10$	+1.7	0	+0.1	+0.1
	$\ell = 20$	+1.2	0	+0.9	-0.4
右	$\ell = 2$	+0.2	+0.3	+0.7	+0.4
	$\ell = 4$	+0.7	+0.8	+0.4	+0.5
	$\ell = 10$	+0.4	+0.2	+0.7	+0.8
	$\ell = 20$	+0.2	-1.0	+0.9	+1.5
上	$\ell = 2$	+0.3	+0.2	+0.5	+0.5
	$\ell = 4$	+0.1	+0.5	+0.3	+0.6
	$\ell = 10$	+1.5	+0.1	-0.5	-0.1
	$\ell = 20$	-0.3	+0.4	+1.7	+0.6
下	$\ell = 2$	+0.2	+0.5	+0.5	+0.6
	$\ell = 4$	+0.6	+0.7	+0.4	0
	$\ell = 10$	-0.3	-0.6	-0.1	+0.4
	$\ell = 20$	+0.2	+0.8	+1.3	+1.1
周回	$\ell = 2$	-0.1	+0.1	+0.2	+0.5
	$\ell = 4$	+0.1	+0.1	+0.2	+0.3
	$\ell = 10$	+0.2	+0.3	+1.3	+1.6
	$\ell = 20$	+0.8	-0.1	+0.3	0

表 3 PSNR の変化量 (37.4 dB, Lena)

Table 3 Increase/decrease of PSNR (37.4 dB, Lena).

		eig	DSTEMR	jacobi
左	$\ell = 2$	0	0	0
	$\ell = 4$	0	0	0
	$\ell = 10$	0	0	0
	$\ell = 20$	0	0	0
右	$\ell = 2$	0	0	0
	$\ell = 4$	0	0	0
	$\ell = 10$	0	0	0
	$\ell = 20$	0	0	0
上	$\ell = 2$	0	0	0
	$\ell = 4$	0	0	0
	$\ell = 10$	0	0	0
	$\ell = 20$	-0.1	0	0
下	$\ell = 2$	0	0	0
	$\ell = 4$	0	0	0
	$\ell = 10$	0	0	0
	$\ell = 20$	0	0	0
周回	$\ell = 2$	0	0	0
	$\ell = 4$	0	0	0
	$\ell = 10$	0	0	0
	$\ell = 20$	-0.2	0	0

像に対するフィルタ行列 \tilde{U} は精度良く得られる。反面、圧縮画像の精度に関しては悪化が懸念される。次の実験では、提案手法で生成される圧縮画像がふちをつけない場合の KO 分解で得られるものと比べて画質劣化がみられるかどうかを調べる。SPIHT の圧縮比は 1 bpp とする。特異値の近接度の高い画像である図 1 (b) を実験対象とする。SVD ルーチンには svd, eig, DSTEMR, jacobi を用いる。ふちをつけない場合の圧縮画像の PSNR は、すべての SVD ルーチンで 49.3 dB である。ここで、元画像を X , 圧縮画像を \tilde{X} とすると PSNR は

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{255^2 MN}{\|\tilde{X} - X\|^2} \quad [\text{dB}] \quad (16)$$

と定義される。ただし、ノルム $\|\cdot\|$ はフロベニウスノルムである。ふちがない場合の PSNR から提案手法の PSNR への変化量を調べる。実験の結果、ランダムにふちどり模様を生成するごとに、PSNR の変化量は -2 dB から +2 dB 程度の間であった。そのため、ふ

ちどり模様を 10 個生成し PSNR が最良のものを選ぶことにする。ふちどり位置、ふちどり幅 ℓ を変化させて比較をする。結果を表 2 に示す。最良の PSNR は -1.0 dB から +1.7 dB の間であり悪影響はきわめて小さく、良くなる場合も多い。また、SVD ルーチン、ふちどり位置、ふちどり幅による差はほとんどみられない。以上より、本提案手法は 10 個程度ランダム模様のふちどりを再生成することで、画質劣化の影響を小さくすることが可能である。次に近接度が低い一般的な画像である図 1 (a) を対象とする。提案手法は近接度が低い場合に適用する必要はないが、仮に適用した場合の影響を調べる。図 1 (a) の画素数は 512×512 であり、 V の型は $2^{16} \times 2^{16}$ となる。そのため svd はメモリアオーバーとなり使用できない。実験には eig, DSTEMR, jacobi のみを用いる。結果を表 3 に示す。ふちどりによる影響はほぼない。

以上の結果より、提案手法は高い近接度を低減させるアルゴリズムであり、近接度の高低にかかわらず圧

表 4 U の型変換における PSNR (Lena)
Table 4 PSNR in quantized U (Lena).

	0.5 bpp	1.0 bpp	1.5 bpp
double	33.47 dB	37.42 dB	40.20 dB
float	33.47 dB	37.42 dB	40.20 dB
int64	33.47 dB	37.42 dB	40.20 dB
int32	33.47 dB	37.42 dB	40.20 dB
int16	33.47 dB	37.41 dB	40.20 dB
int8	29.23 dB	30.31 dB	30.72 dB

縮画像への悪影響は小さいと結論される。また、ふちどり位置やふちどり幅による違いはみられない。

6. フィルタの量子化に関する誤差評価

本章ではフィルタ行列 U の量子化誤差について議論する。 U は画像の復号化の際に再構成フィルタとして使用するため、圧縮データとともに保存する必要がある(図 2(c))。そのため U の各要素に必要なバイト数は小さい方が望ましい。本論文の 5 章までの計算は倍精度浮動小数点型 (double 型, 8 バイト) で計算している。画像の再構成の際に U を double 型から単精度浮動小数点型 (float 型, 4 バイト) と 4 つの整数型 (int64, int32, int16, int8, それぞれ 8, 4, 2, 1 バイト) にそれぞれ型変換し量子化する。このとき圧縮画像に関する誤差評価を行う。実験には図 1(a) の画像を用いる。結果を表 4 に示す。double, float, int64, int32, int16 の PSNR は同一の値である。一方, int8 では PSNR が 4 dB から 10 dB 程度低下する。よって, フィルタ係数 U を整数型 2 バイト (int16) に型変換することで PSNR を低下させることなく U のバイト数を 25% にすることが可能である。またこれは, U の精度は少なくとも 2 バイトあればよいことを示している。通常, 画像処理チップの浮動小数点演算は単精度のみで実行される。KO 分解の計算をすべて単精度で行う場合は, この精度が要求条件となる。今後の研究の達成目標となる。

7. ま と め

KO 分解における特異値の近接度を低減させる方法として, 本論文では元画像にランダム模様のふちどりを付け加えるアルゴリズムを提案した。数値実験により特異値相互の最小ギャップが拡大されることを示した。もし特異値分布に強いクラスタがあっても特異値相互の近接度を低減させる結果, クラスタの密集度を下げることができる。また, 提案アルゴリズムは画像の近接度の高低にかかわらず, 圧縮画像の画質劣化がないことを示した。また, 本論文では画像全体を KO 分解し圧縮符号化を行った。画像を分割しブロックご

とに圧縮符号化をする方法も課題として考えられる。サイズの大きな自然画像におけるあるブロックでは, 本論文で議論した編画像のような模式的な画像が現れる可能性がある。このとき本提案手法は有効に働くと考えられる。

本論文の最後では, フィルタ行列を整数型 2 バイトに型変換することでヘッダ部分に使用するフィルタ係数のデータサイズを 25% に圧縮可能であることを示した。発展課題としては, チップ化のための単精度計算の誤差評価がある。このとき U の精度は 2 バイト以上確保することが要求条件となる。

謝辞 画像圧縮に関してご助言いただきました大阪教育大学の芦野隆一氏と守本晃氏に感謝いたします。数値実験に関してご協力いただきました京都大学の木村欣司氏, 坪井洋明氏に感謝いたします。本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金 (若手研究 (B)), 課題番号 17740055 および若手研究 (B), 課題番号 16740065) によるものである。

参 考 文 献

- 1) Ashino, R., Morimoto, A., Nagase, M. and Vaillancourt, R.: Image compression with multiresolution singular value decomposition and other methods, *Math. Comput. Model.*, Vol.10, pp.773-790 (2005).
- 2) Dhillon, I. and Parlett, B.: Multiple representations to compute orthogonal eigenvectors of symmetric tridiagonal matrices, *Lin. Alg. Appl.*, Vol.387, pp.1-28 (2004).
- 3) 福原隆浩: JPEG2000 詳細解説, CQ 出版 (2004).
- 4) Iwasaki, M. and Nakamura, Y.: Accurate computation of singular values in terms of shifted integrable schemes, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.23, pp.239-259 (2006).
- 5) Kakarala, R. and Ogunbona, O.P.: Signal analysis using a multiresolution form of the singular value decomposition, *IEEE Trans. Image Process.*, Vol.10, pp.724-735 (2001).
- 6) LAPACK. <http://www.netlib.org/lapack/>
- 7) 越 智宏, 黒田秀夫: JPEG & MPEG 図解でわかる画像圧縮技術, 日本実業出版社 (2006).
- 8) 中村佳正: 可積分系の機能数理論, 共立出版 (2006).
- 9) Parlett, B.N. and Marques, O.A.: An implementation of the dqds algorithm (positive case), *Lin. Alg. Appl.*, Vol.309, pp.217-259 (2000).
- 10) Press, W.H.: Numerical Recipes in C, 日本語版, 技術評論社 (1993).

- 11) Said, A. and Pearlman, A.W.: A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees, *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, Vol.6, pp.243–250 (1996).
- 12) 高田雅美, 木村欣司, 岩崎雅史, 中村佳正: 高速特異値分解のためのライブラリ開発, 情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム, Vol.47, No.SIG7 (ACS14), pp.91–104 (2006).
- 13) Taubman, D.S. and Marcellin, M.W.: *JPEG2000, Image Compression Fundamentals, Standards and Practice*, Kluwer Academic Publishers (2002).

(平成 18 年 10 月 10 日受付)

(平成 19 年 1 月 2 日採録)



近藤 弘一 (正会員)

昭和 48 年生。平成 9 年同志社大学大学院工学研究科博士課程 (前期課程) 修了。平成 11 年大阪大学大学院基礎工学研究科助手。博士 (工学) を同大学より取得。平成 14 年より同志社大学工学部専任講師。ソリトン理論に基づく非線形可積分系の数理構造とその応用に関する研究に従事。日本応用数理学会, 日本数学会, 日本物理学会, SIAM 各会員。



笹田 昇平

昭和 57 年生。平成 18 年同志社大学工学部電気工学科卒業。学士 (工学) を同大学より取得。平成 18 年より同志社大学大学院工学研究科修士課程在学。特異値分解による画像処理に関する研究に従事。



小幡 雅彦

昭和 57 年生。平成 18 年京都大学工学部情報学科卒業。学士 (工学) を同大学より取得。平成 18 年より (株) JAL インフォテック勤務。卒業研究において画像分解における特異値分解に関する研究に従事。現在は日本航空の予約システムの開発, 維持管理に従事。



岩崎 雅史 (正会員)

昭和 49 年生。平成 16 年京都大学大学院情報学研究所博士後期課程修了。博士 (情報学) を同大学より取得。平成 16 年独立行政法人科学技術振興機構戦略的創造研究推進事業の委嘱研究員。平成 19 年より京都府立大学人間環境学部准教授。線形数値計算, 微分方程式の漸近解析に関する研究に従事。日本数学会, 日本応用数理学会各会員。



中村 佳正 (正会員)

昭和 30 年生。昭和 58 年京都大学大学院工学研究科博士課程修了。工学博士を同大学より取得。平成 6 年同志社大学工学部教授。平成 8 年大阪大学大学院基礎工学研究科教授。平成 13 年より京都大学大学院情報学研究所教授。応用可積分系, 計算数学の研究に従事。著書『可積分系の機能数理』(2006) 等。日本応用数理学会, 日本数学会, SIAM 各会員。