

陽的 B-spline 関数を用いた方向角パラメータ曲線

吉田 雄一† 斎藤 隆文‡ 吉田 典正§

東京農工大学 工学部情報工学科†
 東京農工大学大学院 生物システム応用科学府‡
 日本大学 生産工学部§

1. はじめに

意匠設計の高度化により、美しい曲線、曲面の需要が高まっている。また曲線、曲面の美的品質には曲率変化が大きく影響することが知られている[2]。しかしながら、現状では曲線の曲率制御が難しく、デザインの効率化を妨げているという問題がある。

一般的なデザイン CAD で用いられる曲線生成手法は、Bézier 曲線や B-spline 曲線といった曲線上の点位置を制御する手法である。曲線の形状を制御することは容易であるが曲率については、式が複雑となり制御が難しい。

一方で曲率から曲線を定義する手法として対数美的曲線がある[3,4]。これは曲率変化に優れた曲線を得ることが容易である。しかし、曲率についての制約が厳しく、位置制御の柔軟さには欠ける。

また位置制御と曲率制御を両立した平面曲線表現として斎藤らによる方向角パラメータ曲線(TAP 曲線)が提案されている[1]。この手法は、方向角 θ をパラメータとして、曲率半径 $\rho(\theta)$ を表した曲線である。例として Bernstein 多項式に基づいた Bézier-TAP 曲線を提案している。

本研究では、方向角パラメータ曲線を陽的 B-spline 関数を用いて構築する手法を提案し、曲率制御の自由度の向上を図るとともに、その性質について解析を行う。

2. パラメトリック曲線

パラメトリック曲線は $x = f(t), y = f(t)$ といったように、パラメータ表現によって表される曲線である。

Bézier 曲線は制御点を与えることで表現される曲線である。 $n + 1$ 個の制御点を与えると n 次の曲線となる。制御点を $P_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 、パラメータを t とすると、 n 次のベジエ曲線は(1)式で表される。 $B_j^n(\tau)$ は Bernstein 基底関数である。

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \tag{1}$$

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j$$

また B-spline 曲線はベジエ曲線同様、複数の制御点から定義されるパラメトリック曲線である。 n 次の B-spline 曲線は(2)式で定義される。

$$P(t) = \sum_{i=0}^{m-n-2} P_i b_{i,n}(t), t \in [t_n, t_{m-n-1}] \tag{2}$$

$$b_{j,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$b_{j,n}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+n} - t_j} b_{j,n-1}(t) + \frac{t_{j+n+1} - t}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} b_{j+1,n-1}(t)$$

ここで、 $b_{j,n}(t)$ は B-spline 基底関数であり、 t_j はノット(knot)と呼ばれる m 個の実数である。B-spline 曲線はベジエ曲線に比べ、局所的な曲線制御が可能である。

3. 斎藤らによる方向角パラメータ曲線

TAP 曲線は曲率半径を方向角 θ の関数 $\rho(\theta)$ として表した曲線である。方向角とは曲線の接線ベクトルの方向を x 軸正方向からの回転角で表したものである。 i を虚数単位としたとき、TAP 曲線上の点は複素平面において(3)式で表される。

$$P(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \rho(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi + P_0 \tag{3}$$

ここで、 P_0, θ_0 はそれぞれ、始点の位置と方向角である。また曲率半径を規定する関数 $\rho(\theta)$ を TAP 関数と呼ぶ。

TAP 関数を Bernstein 多項式で表したものを Bézier-TAP 曲線と呼ぶ。両端点での方向角 θ_0, θ_1 であるような n 次 Bézier-TAP 曲線の TAP 関数は $n + 1$ 個の制御曲率半径 $\rho_j (j = 0, 1, \dots, n)$ を用いて(4)式のように表される。

$$\rho(\theta) = \sum_{j=0}^n B_j^n(\tau) \rho_j \tag{4}$$

$$\tau = \frac{\theta - \theta_0}{2\theta_H}, \theta_H = \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}$$

Tangential Angle Parameterization Curve using explicit B-spline function

Yuichi YOSHIDA†, Takafumi SAITO‡, Norimasa YOSHIDA§

†Department of Computer and Information Sciences, Tokyo University of Agriculture and Technology

‡Graduate School of Bio-Applications and Systems

Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology

§College of Industrial Technology, Nihon University

Bézier-TAP 曲線の点位置は(1)式に(4)式を代入することで求められる。このとき、点位置の式は closed-form で求められ、数値積分を必要としない。Bézier-TAP 曲線は曲率半径が与えられるため、曲率を操作することが容易であるが、次数によっては端点で曲率が急激に変化する曲線は生成しにくいという問題点がある。

4. 陽的 B-spline 関数を用いた TAP 曲線

本研究の提案手法は TAP 関数に陽的 B-spline 関数を用いて TAP 曲線を構築する。このときの TAP 関数は(5)式で表される。また陽的 B-spline 関数の曲線セグメント数を $L(L = m - 2n - 1)$ と表す。

$$\rho(\theta) = \sum_{i=0}^{m-n-2} \rho_i b_{i,n}(\tau) \quad (5)$$

$$\tau = t_n + \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} (t_{m-n-1} - t_n)$$

方向角 θ のときの陽的 B-spline 関数の曲線セグメントの位置を b ($b = 0, 1, \dots, L - 1$)、陽的 B-spline 関数の各セグメントの始点、終点での方向角をそれぞれ θ_s, θ_e とする。

$$\theta_s = \frac{t_{n+a}}{t_{m-n-1}} (\theta_1 - \theta_0) + \theta_0$$

$$\theta_e = \frac{t_{n+a+1}}{t_{m-n-1}} (\theta_1 - \theta_0) + \theta_0 \quad (6)$$

$$a = 0, 1, \dots, b - 1$$

陽的 B-spline 関数を TAP 関数とした TAP 曲線の点位置は複素平面上で(7)式で計算できる。

$$P = \left[\sum_{k=0}^n \rho^{(k)}(\varphi) (-i^{k+1}) e^{i\varphi} \right]_{\frac{t_{n+b}}{t_{m-n-1}} (\theta_1 - \theta_0) + \theta_0}^{\theta} \quad (7)$$

$$+ \sum_{a=0}^{b-1} \left[\sum_{k=0}^n \rho^{(k)}(\varphi) (-i^{k+1}) e^{i\varphi} \right]_{\theta_s}^{\theta_e} + P_0$$

ここで、 $\rho^{(k)}(\theta)$ は TAP 関数 $\rho(\theta)$ の k 階微分であり(8)式で定義される。

$$\rho^{(k)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-n-2} \frac{d^k b_{i,n}}{dt^k}(\tau) \rho_i$$

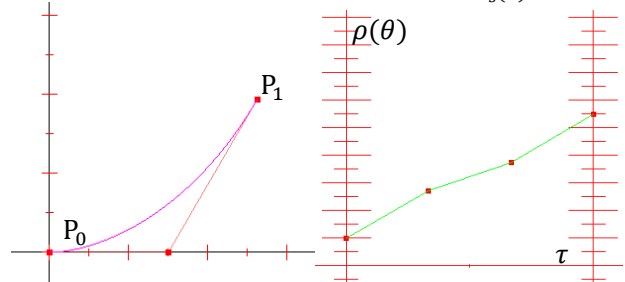
$$\frac{d^k b_{i,n}(\tau)}{d\theta^k} = \left(\frac{t_{m-n-1} - t_n}{2\theta_H} \right)^k \left(\frac{kb^{(k-1)}_{i,n-1}(t) + (t - t_i)b^{(k)}_{i,n-1}(t)}{t_{i+n} - t_i} \right) \quad (8)$$

$$+ \frac{(t_{i+n+1} - t)b^{(k)}_{i+1,n-1}(t) - kb^{(k-1)}_{i+1,n-1}(t)}{t_{i+n+1} - t_{i+1}}$$

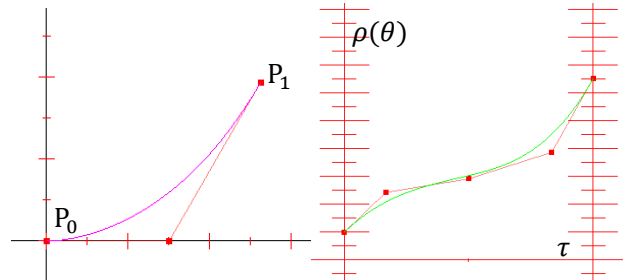
図 1 に示すのは 1 次と 3 次の陽的 B-spline 関数を用いた TAP 曲線とその TAP 関数である。

続いて曲線の両端点の補間を考える。両端点の変位を表す弦ベクトル C は(9)式で表される。

$$C = \sum_{a=0}^{L-1} \left[\sum_{k=0}^n \rho^{(k)}(\varphi) (-i^{k+1}) e^{i\varphi} \right]_{\theta_s(a)}^{\theta_e(a)} \quad (9)$$



(a)一次の TAP 曲線と曲率半径プロファイル



(b)三次の TAP 曲線と曲率半径プロファイル

図 1: 1 次, 3 次の陽的 B-spline 関数を用いた TAP 曲線とそれぞれの TAP 関数

(9)式は次数、ノット列、両端点の座標、方向角を定める (G^1 Hermite 補間) と制御曲率半径 ρ_i ($i = 0, 1, \dots, m - n - 2$) を求める問題に帰着する。よって(9)式の実部と虚部の二つの線形方程式を解くことで両端点の補間が可能となる。両端点の曲率半径を指定する G^2 Hermite 補間の場合には制御曲率半径 ρ_i ($i = 1, 2, \dots, m - n - 3$) を求める問題に帰着し線形方程式を解くことで実現できる。

5. おわりに

今後の方針として、両端点の補間を行う際に、解が一意に定まらない場合の付加条件の適切な設定方法を考える。

参考文献

- [1] 斎藤隆文, 吉田典正, 方向角パラメータ曲線の提案, Visual Computing グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, 2016.
- [2] G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD, 5th Edition, Morgan Kaufmann, 2001.
- [3] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 魅力的な曲線とその創成アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.3, pp.149-158, 1998.
- [4] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, Visual Computing グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, pp.227-232, 2005.