6H-06

非ホロノミック条件を含むハミルトニアン系への シンプレクティック数値積分法と修正法の適用

岡田　裕佑
同志社大学大学院

1　諸言

一般にハミルトニアン系はエネルギーが保存される系を記述する数理モデルであるが，近年では制御モデルに向けたハミルトニアン系が考案されている．また系の計算に用いる数値積分法の中にはシンプレクティック数値積分法と呼ばれる解法があるが，制御項を含むハミルトニアン系にこのような解法を適用させた例はあまり報告されていない．そこで本研究では，制御項と非ホロノミック条件を含むハミルトニアン系にシンプレクティックな数値積分法を適用させ，拘束条件を保存値として扱った場合の保存性について検討・報告する．また数値積分法に加えて簡易的な修正法を適用させてこれまでの解法と比較するとともに，制御系に適した計算手法の提案を行う．

2　非ホロノミック条件を含むハミルトニアン系

一般的に正準方程式と拘束条件式は別個に計算する必要があり，計算が複雑になってしまう．しかし Molina らが提案した以下の正準方程式を用いることで，非ホロノミックな拘束条件をハミルトニアン系の中に組み込むことができ，計算式を簡略化することができる．ここで $\boldsymbol{b} \neq 0$ である．

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}\frac{\{H,C\}}{\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}} \end{cases} \tag{1}$$

$$\{H, C\} = -\nabla C^T \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & 0 \end{pmatrix} \nabla H \tag{2}$$

3　修正法について

今回用いた修正法について説明する．　1つ目は勾配法を用いた修正法である．各数値積分法にて求めた変数 $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ の予測値を $\tilde{\boldsymbol{q}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{p}}^{n+1}$ とすると，$C \equiv 0$ もしくは $H \equiv H(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ となるべき C と H の値の誤差は

$$\delta C = C(\tilde{\boldsymbol{q}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{p}}^{n+1}) - C(\boldsymbol{q}^n, \boldsymbol{p}^n) \tag{3}$$

$$\delta H = H(\tilde{\boldsymbol{q}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{p}}^{n+1}) - H(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0) \tag{4}$$

と表せる．例えば式 (3) において勾配法を用いて修正後の変数 $\boldsymbol{q}^{n+1}, \boldsymbol{p}^{n+1}$ を求めると，

$$(\boldsymbol{q}^{n+1}, \boldsymbol{p}^{n+1})^T = (\tilde{\boldsymbol{q}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{p}}^{n+1})^T - \frac{\delta C}{|\nabla C|^2}\nabla C \tag{5}$$

となる．　2つ目は保存量の式を変形させ修正する簡易修正法である．制約条件の式 $C \equiv 0$ もしくは $H \equiv H(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ を特定の変数について変形し，数値積分法による計算後に代入して簡易的に修正を行う．

4　数値実験結果

本論文ではチャプリギンスレーモデルを用いた場合の計算結果について報告する．なお数値計算は MATLAB を用いて行った．

チャプリギンスレーモデルは非ホロノミック系の中でも比較的容易に記述できる系である．前先端部にナイフエッジが取り付けられており，この部分は前後にしかスライドできないような拘束が与えられている．後ろに取り付けられている2つの足には拘束条件は与えられておらず，自由にスライドすることができる．ボディの前先端部（ナイフエッジの取り付け部分）の座標を点 $F(q_1, q_2)$ とし，点 F からボディの重心点 G までの距離を a とする．また，q_1 軸とボディの軸の間の角度を q_3 として系を記述する．

また，本研究では保存量の保存性を確認するため，非シンプレクティック数値積分法である陽的ルンゲ・クッタ法（ExRK）と2つのシンプレクティック数値積分法（陰的ルンゲ・クッタ法（ImRK），ロバット IIIAIIIB 法（Lobatto））を用いて計算を行った．

以下に各数値積分法を用いた場合の数値実験結果を示す．なお時間の刻み幅 h は $5.00E-03$[s] とした．まず，非ホロノミック条件式 C を保存量として非ホロノミック条件が組み込まれた運動方程式を解き，C の一定時間ごとの最大誤差を求め保存量の保存性を確かめた（表1）．非ホロノミック条件 C の値を保存量として考えた場合，いずれの解法を用いた場合も保存量が保存されていないことが表1からわかる．このことから，非ホロノミック条件を組み込んだハミルトニアン系に対しては保存性を保つことができず，シンプレクティック数値積分法は他の解法に比べて優位性が無いといえる．次に各数値積分法に加えて修正法を適用させた．数値実験結果を示す．表2は各数値積分法に修

正法を適用させた場合の保存量 C の最大誤差を示したものである．表 2 より，修正法を適用させることで各解法における保存量に対する保存性の精度が高くなったことがわかる．ただし，ロバット ⅢAⅢB 法に勾配法を用いた修正法を適用させた解法は修正法の効果が表れにくかった．

Table 1. Error of non-holonomic conditions C in systems non-holonomic conditions is included (without correction method).

	t(s)					
	0	20	40	60	80	100
Lobatto	$0.00E+00$	$1.87E-01$	$7.52E-01$	$1.70E+00$	$3.02E+00$	$4.72E+00$
ExRK	$0.00E+00$	$4.24E-06$	$1.70E-05$	$3.82E-05$	$6.80E-05$	$1.06E-04$
ImRK	$0.00E+00$	$5.24E-07$	$1.83E-06$	$4.73E-06$	$9.41E-06$	$1.53E-05$

Table 2. Maximum error of non-holonomic conditions C (Lobatto).

Method				C
Lobatto	Original			4.72E+00
	(1)Condition: Coordinates	With gradient method	Repetition	4.71E-11
			No repetition	4.76E-11
		With simplified method	p1	3.18E-13
			q1 or q2	3.69E-13
	(2)Condition: Conserved amount	With gradient method	Repetition	2.50E-05
			No repetition	2.50E-05
		With simplified method	p1	3.18E-13
			q1 or q2	3.70E-13
	(3)Condition: Time	With gradient method	Repetition	1.05E-4
			No repetition	1.01E-9
		With simplified method	p1	1.12E-9
			q1 or q2	1.12E-9

Table 3. Maximum error of non-holonomic conditions C (ExRK).

ExRK	Original			1.06E-04
	(1)Condition: Coordinates	With gradient method	Repetition	4.74E-11
			No repetition	4.69E-11
		With simplified method	p1	3.22E-13
			q1 or q2	3.27E-13
	(2)Condition: Conserved amount	With gradient method	Repetition	6.25E-10
			No repetition	6.25E-10
		With simplified method	p1	3.22E-13
			q1 or q2	3.24E-13
	(3)Condition: Time	With gradient method	Repetition	2.33E-09
			No repetition	2.02E-09
		With simplified method	p1	2.02E-09
			q1 or q2	2.02E-09

Table 4. Maximum error of non-holonomic conditions C (ImRK).

ImRK	Original			1.53E-05
	(1)Condition: Coordinates	With gradient method	Repetition	4.71E-11
			No repetition	4.74E-11
		With simplified method	p1	3.45E-13
			q1 or q2	3.50E-13
	(2)Condition: Conserved amount	With gradient method	Repetition	6.25E-10
			No repetition	6.25E-10
		With simplified method	p1	3.45E-13
			q1 or q2	3.50E-13
	(3)Condition: Time	With gradient method	Repetition	3.11E-09
			No repetition	3.11E-09
		With simplified method	p1	3.10E-09
			q1 or q2	3.10E-09

5 考察

5.1 保存量 C が保存されない理由

本研究では，非ホロノミック条件を含んだハミルトニアン系について，非ホロノミック条件式 $C \equiv 0$ を保存量として扱い，シンプレクティック数値積分法の保存性を検証したが，シンプレクティック数値積分法を用いても C は保存されないという結果になった．これは，シンプレクティック数値積分法がハミルトニアン H の値を保存量とする場合の正準方程式に対してのみ有効であるからだと考えられる．シンプレクティックな写像とは，写像を行う行列の行列式の値が 1 となり，面積を保存する写像のことである．ハミルトニアン系において写像を行う行列はハミルトニアンの正準方程式から求められるため，ハミルトニアン H が保存量である場合にのみこの定義を満たすといえる．よって，本研究のようにハミルトニアン H 以外の値を保存量として扱った場合，シンプレクティック写像が成り立たず，保存性を維持できなかったと考えられる．

5.2 計算時間について

表 5 に各解法の計算時間を示す．本研究では制御問題を取り上げ計算を行った．制御問題においては計算の精度だけではなく計算に要する時間も考慮する必要がある．特にリアルタイム制御を行う場合，計算時間が制御を行いたい時間より長くなってはならない．今回の数値実験は制御時間を 100[s] として行った．このことから，計算時間が優に 100[s] を超えているロバット ⅢAⅢB 法と陰的ルンゲ・クッタ法は制御には不向きであると考えられる．陰的な数値積分法の計算時間が長くなった理由は，数式が陰的であることにより陽的な数式と比べ計算が複雑化しているからである．修正法を適用させることで陽的ルンゲ・クッタ法でも十分な計算精度が確認できたため，チャプリギンスレーのような制御モデルに対して用いる数値積分法としては陽的ルンゲ・クッタ法で十分であるといえる．

Table 5. Computation time.

Method		Computation time[s]
Lobatto	Original	348
ExRK	Original	22
ImRK	Original	354

6 結言

チャプリギンスレーモデルを例に挙げ，非ホロノミック条件を含むハミルトニアン系に対して数値積分法と修正法を適用させ，数値実験を行った．結果から得られた知見を以下に示す．

1) 非ホロノミック条件を含むハミルトニアン系の保存量に対してはシンプレクティック数値積分法は他の解法と比べても優位性がない．
2) ロバット ⅢAⅢB 法のような低次の数値積分法に対しては今回用いた 2 種のより高次制度の修正法は必ずしも有効であるとはいえない．
3) 計算精度・計算時間の両面から考察すると，陽的ルンゲ・クッタ法のような高次の陽的な数値積分法に勾配法による修正法を適用させた手法が長時間のチャプリギンスレーモデルの計算には適している．