

## テンソルの同時低ランク近似と主成分分析の関係

井上 光平<sup>†1</sup> 原 健二<sup>†1</sup> 浦浜 喜一<sup>†1</sup>

主成分分析 (PCA) などのベクトルデータのための次元削減手法を、画像などの行列データに適用する際には、行列からベクトルへの変換が必要であり、これによりベクトルの次元数が増加するという問題が生じる。この問題を解決するために、2DPCA などの行列データのための次元削減手法が提案され、さらにテンソルデータにまで拡張されている。本論文では、テンソルデータの同時低ランク近似 (SLRAT) と PCA に代表されるベクトルデータの同時低ランク近似 (SLRAV) とが、同じ目的関数を異なる制約条件下で最適化する方法として関係付けられることを示す。また、同時低ランク近似の性能を評価するための指標を提案し、SLRAT が SLRAV よりも有効になるための必要条件を示し、その妥当性をカラーヒストグラムの同時低ランク近似の実験で確認する。さらに SLRAT の応用例として、高次元データの PCA を、SLRAT を用いて近似的に計算する方法も提案し、顔認識の実験で、その有効性を確認する。

### A Relationship between Simultaneous Low Rank Approximation of Tensors and Principal Component Analysis

KOHEI INOUE,<sup>†1</sup> KENJI HARA<sup>†1</sup> and KIICHI URAHAMA<sup>†1</sup>

We show a relationship between simultaneous low rank approximation of tensors (SLRAT) and that of vectors (SLRAV), which includes principal component analysis (PCA) as a special case. That is, we show that both of them optimize the same objective function under different constraints. A criterion for evaluating the performance of the simultaneous low rank approximation methods is presented and a necessary condition that SLRAT outperforms SLRAV is derived. The validity of the necessary condition is experimentally verified with the color histograms of color images. An application of SLRAT for PCA of high-dimensional data is also presented. Experimental results on face recognition show that the proposed method outperforms the conventional eigenface method.

### 1. はじめに

主成分分析 (PCA) や特異値分解 (SVD) などのベクトルデータの次元削減手法を、画像などの行列データに適用する場合、行列をベクトルに変換することが必要であり、そうするとベクトルの次元数が行列の要素数と同じになり、大規模な固有値問題を解かなければならなくなる。この問題の解決策として、Yang ら<sup>1),2)</sup> は行列からベクトルへの変換が不要な 2DPCA を提案した。Wang ら<sup>3)</sup> は 2DPCA が行列の各行をベクトルデータと見なして PCA を行うのと等価であると主張した。このように画像を部分空間に分割する方法は、modular PCA<sup>4)</sup> と呼ばれ、ガボールウェーブレットに基づく改良<sup>5)</sup> などがなされている。しかし最近、Gao<sup>6)</sup> は、Wang ら<sup>3)</sup> の方法が modular PCA の 1 種ではないことを示した。2DPCA が行列を構成する行ベクトルの次元数を削減するのに対し、Cai ら<sup>7)</sup> (Tensor PCA), Ding ら<sup>8)</sup> (2dSVD), Zhang ら<sup>9)</sup> (Eigenimage), Inoue ら<sup>10)</sup> (DSVD) は行列の行ベクトルと列ベクトルとを対等に扱う次元削減手法を提案し、Inoue ら<sup>11)</sup> はそれら 4 つが等価な方法であることを示した。これらの方法は、Ye<sup>12)</sup> が提案した行列の一般化低ランク近似 (Generalized Low Rank Approximation of Matrices (GLRAM)) の近似解法になっている。Liang ら<sup>13),14)</sup> は GLRAM の解析的アルゴリズムを提案したが、Liu ら<sup>15)</sup> と Inoue ら<sup>11)</sup> は、Liang ら<sup>13),14)</sup> のアルゴリズムでは GLRAM の最適解は求まらず、近似解しか得られないことを示した。Sheehan ら<sup>16)</sup> はテンソルの高階直交反復 (HOOI<sup>17)</sup>) や高階特異値分解 (HOSVD<sup>18)</sup>) と、PCA, GLRAM との関係を示した。井上<sup>19)</sup> は GLRAM をテンソルデータに拡張したテンソルの同時低ランク近似法 (Simultaneous Low Rank Approximation of Tensors (SLRAT)) を提案し、ハイパースペクトル画像の圧縮に応用した。しかし、SLRAT と、ベクトルデータに対して最適な次元削減手法である PCA との関係についてはいまだ明らかになっていない。そこで本論文では、SLRAT と PCA に代表されるベクトルデータの同時低ランク近似 (Simultaneous Low Rank Approximation of Vectors (SLRAV)) とが、共通の目的関数を異なる制約条件下で最適化する方法として関係付けられることを示す。また、両者の性能を比較するための指標を提案し、SLRAT が SLRAV よりも有効になるための必要条件を示す。これにより、これまで実験的にしか示されなかった GLRAM や SLRAT の有効性が理論的に明らかになる。定性的には、低次元

<sup>†1</sup> 九州大学  
Kyushu University

## 2 テンソルの同時低ランク近似と主成分分析の関係

データに対しては, PCA などの SLRAV が有効であり, 高次元データに対しては, SLRAT が有効であるといえる. 実際には, テンソルが高階になるほどデータの次元数も増加する場合が多いので, データの高階化にともなって SLRAT の有効性は高まると考えられる. テンソルに関する他の研究例には, TensorFace<sup>20)</sup>, TensorTexture<sup>21)</sup>,  $N$ -mode SVD に基づく視線方向推定<sup>22),23)</sup> などがある. TensorFace<sup>20)</sup> は, 顔画像の集合からテンソルを構成する手法であり, テンソルデータを扱うという点で, 本論文で対象とする SLRAT と関係がある. しかし, 画像データは個人, 表情, 顔の向き, 照明条件, 画素をモードとする 5 階テンソルで表され, 各画像は, 画素値を 1 列に並べたベクトルに変換されるので, TensorFace でも, PCA の場合と同様に, ベクトルの次元数が増加するという問題が生じる場合がある.

本論文で新たに提案する内容は以下のとおりである.

- SLRAT と PCA (あるいは SLRAV) の関係
- 同時低ランク近似の性能を評価するための一指標
- その指標のもとで, SLRAT が SLRAV よりも有効になるための必要条件
- 高次元データの PCA の SLRAT による近似計算法

以下, 2 章では, テンソルの同時低ランク近似 (SLRAT) を概説し, 3 章では, SLRAT と PCA の関係を示し, SLRAT の目的関数値の上限と下限を求める. 4 章では, SLRAT と SLRAV や PCA とのメモリ容量の比較を行う. 5 章では, 3 階テンソルで表されるカラーヒストグラムの同時低ランク近似の実験結果を示す. また, 同時低ランク近似の性能評価のための指標を提案する. さらにその指標に基づいて SLRAT の性能が SLRAV のそれを上回るための必要条件を示し, 実験結果がその条件を満たしていることを確認する. 6 章では, SLRAT の応用例として, SLRAT を用いて高次元データの PCA を近似的に計算する方法を示す. 7 章では, 顔認識の実験例を示す. 8 章では, SLRAT から SLRAV と GLRAM を導出し, SLRAT が SLRAV や GLRAM の一般化になっていることを示す. 9 章では, むすびとして今後の課題などを述べる.

## 2. テンソルの同時低ランク近似

$M$  個の  $N$  階実テンソルが与えられるとし, それらを  $\mathcal{A}_i = [a_{i_1 \dots i_N}] \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$  とする. ここで  $a_{i_1 \dots i_N}$  は  $\mathcal{A}_i$  の  $(i_1, \dots, i_N)$  要素であり,  $i_1 \in \{1, \dots, I_1\}, \dots, i_N \in \{1, \dots, I_N\}$  である.  $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_M\}$  の同時低ランク近似問題は

$$\min_{U, \{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^M} \sum_{i=1}^M \|\mathcal{A}_i - \mathcal{B}_i \times \{U\}\|_F^2 \quad (1)$$

$$\text{subj.to } U^{(n)T} U^{(n)} = I_{R_n}, \quad n = 1, \dots, N \quad (2)$$

で定義される<sup>19)</sup>. ここで  $U = \{U^{(1)}, \dots, U^{(N)}\}$  であり,  $\mathcal{B}_i \times \{U\}$  は  $\mathcal{B}_i \times_1 U^{(1)} \dots \times_N U^{(N)}$  を表す<sup>24)</sup>.  $U^{(n)} = [u_{i_n i'_n}^{(n)}] \in \mathbb{R}^{I_n \times R_n}$ ,  $R_n \leq I_n$ ,  $\mathcal{B}_i = [b_{i'_1 \dots i'_N i}] \in \mathbb{R}^{R_1 \times \dots \times R_N}$  である.  $\mathcal{B}_i \times_n U^{(n)} = [\sum_{i'_n=1}^{R_n} b_{i'_1 \dots i'_N i} u_{i_n i'_n}^{(n)}] \in \mathbb{R}^{R_1 \times \dots \times I_n \times \dots \times R_N}$  はテンソル  $\mathcal{B}_i$  と行列  $U^{(n)}$  の  $n$  モード積 ( $n$ -mode product)<sup>18)</sup> を表す.  $\|\cdot\|_F$  はフロベニウスノルムを表し,  $I_{R_n}$  は  $R_n$  次単位行列である. 式 (1) の目的関数を  $E$  とおくと,  $\partial E / \partial \mathcal{B}_i = 0$  より

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_i \times \{U^T\} \quad (3)$$

が得られる. ここで  $U^T = \{U^{(1)T}, \dots, U^{(N)T}\}$  である. 式 (3) を  $E$  に代入すると

$$E = \sum_{i=1}^M (\|\mathcal{A}_i\|_F^2 - \|\mathcal{A}_i \times \{U^T\}\|_F^2) \quad (4)$$

となり,  $\|\mathcal{A}_i\|_F^2$  が定数であることから, 式 (1) は

$$\max_U \sum_{i=1}^M \|\mathcal{A}_i \times \{U^T\}\|_F^2 \quad (5)$$

とできる. 以上より, テンソルの同時低ランク近似 (以下, SLRAT と略記する) の計算手順は次のように要約される.

[ SLRAT ]

Step 1: 式 (5) の解  $U^*$  を求める.

Step 2:  $U^*$  を式 (3) に代入して  $\mathcal{B}_1^*, \dots, \mathcal{B}_M^*$  を求める.

この手順により, 各  $\mathcal{A}_i$  は  $\mathcal{B}_i^*$  に圧縮され,  $\hat{\mathcal{A}}_i = \mathcal{B}_i^* \times \{U^*\}$  で近似される.

井上ら<sup>19)</sup> は, 式 (5) の局所最適解を求めるための反復解法と, 近似解を求めるための非反復解法とを提案している. 本論文では, 反復解法による局所最適解を SLRAT の解とする.

## 3. 主成分分析との関係

定義 1  $\mathcal{A} = [a_{i_1 \dots i_N}] \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  のベクトル化を  $a = [a_j] = \text{vec}(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}^{I_1 \dots I_N}$  とする. ここで  $a_j = a_{i_1 \dots i_N}$  は  $a$  の第  $j$  要素であり, 添え字は

$$j = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{n'=1}^{n-1} I_{n'}(i_n - 1) \quad (6)$$

で対応付けられる．

系 1  $A$  の前進循環 (forward cyclic)<sup>24)</sup> のモード  $n$  行列化 (mode- $n$  matricizing)<sup>24)</sup> を  $A_{(n)}$  とすると

$$a = \text{vec}(A_{(1)}) \quad (7)$$

が成り立つ．ここで  $\text{vec}$  は列ベクトルを 1 列に並べて行列をベクトル化する操作を表す．

(証明)  $A_{(1)}$  の  $(i_1, j_1)$  要素は  $a_{i_1 j_1} = a_{i_1 \dots i_N}$ ,  $j_1 = 1 + \sum_{n=2}^N \prod_{n'=2}^{n-1} I_{n'}(i_n - 1)$  である． $a_{i_1 j_1}$  は  $\text{vec}(A_{(1)})$  の第  $i_1 + I_1(j_1 - 1)$  要素となるが,  $i_1 + I_1(j_1 - 1) = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{n'=1}^{n-1} I_{n'}(i_n - 1) = j$  であるから,  $a$  の第  $j$  要素と  $\text{vec}(A_{(1)})$  の第  $j$  要素は一致する．よって系 1 が成り立つ．

性質 1 次が成り立つ．

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times \{U^T\} \Leftrightarrow b = V^T a \quad (8)$$

ここで  $\mathcal{B} = [b_{i'_1 \dots i'_N}] \in \mathbb{R}^{R_1 \times \dots \times R_N}$ ,  $b = [b_{j'}] = \text{vec}(\mathcal{B})$ ,  $V = [v_{jj'}] = U^{(N)} \otimes \dots \otimes U^{(1)} \in \mathbb{R}^{J \times S}$ ,  $J = I_1 \dots I_N$ ,  $S = R_1 \dots R_N$  であり,  $\otimes$  はクロネッカー積<sup>25)</sup>を表す．

(証明) クロネッカー積の定義より,  $v_{jj'} = u_{i_N i'_N}^{(N)} \dots u_{i_1 i'_1}^{(1)}$  であり, 添え字は  $j = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{n'=1}^{n-1} I_{n'}(i_n - 1)$ ,  $j' = 1 + \sum_{n=1}^N \prod_{n'=1}^{n-1} R_{n'}(i'_n - 1)$  で対応付けられる．このとき

$$b_{j'} = \sum_{j=1}^J v_{jj'} a_j = \sum_{i_N=1}^{I_N} \dots \sum_{i_1=1}^{I_1} u_{i_N i'_N}^{(N)} \dots u_{i_1 i'_1}^{(1)} a_{i_1 \dots i_N} = b_{i'_1 \dots i'_N} \quad (9)$$

より, 性質 1 が成り立つ．

性質 1 より, 式 (1) は

$$\min_{V, \{b_i\}_{i=1}^M} \sum_{i=1}^M \|a_i - V b_i\|^2 \quad (10)$$

と書ける．式 (2) の代わりに,  $V$  に関する制約条件

$$\text{subj.to } V^T V = I_S \quad (11)$$

を用いると, 式 (10) はベクトル  $\{a_1, \dots, a_M\}$  の同時低ランク近似 (これを SLRAV と略記する) になり, 特に平均ベクトル  $\bar{a} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i$  が原点に一致するとき, すなわち  $\bar{a} = 0$

のときには主成分分析 (以下, PCA と略記する) になる．実際, 式 (10) の目的関数を  $\tilde{E}$  とおくと,  $\partial \tilde{E} / \partial b_i = 0$  より,  $b_i = V^T a_i$  が得られ, これを式 (10) に代入して整理すると

$$\max_V \text{tr}(V^T C V) \quad (12)$$

となる．ここで  $\text{tr}$  は行列のトレースを表し,  $C$  は  $\{a_1, \dots, a_M\}$  の共分散行列を  $M$  倍したものであり,  $C = \sum_{i=1}^M a_i a_i^T - M \bar{a} \bar{a}^T = \sum_{i=1}^M a_i a_i^T$  である．最適な  $V$  は  $C$  の上位  $S$  個の固有ベクトルを並べた行列として求まる．すなわち, SLRAV と PCA は同じ目的関数を異なる制約条件下で最適化する方法として関係付けられる．両者の制約条件に関して, 次の性質が成り立つ．

性質 2  $V = U^{(N)} \otimes \dots \otimes U^{(1)}$  とすると

$$U^{(n)T} U^{(n)} = I_{R_n}, n = 1, \dots, N \Rightarrow V^T V = I_S \quad (13)$$

が成り立つ．

(証明)  $V^T V$  の  $(j', j'')$  要素は

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J v_{jj'} v_{jj''} &= \sum_{i_1=1}^{I_1} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} \left( u_{i_1 i'_1}^{(1)} \dots u_{i_N i'_N}^{(N)} \right) \left( u_{i_1 i''_1}^{(1)} \dots u_{i_N i''_N}^{(N)} \right) \\ &= \left( \sum_{i_1=1}^{I_1} u_{i_1 i'_1}^{(1)} u_{i_1 i''_1}^{(1)} \right) \dots \left( \sum_{i_N=1}^{I_N} u_{i_N i'_N}^{(N)} u_{i_N i''_N}^{(N)} \right) = \delta_{i'_1 i''_1} \dots \delta_{i'_N i''_N} = \delta_{j' j''} \end{aligned} \quad (14)$$

と書ける．ここで  $\delta$  はクロネッカーのデルタである．以上より, 性質 2 が成り立つ．

性質 2 の逆は一般には成り立たず, したがって SLRAV の制約条件は, PCA あるいは SLRAV のそれよりも厳しい．

$C$  の上位  $S$  個の固有値を  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_S \geq 0$  とし, それらを対角要素とする対角行列を  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_S)$  とする．また  $\lambda_1, \dots, \lambda_S$  に対応する  $C$  の固有ベクトルを  $x_1, \dots, x_S$  とし,  $X = [x_1, \dots, x_S]$  とする．式 (12) の目的関数を  $F$  とおくと,  $F$  の上限は

$$F = \text{tr}(V^T X \Lambda X^T V) = \sum_{s=1}^S \lambda_s \sum_{s'=1}^S (v_{s'}^T x_s)^2 \leq \sum_{s=1}^S \lambda_s = F_U \quad (15)$$

で与えられる．ここで  $v_{s'}$  は  $V$  の第  $s'$  列ベクトルである．

次のアルゴリズムは  $F$  の下限を与える．

[ SLRAT' ]

Step 1 :  $U_*^{(1)} = \arg \max_{U^{(1)}} \sum_{i=1}^M \|A_i \times_1 U^{(1)T}\|_F^2$  を求める .

Step 2 :  $n = 2, \dots, N$  について ,  $U_*^{(n)} = \arg \max_{U^{(n)}} \sum_{i=1}^M \|A_i \times_1 U_*^{(1)T} \cdots \times_{n-1} U_*^{(n-1)T} \times_n U^{(n)T}\|_F^2$  を順次求める .

Step 3 :  $U^* = \{U_*^{(1)}, \dots, U_*^{(N)}\}$  を式 (3) に代入して  $B_1^*, \dots, B_M^*$  を求める .

このアルゴリズムは ,  $V = U^{(N)} \otimes \cdots \otimes U^{(1)}$  のときに  $F = \sum_{i=1}^M \|A_i \times \{U^T\}\|_F^2 = \sum_{i=1}^M \|B_i\|_F^2$  と書けることに基づいており , SLRAT の反復解法<sup>19)</sup> を 1 回目の反復で停止するのに相当する . 反復によって  $F$  の値は単調に増加する<sup>19)</sup> ことから , SLRAT' による  $F$  の値を  $F_L$  とすると

$$F_L \leq F \leq F_U \tag{16}$$

が成り立つ . なお , 上記の SLRAT' では  $U_*^{(n)}$  を  $n = 1, \dots, N$  の順に計算しているが , この順序は任意であり ,  $N!$  通りの場合の中から最大の下限を与えるものを選ぶこともできる .

4. メモリ容量の比較

SLRAT では ,  $M$  個の  $I_1 \times \cdots \times I_N$  テンソルが ,  $M$  個の  $R_1 \times \cdots \times R_N$  テンソルと  $N$  個の  $I_n \times R_n$  行列とで近似される . すなわち , データを表現するのに必要な数値の個数  $K$  は  $M \prod_{n=1}^N I_n = MJ$  個から  $M \prod_{n=1}^N R_n + \sum_{n=1}^N I_n R_n = MS + \sum_{n=1}^N I_n R_n$  個に削減される . SLRAV では ,  $M$  個の  $J$  次元ベクトルが ,  $M$  個の  $S$  次元ベクトルと 1 個の  $J \times S$  行列とで近似される . すなわち ,  $K$  は  $MJ$  個から  $MS + JS = (M + J)S$  個に削減される . PCA では , 平均ベクトルを記憶しておく必要があるので  $(M + J)S + J$  個になる .  $M \gg J$  のときには , どの方法でも  $K \approx MS$  となるので ,  $F$  の値が最大となる SLRAV あるいは PCA を用いるのがよいと考えられるが , 高階のテンソルデータでは  $J \gg M$  となることが多いので , そのような場合には SLRAT を用いるのがよいと考えられる .

5. 実 験

実験例として , 複数の画像のカラーヒストグラムの同時低ランク近似を行った結果を示す . 実験には 90 枚のカラー画像を用いた . 画像の例を図 1 に示す . まず , RGB 値の各階調数を 256 階調から 8 階調に減らし , 色数を 512 色に減色する . そうすると , カラーヒストグラムは  $8 \times 8 \times 8$  の 3 階テンソルになる . すなわち , この例では  $M = 90$  ,  $I_1 = I_2 = I_3 = 8$  となる .  $S = R_1 \cdots R_N$  の値を 1 から 512 まで変えたときの  $F$  の値とその上下限値 ( 式 (16) ) の変化を図 2 に示す . 図 2 の横軸は  $S$  であり , 縦軸は  $F$  である .



図 1 カラー画像の例  
Fig.1 Example of color images.

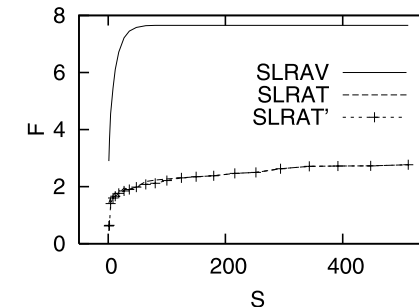


図 2  $F$  とその上下限  
Fig.2  $F$  and its upper and lower bounds.

SLRAT' による下限値  $F_L$  は  $F$  の値とほぼ同じであり , このことから SLRAT' は SLRAT の良い近似解法になっていることが分かる . SLRAV による上限値  $F_U$  は  $S = \min(M, J) = 90$  で最大値に達し , それ以降は変化しない .  $F_U$  の値は SLRAT の  $F$  の値よりもかなり大きい . この差は , 両者の制約条件の違いによるものであると考えられる . 次に , SLRAV と SLRAT' とで , データを表現するのに必要な数値の個数  $K$  を比較した結果を図 3 に示す . SLRAT' の  $K$  は SLRAT の  $K$  と同じなので省略する . 実線の SLRAV は ,  $S = 90$  で  $F_U$  の値が最大になるので ,  $S \leq 90$  の範囲だけを表示している . SLRAV と SLRAT の性能を

5 テンソルの同時低ランク近似と主成分分析の関係

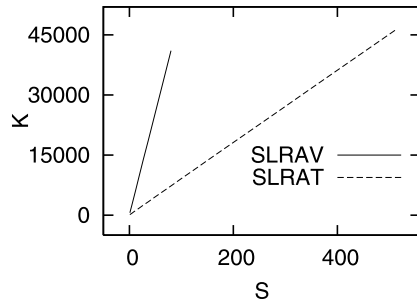


図3 数値の個数  $K$   
Fig. 3  $K$ , the number of scalars.

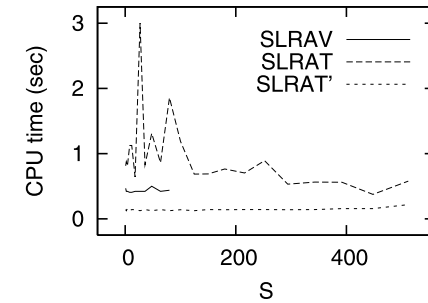


図5 計算時間  
Fig. 5 Computation time.

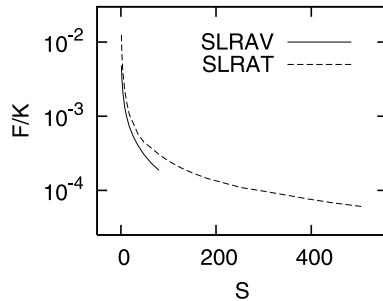


図4  $F/K$   
Fig. 4  $F/K$ .

比較するためには、 $F$  と  $K$  の両方を考慮する必要がある。 $F$  は大きいほど近似性能が高いことを表し、 $K$  は小さいほど圧縮率が高いことを表す。そこで、 $F$ 、 $K$  の両者を総合した同時低ランク近似の性能評価の指標として、 $F/K$  を提案する。 $F/K$  は値が大きいほど高性能であることを示す。SLRAV と SLRAT とで  $F/K$  の値を比較した結果を図 4 に示す。この図でも、実線の SLRAV は  $S \leq 90$  の範囲で表示している。どの  $S$  でも SLRAT は SLRAV よりも  $F/K$  の値が大きい。すなわち、この例では、SLRAT は SLRAV よりも高性能であるといえる。

SLRAT の性能が SLRAV のそれを上回るのは

$$\frac{F}{MS + \sum_{n=1}^N I_n R_n} \geq \frac{F_U}{(M+J)S} \quad (17)$$

のときである。 $\alpha = F/F_U \leq 1$  とおくと、式 (17) は

$$[\alpha(J+M) - M]S \geq \sum_{n=1}^N I_n R_n > 0 \quad (18)$$

と書ける。式 (18) が成り立つための必要条件は  $\alpha(J+M) - M > 0$  すなわち

$$J > \frac{1-\alpha}{\alpha} M = \frac{F_U - F}{F} M \quad (19)$$

である。

上記の実験例では  $\frac{1-\alpha}{\alpha} \approx 2$  であり、 $J = 512 > 2M = 180$  より、式 (19) が成り立っている。

計算時間を図 5 に示す。実線は SLRAV、破線は SLRAT、点線は SLRAT' を示す。この図でも、SLRAV は  $S \leq 90$  の範囲で表示している。SLRAT は  $S \leq 125$  でグラフの変動が大きい。これは反復解法が収束するまでの反復回数の変動によるものであると考えられる。SLRAV と SLRAT' は非反復のアルゴリズムであるため、グラフは滑らかであり、SLRAT' は SLRAV よりも高速である。なお、計算環境は Pentium 4 CPU 3.40 GHz、2.00 GB RAM であり、プログラミング言語は MATLAB である。

### 6. 高次元データの主成分分析への応用

高次元ベクトルデータの主成分分析 (PCA) では, 大規模な行列の固有値問題を解く必要があり, 計算が困難になる場合がある. 具体的には, ベクトルの次元数を  $J$ , データの個数を  $M$ ,  $D = \min(J, M)$  とすると, PCA では  $D \times D$  行列の固有値問題を解く必要があり,  $D$  が大きいと計算が困難になる. そのようなときに, SLRAT を用いて近似的な PCA を行う方法を提案する.

**定義 2**  $a = [a_j] \in \mathbb{R}^J$  のテンソル化を  $\mathcal{A} = [a_{i_1 \dots i_N}] = \text{ten}(a, I_1, \dots, I_N) \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  とする. ここで  $a_{i_1 \dots i_N} = a_j$  は  $\mathcal{A}$  の  $(i_1, \dots, i_N)$  要素であり, 添え字は

$$i_n = \left\lfloor \frac{j-1 - \sum_{n'=n+1}^N \prod_{n''=1}^{n'-1} I_{n''}(i_{n''}-1)}{\prod_{n''=1}^{n-1} I_{n''}} \right\rfloor + 1, \quad n = 1, \dots, N \quad (20)$$

で対応付けられる.

系 2 次が成り立つ.

$$\mathcal{A} = \text{ten}(\text{vec}(\mathcal{A}), I_1, \dots, I_N) \quad (21)$$

(証明) 式 (6) を式 (20) に代入すると

$$i_n = \left\lfloor \frac{\sum_{n'=1}^n \prod_{n''=1}^{n'-1} I_{n''}(i_{n''}-1)}{\prod_{n''=1}^{n-1} I_{n''}} \right\rfloor + 1 = (i_n - 1) + 1 = i_n \quad (22)$$

となる. よって系 2 が成り立つ.

SLRAT に基づく PCA の近似解法は以下のとおりである.

#### [ SLRAT-based PCA ]

**Step 1** :  $a_i \in \mathbb{R}^J, i = 1, \dots, M$  が与えられるとし,  $\bar{a} = 0$  とする.  $\mathcal{A}_i = \text{ten}(a_i, I_1, \dots, I_N) \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$  を求める.

**Step 2** :  $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_M\}$  を SLRAT で同時低ランク近似し,  $U^* = \{U_*^{(1)}, \dots, U_*^{(N)}\}, \mathcal{B}_1^*, \dots, \mathcal{B}_M^*$  を求める.

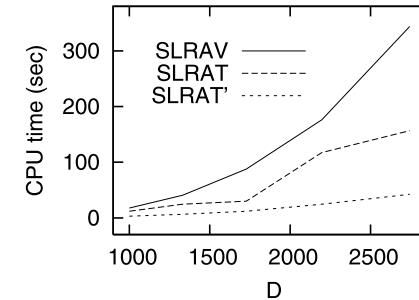


図 6 計算時間  
Fig. 6 Computation time.

**Step 3** : 新規データ  $a \in \mathbb{R}^J$  が与えられたら,  $\mathcal{A} = \text{ten}(a, I_1, \dots, I_N)$  として  $\mathcal{B}^* = \mathcal{A} \times \{U_*^{*T}\}$  を計算する.  $a$  は  $\hat{a} = \text{vec}(\mathcal{B}^* \times \{U_*^*\})$  で近似される. また,  $\{a_1, \dots, a_M\}$  の共分散行列  $C$  の固有ベクトルからなる行列  $V$  は  $\hat{V}_* = U_*^{(N)} \otimes \dots \otimes U_*^{(1)}$  で近似される.

与えられるデータが式 (19) を満たすならば, 上記の SLRAT-based PCA を用いることによって, 図 4 に例示したように  $F/K$  の値が向上することが期待される.

区間  $(0, 1)$  に一様分布する乱数を要素とする 3 階テンソルデータを用いて, 同時低ランク近似の計算時間を測定した結果を図 6 に示す. 横軸は  $D$  であり, 縦軸は計算時間である. 実線は SLRAV であり, PCA もこれと同等である. 破線は SLRAT であり, 点線は SLRAT' である. SLRAV よりも SLRAT の計算時間は短く, それよりもさらに SLRAT' の計算時間は短い.

### 7. 顔認識の実験

顔画像による個人識別の実験を行い, 上記の SLRAT-based PCA に基づく方法と, 従来の PCA に基づく固有顔法<sup>26)</sup> とで, 認識率を比較した結果を示す. 実験には, ORL database<sup>27)</sup> の顔画像を用いた. 画像例を図 7 に示す. 画像サイズは,  $J = 112 \times 92$  画素である. このデータベースには, 1 人につき 10 枚の顔画像が 40 人分, 合計で 400 枚の顔画像が含まれている. 各人に付き 5 枚を学習データとし, 残りの 5 枚をテストデータとする. すなわち, 400 枚の顔画像のうち, 200 枚を学習データとし, 残りの 200 枚をテストデータとする. SLRAT では, 各画像を 3 階のテンソルで表す. ここでは,  $I_1 = 28, I_2 = 23, I_3 = 16$  とした.  $I_1 I_2 I_3 = J$  である. 最近傍識別により, テストデータを識別する. すなわち, 各テ

7 テンソルの同時低ランク近似と主成分分析の関係



図 7 顔画像の例

Fig. 7 Example of face images.

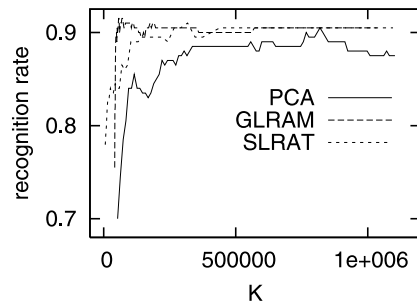


図 8 認識率

Fig. 8 Recognition rate.

トデータに対して  $i^* = \arg \min_{i \in \{1, \dots, M\}} \|B_i^* - B^*\|_F$  を求め、 $i^*$  番目の学習データのクラスをテストデータのクラスとする。ここで  $M$  は、学習データの枚数 200 である。認識率を図 8 に示す。横軸は、データを表現するのに必要な数値の個数  $K$  であり、縦軸は認識率である。実線は PCA を表し、破線は GLRAM を表し、点線は SLRAT を表す。GLRAM では、 $N = 2$  とし、 $I_1 = 112, I_2 = 92$  とした。GLRAM と SLRAT のグラフは、PCA のグラフよりも左上にあり、少ないメモリ容量で高い認識率が得られていることが分かる。認識率の最高値は、PCA では 0.905 であり、GLRAM では 0.915 であり、SLRAT では 0.910 であった。

この例で、式 (19) が成り立っているかどうかを調べるために、 $G = \alpha(J + M) - M$  の

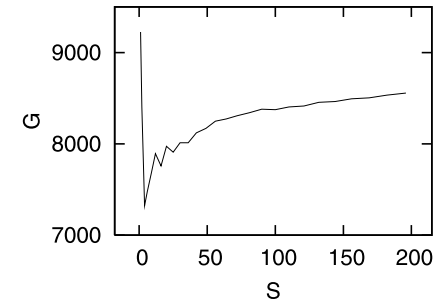


図 9  $G$   
Fig. 9  $G$ .

値を計算してみた。その結果を図 9 に示す。横軸は  $S$  であり、縦軸は  $G$  である。 $G > 0$  であれば式 (19) が成り立つ。この図より、 $G$  はつねに正であるから、この例でも式 (19) が成り立っていることが分かる。 $F/K$  は、同時低ランク近似の性能、すなわちデータ圧縮性能の指標であるが、パターン認識においては、この値が高いほど、特徴抽出が良好に行われていると考えられ、したがって認識率も向上すると推測される。よって式 (19) が成り立つような例では、SLRAT を用いることによって認識率も向上すると考えられる。この例でも、式 (19) が成立する条件下で、SLRAT (SLRAT-based PCA) のほうが認識率が高くなっている。逆に、式 (19) が成り立たないような例では、認識率も低下する可能性がある。

以上のように、顔画像の表現方法を、従来のベクトルから、行列や 3 階のテンソルにすることで、認識率が向上することを実験的に確認した。

SLRAT-based PCA では、テンソルの階数  $N$  や  $I_1, \dots, I_N$  をある程度自由に設定することができる。 $I_1, \dots, I_N$  については、どれか 1 つの値だけが大きくなると、SLRAT に近付いてしまうので、できるだけ均等に  $I_1 \approx \dots \approx I_N$  となるようにするのがよいと思われる。SLRAT の  $N = 2$  の場合に相当する GLRAM<sup>12)</sup> では、 $I_1 \approx I_2$  のときに、最も性能が良くなることが実験で示されている。 $N$  については、 $I_n$  が小さくなりすぎず、かつ計算可能な程度の値に収まるように設定するのがよいと思われる。

8. ベクトル、行列の同時低ランク近似の導出

最後に、SLRAT はテンソルの階数が  $N = 1$  のときに SLRAT になり、 $N = 2$  のときに

GLRAM あるいは SLRAM になることを示す.

まず,  $N = 1$  のとき,  $A_i = a_i \in \mathbb{R}^{I_1}$  となり, 式 (1) の SLRAT は

$$\min_{U^{(1)}, \{b_i\}_{i=1}^M} \sum_{i=1}^M \|a_i - U^{(1)} b_i\|^2 \quad (23)$$

となり,  $V = U^{(1)}$  とおくと, 式 (23) は, 式 (10) の SLRAV と一致する.

次に,  $N = 2$  のとき,  $A_i = A_i \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$  となり, 式 (1) は

$$\min_{U^{(1)}, U^{(2)}, \{B_i\}_{i=1}^M} \sum_{i=1}^M \|A_i - U^{(1)} B_i U^{(2)T}\|_F^2 \quad (24)$$

となる. これは, GLRAM の定式化に一致する.

このように, SLRAT は, PCA を含む SLRAV や GLRAM の一般化になっている.

## 9. むすび

行列データの 2DPCA や一般化低ランク近似 (GLRAM) の拡張であるテンソルデータの同時低ランク近似 (SLRAT) と, 主成分分析 (PCA) を特別な場合として含むベクトルデータの同時低ランク近似 (SLRAV) とが, 共通の目的関数を異なる制約条件の下で最適化する方法として関係付けられることを示した. また, 同時低ランク近似の性能評価の指標を提案し, SLRAT の性能が SLRAV のそれを上回るための必要条件を示し, 3 階テンソルで表されるカラーヒストグラムの同時低ランク近似の実験で, その妥当性を確認した. さらに SLRAT の応用例として, 高次元データの PCA を SLRAT を用いて近似的に計算する方法を提案し, 顔認識の実験で, 従来の PCA に基づく固有顔法よりも, GLRAM や SLRAT に基づく方法のほうが, 高い認識率が得られることを確認した. また, SLRAT はテンソルの階数が 1, 2 のとき, それぞれ SLRAV, GLRAM に帰着することを示した.

本論文で示した SLRAT と PCA あるいは SLRAV との関係は, テンソルと行列の  $n$  モード積による表現を, 行列のクロネッカー積および行列とベクトルの積による表現に変換できることに基づいている. クロネッカー積による近似<sup>28)</sup> 性能について検討し, クロネッカー積によるテンソルの分解アルゴリズムを開発するのが今後の課題である.

## 参考文献

- 1) Yang, J. and Yang, J.: From image vector to matrix: A straightforward image projection technique—IMPCA vs. PCA, *Patt. Recog.*, Vol.35, No.9, pp.1997–1999 (2002).
- 2) Yang, J., Zhang, D., Frangi, A.F. and Yang, J.: Two-dimensional PCA: A new approach to appearance-based face representation and recognition, *IEEE Trans. PAMI*, Vol.26, No.1, pp.131–137 (2004).
- 3) Wang, L., Wang, X., Zhang, X. and Feng, J.: The equivalence of two-dimensional PCA to line-based PCA, *Patt. Recog. Lett.*, Vol.26, No.1, pp.57–60 (2005).
- 4) Gottumukkal, R. and Asari, V.K.: An improved face recognition technique based on modular PCA approach, *Patt. Recog. Lett.*, Vol.25, No.4, pp.429–436 (2004).
- 5) Gudur, N. and Asari, V.K.: Gabor wavelet based modular PCA approach for expression and illumination invariant face recognition, *Proc. AIPR*, p.13 (2006).
- 6) Gao, Q.: Is two-dimensional PCA equivalent to a special case of modular PCA?, *Patt. Recog. Lett.*, Vol.28, No.10, pp.1240–1249 (2007).
- 7) Cai, D., He, X. and Han, J.: Subspace learning based on tensor analysis, Dept. Computer Science Tech. Report, UIUCDCS-R-2005-2572 (2005).
- 8) Ding, C. and Ye, J.: 2-dimensional singular value decomposition for 2D maps and images, *Proc. SDM* (2005).
- 9) Zhang, D., Chen, S. and Liu, J.: Representing image matrices: Eigenimages versus eigenvectors, *Proc. ISNN*, LNCS 3497, pp.659–664 (2005).
- 10) Inoue, K. and Urahama, K.: DSVD: A tensor-based image compression and recognition method, *IEEE Proc. ISCAS*, pp.6308–6311 (2005).
- 11) Inoue, K. and Urahama, K.: Equivalence of non-iterative algorithms for simultaneous low rank approximations of matrices, *IEEE Proc. CVPR*, pp.154–159 (2006).
- 12) Ye, J.: Generalized low rank approximations of matrices, *Machine Learning*, Vol.61, pp.167–191 (2005).
- 13) Liang, Z. and Shi, P.: An analytical algorithm for generalized low-rank approximations of matrices, *Patt. Recog.*, Vol.38, No.11, pp.2217–2219 (2005).
- 14) Liang, Z., Zhang, D. and Shi, P.: The theoretical analysis of GLRAM and its applications, *Patt. Recog.*, Vol.40, No.3, pp.1032–1041 (2007).
- 15) Liu, J. and Chen, S.: Non-iterative generalized low rank approximation of matrices, *Patt. Recog. Lett.*, Vol.27, No.9, pp.1002–1008 (2006).
- 16) Sheehan, B.N. and Saad, Y.: Higher order orthogonal iteration of tensors (HOOI) and its relation to PCA and GLRAM, *Proc. ICDM* (2007).
- 17) De Lathauwer, L., De Moor, B. and Vandewalle, J.: On the best rank-1 and rank- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  approximation of higher-order tensors, *SIAM J. Matrix Anal.*



## 9 テンソルの同時低ランク近似と主成分分析の関係

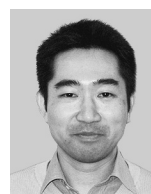
*Appl.*, Vol.21, No.4, pp.1324–1342 (2000).

- 18) De Lathauwer, L., De Moor, B. and Vandewalle, J.: A multilinear singular value decomposition, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol.21, No.4, pp.1253–11278 (2000).
- 19) 井上光平, 浦浜喜一: 複数のテンソルデータの同時低ランク近似, 信学技報, Vol.106, No.301, PRMU2006-112, pp.47–52 (2006).
- 20) Vasilescu, M.A.O. and Terzopoulos, D.: Multilinear Analysis of Image Ensembles: TensorFaces, *Proc. ECCV* (2002).
- 21) Vasilescu, M.A.O. and Terzopoulos, D.: TensorTextures: Multilinear Image-Based Rendering, *Proc. ACM SIGGRAPH 2004*, pp.336–342 (2004).
- 22) 小野泰弘, 岡部孝弘, 佐藤洋一: 目領域の切出しの不定性を考慮した低解像度画像からの視線方向推定, 画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2005), pp.96–103 (2005).
- 23) 小野泰弘, 岡部孝弘, 佐藤洋一: 低解像度画像からの視線方向推定—カーネル多重線形モデルによる個人差への対応, 画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2006), pp.595–600 (2006).
- 24) Bader, B.W. and Kolda, T.G.: Algorithm 862: MATLAB tensor classes for fast algorithm prototyping, *ACM Trans. Math. Software*, Vol.32, No.4, pp.635–653 (2006).
- 25) Van Loan, C.F.: The ubiquitous Kronecker product, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.123, pp.85–100 (2000).
- 26) Turk, M. and Pentland, A.: Eigenfaces for recognition, *Journal of Cognitive Neuroscience*, Vol.3, No.1, pp.71–86 (1991).
- 27) Samaria, F. and Harter, A.: Parameterisation of a Stochastic Model for Human Face Identification, *Proc. 2nd IEEE Workshop on Applications of Computer Vision* (1994).
- 28) Van Loan, C.F. and Pitsianis, N.: Approximation with Kronecker products, *Linear Algebra for Large Scale and Real Time Applications*, Moonen, M.S. and Golub, G.H. (Eds.), pp.293–314, Kluwer Publications (1993).

(平成 19 年 8 月 30 日受付)

(平成 20 年 3 月 10 日採録)

(担当編集委員 栗田 多喜夫)



井上 光平

2000 年九州芸術工科大学大学院博士後期課程修了。現在、九州大学助教。パターン認識、画像処理に関する研究に従事。



原 健二 (正会員)

1989 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了。現在、九州大学准教授。博士 (工学)。コンピュータビジョン、画像処理に関する研究に従事。



浦浜 喜一

1980 年九州大学大学院工学研究科博士後期課程修了。現在、九州大学教授。パターン認識、画像情報処理に関する研究に従事。