Vol.2017-MPS-112 No.17
2017/2/28

小学校における授業時間割作成

高橋 香[1,a)]　赤池 洋一[2]　山口 梨恵[2]　山本 剛大[2]　林田 真治[2]　ロウレンソ ブルノ フィゲラ[1,b)]
池上 敦子[1,c)]

概要：小学校では学期毎の時間割に加え，学校行事にあわせた時間割を複数作成している．さらに，文部科学省が定めた年間標準時数の達成率を意識するために，時間割を毎週作成している小学校もある．時間割作成についてこれまで多くの研究が行なわれているが，高校や大学を対象としたものが多い．さらに学校毎の独自の環境や制約条件があると考えられ，提案されているモデルは対象学校専用のものとなっている．本研究では通常授業の時間割だけでなく，特殊な期間にも適用可能であり，さらに多くの小学校で利用出来る柔軟性のある数理最適化モデルを提案する．このモデルに基づいて，2 つの小学校を対象に合計 3 つの時間割作成を行なったところ，実用可能な時間割が得られることを確認出来た．

1.　はじめに

授業時間割は，教科担当教員の交代等，学校側の事情により毎年新しく作成する必要がある．時間割は学年，クラスで異なり，各教科の必要授業数を満たすだけでなく，教員の授業時限や教室の利用時限が重ならないようにしなければならない．また，小学校では通常時間割だけでなく，学校行事 (運動会，文化祭) に向けた準備期間用の時間割を複数回作成する必要がある．文部科学省が定めた年間標準時数の達成率をより意識するために，時間割を毎週作成している小学校もある．

時間割作成問題についてはこれまでも多くの研究が行なわれている [1] が，対象が高校や大学であるものが多い．小学校向けの研究は少ないうえに学校独自の条件や環境の制限があると考えられ，対象とした学校専用のモデルが提案されている [2]．

これに対し本研究では，通常授業の時間割だけでなく，特殊な期間にも適用可能であり，さらに様々な小学校で利用出来る柔軟性のある数理最適化モデルの構築を目指す．そのために，都内私立小学校の複数時期を対象に時間割作成において考慮すべき制約を洗い出し，さらに 2 つの公立小学校の時間割作成との共通点や違いを整理して，それらすべての制約をカバー出来るようモデルを構築する．

モデル化における制約式は以下の通り．

2.　時間割作成のための制約

調査して明らかになった時間割作成において考慮する制約を，14 の項目に整理し，5 つに分類する．

各クラスにおける基本制約
(a) 1 つの時限では必ず 1 つ授業を行なう

各クラスの教科についての制約
(b) 各教科は必要授業数だけ行なう
(c) 各教科は授業可能時限に行なう
(d) 各教科は指定された教室で行なう
(e) 各教科は 1 日の授業数の上下限を守る
(f) 各教科は指定期間における授業数の上下限を守る
(g) 各教科は授業実施日数の上下限を守る
(h) 2 連続教科は指定した回数だけ 2 時限連続で行なう
(i) 2 連続教科が 2 時限連続する場合，2 時限とも同じ教室で行なう

各教員についての制約
(j) 1 教員が授業可能な 1 つの時限に行なえる授業は 1 つである
(k) 1 教員が 1 日に行なう授業数の上下限を守る

各教室についての制約
(l) 1 教室で 1 つの時限に行なえる授業は 1 つである

その他の制約
(m) ある教科集合がある時限集合に割り当てられる授業数が上下限を守る
(n) 避けるべき教科の並びを回避する

1　成蹊大学
Seikei University, Musashino-shi, Tokyo 180–8633, Japan
2　成蹊小学校
Seikei Elementary School, Musashino-shi, Tokyo 180–8633, Japan
a)　kaori@cleo.ci.seikei.ac.jp
b)　lourenco@st.seikei.ac.jp
c)　atsuko@st.seikei.ac.jp

Vol.2017-MPS-112 No.17
2017/2/28

3. ハード制約とソフト制約

本研究では教科 s を時限 j に教室 r で行う場合 1，そうでない場合 0 となる x_{sjr} を 0-1 意思決定変数として用いる．その他に，教科 s を日 d に行なう場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 y_{sd} と，2 時限連続教科 s を連続する時限 j_1, j_2 で行なう場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 $z_{sj_1j_2}$ を用いる．これらの変数と 2 節の制約を基にこの時間割作成を 0-1 整数計画問題としてモデル化を行なった．

すべての制約をハード制約として記述したモデルと数理最適化汎用ソルバーを利用して対象小学校の時間割を作成する計算実験を行なった．しかし，実行不可能となり解が得られなかった．そこで現場ではどの制約を諦めて時間割が作成されているのか，過去の時間割の観察を行った．その結果，制約 (d) (k) (m) (n) が守られていないだけでなく，制約 (d) については，使用希望する教科が過多になっている教室があり，他の制約を満たした下では使用出来ない場合があることがわかった．現場ではこの場合，第二希望の教室を設定し，第一希望が不可能な場合は第二希望を使用する対応がとられていた．

これら明らかになった内容をモデルに反映するため，以下の 4 つを許すことにした．

(I) 第二希望の教室を設定して使用すること
(II) 教員の 1 日における授業数が上限を超過すること
(III) ある教科集合がある時限集合に割り当てられる授業数が上限を超過すること
(IV) 避けるべき教科の並びを許すこと

つまり制約 (d) (k) (m) (n) をソフト制約とした．

違反 (I) は教科 s を第二希望の教室 r で行なう授業数が n である場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 X_{srn} と表す．違反 (II) は教員 t の日 d における授業数の上限を n 超過した場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 γ_{tdn} によって違反を表す．違反 (III) 合 S が時限集合 J に割り当てられる授業数の上限を超過した数を非負変数 α_{SJ} によって表す．違反 (IV) は「教科 s を時限 j に」,「教科 $\hat{s}$ を時限 $\hat{j}$ に」の両方を割り当てる場合 1，そうでない場合 0 となる 0-1 変数 $\beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$ によって違反を表す．

そしてこれらの違反を目的関数で最小化することを考える．

4. 違反の分散

3 節の結果を基にモデルの改良を行なった．そして，3 節の実験と同一の計算環境とデータを用いて計算実験を行なったところ，最適解は得られたが違反が特定のクラス・特定の教員に偏っていることがわかった．教育を行なう上で違反の偏りは好ましくない．そこで，違反を出来る限り均等にする工夫を考えた．

違反 (I) (II) については違反が増える度にペナルティの上昇幅を大きくし，前者は教員間と日の間で，後者は学年内の同一教科間で好ましくない違反に偏りが出ないようにする．ただし必要な場合は教員間，教科間でペナルティの重み付けを出来るようにする．

違反 (III) は学年毎のクラス間における違反の偏りを抑えるようにする．学年 g のクラス毎で α_{SJ} の合計を比較し，その最大値を非負変数 UB_g で表す．UB_g が値を持つことにはペナルティをつける．

違反 (IV) については複数の学年・クラスにわたるものであるため，何が均等かを定めることが難しい．したがって，個々の重要度にあわせてペナルティを設定することで，違反自体を抑える．

5. 提案モデル

4 節の考え方を基に小学校時間割作成モデルの改良を行なった．以下に記号説明とモデルを示す．

記号説明

学年の集合を G，学年 g のクラスの集合を C_g，クラス c の教科の集合を S_c，対象期間で行なう教科 s の必要授業数を n_s，クラス c が 2 時限連続で行なう教科の集合を $S_c^2 \subseteq S_c$，2 時限連続教科 s を連続時限で行なう回数を n_s^2，区間の集合を W，区間 w 内の日の集合を D_w，日 d における時限の集合を J_d，クラス c の日 d における時限の集合を $J_{cd} \subseteq J_d$，クラス c の日 d における連続時限 (j_1, j_2) の集合を $J_{cd}^2 \subseteq J_{cd}$，教科 s が日 d に授業可能な時限の集合 $J_{sd}^{\mathrm{avail}} \subseteq J_{cd}$，区間 w に教科 s を行なう授業数に下限 l，上限 u と設定をすることを表す (s, w, l, u) の集合を SN^{period}，教科 s を行なう場合の 1 日の授業数に下限 l，上限 u と設定をすることを表す (s, d, l, u) の集合を SN^{day}，区間 w に教科 s を行なう授業日数に下限 l，上限 u と設定することを表す (s, w, l, u) の集合を DN，クラス c の時限集合 J に教科集合 S を割り当てる授業数に下限 l，上限 u と設定することを表す (S, J, l, u) の集合を A_c，時限集合 J に教科集合 S を割り当てる授業数の「上限を超える数」の上限を v'_{SJ}，教員の集合を T，教員 t が教える教科の集合を S_t^{tea}，教員 t が日 d に授業可能な時限の集合を $J_{td}^{\mathrm{tea}} \subseteq J_d$，教員 t の 1 日における授業数に下限 l，上限 u と設定をすることを表す (t, l, u) の集合を L，教員 t の日 d に授業数の「上限を超える数」の上限を v_{td}，「教科 s を時限 j に行なうこと」,「教科 $\hat{s}$ を時限 $\hat{j}$ に行なうこと」のうち高々一方しか行えないことを表す $(s, \hat{s}, j, \hat{j})$ の集合を F，教室の集合を R，教科 s にとって第 1 希望の教室の集合を R_s^1，第 2 希望の教室の集合を R_s^2，教室 r で可能な教科の集合を SR_r とする．

教員 t が 1 日における授業数の「上限を超えたこと」に対するペナルティ (教員間の重み付け) を p_t^{tea1},「上限を n 超えたことに」対するペナルティを p_{tdn}^{tea2} とする．UB_g に対するペナルティを p_g^{ub},「教科 s を時限 j に」,「教科 $\hat{s}$ を

時限 $\hat{j}$ に」の両方の授業を行なうことに対するペナルティを $p^{\mathrm{avoid}}_{s\hat{s}j\hat{j}}$ とする．教科 s を第二希望の教室 r で「行なうこと」に対するペナルティ (教科間の重み付け) を p^{room1}_{sr}，「行なう授業数が n であること」に対するペナルティを p^{room2}_{srn} とする．

p^{tea2}_{tdn} と p^{room2}_{srn} は 4 節で述べた，違反が増える度に上昇幅が大きくなるペナルティである．それぞれを以下のように設定する．

$$p^{\mathrm{tea2}}_{tdn} = \begin{cases} n > 0: & |C_g| * p^{\mathrm{tea2}}_{td(n-1)} + 1 \\ n = 0: & 0 \end{cases}$$
$$t \in T, n \in \{1, \ldots, v_{td}\}, d \in D_w, w \in W$$

$$p^{\mathrm{room2}}_{srn} = \begin{cases} n > 0: & |C_g| * p^{\mathrm{room2}}_{sr(n-1)} + 1 \\ n = 0: & 0 \end{cases}$$
$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, n \in \{1, \ldots, n_s\}$$

意思決定変数とその他の変数については 3 節と 4 節に示したものを利用する．

各クラスにおける基本制約

$$\sum_{s \in \{s | J^{\mathrm{avail}}_{sd} \cap \{j\} \neq \phi\} \cap S_c} \sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr} = 1$$
$$j \in J_{cd}, c \in C_g, g \in G, d \in D_w, w \in W \quad (1)$$

クラスの教科についての制約

$$\sum_{w \in W} \sum_{d \in D_w} \sum_{j \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}} \sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr} = n_s$$
$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G \quad (2)$$

$$l \leq \sum_{d \in D_w} \sum_{j \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}} \sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr} \leq u$$
$$(s, w, l, u) \in SN^{\mathrm{period}} \quad (3)$$

$$l\ y_{sd} \leq \sum_{j \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}} \sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr} \leq u\ y_{sd}$$
$$(s, d, l, u) \in SN^{\mathrm{day}} \quad (4)$$

$$l \leq \sum_{d \in D_w} y_{sd} \leq u \qquad (s, w, l, u) \in DN \quad (5)$$

$$2\ z_{sj_1j_2} \leq \sum_{r_1 \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sj_1r_1} + \sum_{r_2 \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sj_2r_2}$$
$$\leq z_{sj_1j_2} + 1$$
$$s \in S^2_c, c \in C_g, g \in G, (j_1, j_2) \in J^2_{cd},$$
$$j_1, j_2 \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}, d \in D_w, w \in W \quad (6)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{d \in D_w} \sum_{\substack{(j_1,j_2) \in J^2_{cd}, \\ j_1, j_2 \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}}} z_{sj_1j_2} = n^2_s$$
$$s \in S^2_c, c \in C_g, g \in G \quad (7)$$

$$z_{sj_1j_2} - 1 \leq x_{sj_1r} - x_{sj_2r} \leq 1 - z_{sj_1j_2}$$
$$s \in S^2_c, c \in C_g, g \in G, (j_1, j_2) \in J^2_{cd},$$
$$j_1, j_2 \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}, r \in R^1_s \cup R^2_s \quad (8)$$

教員についての制約

$$\sum_{s \in \{s | J^{\mathrm{avail}}_{sd} \cap \{j\} \neq \phi\} \cap S^{\mathrm{tea}}_t} \sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr} \leq 1$$
$$j \in J^{\mathrm{tea}}_{td}, t \in T, d \in D_w, w \in W \quad (9)$$

$$l \leq \sum_{s \in \{s | J^{\mathrm{avail}}_{sd} \cap \{j\} \neq \phi\} \cap S^{\mathrm{tea}}_t} \sum_{j \in J^{\mathrm{tea}}_{td}} \sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr}$$
$$\leq u + \sum_{i=1}^{v_{td}} i\ \gamma_{tdi}$$
$$(t, l, u) \in L, d \in D_w, w \in W \quad (10)$$

教室についての制約

$$\sum_{s \in \{s | J^{\mathrm{avail}}_{sd} \cap \{j\} \neq \phi\} \cap SR_r} x_{sjr} \leq 1$$
$$r \in R, j \in J_d, d \in D_w, w \in W \quad (11)$$

その他の制約

$$l \leq \sum_{s \in S} \sum_{j \in J} \sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr} \leq u + \alpha_{SJ}$$
$$(S, J, l, u) \in A_c, c \in C_g, g \in G \quad (12)$$

$$\sum_{(S,J) \in A_c} \alpha_{SJ} \leq UB_g \qquad c \in C_g, g \in G \quad (13)$$

$$\sum_{r \in R^1_s \cup R^2_s} x_{sjr} + \sum_{\hat{r} \in R^1_{\hat{s}} \cup R^2_{\hat{s}}} x_{\hat{s}\hat{j}\hat{r}} \leq 1 + \beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$$
$$(s, \hat{s}, j, \hat{j}) \in F \quad (14)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{d \in D_w} \sum_{j \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}} x_{sjr} = \sum_{i=1}^{n_s} i\ X_{sri}$$
$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, r \in R^2_s \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{n_s} X_{sri} \leq 1 \qquad s \in S_c, c \in C_g, g \in G, r \in R^2_s \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{v_{td}} \gamma_{tdi} \leq 1 \qquad t \in T, d \in D_w, w \in W \quad (17)$$

値域設定

$$x_{sjr} \in \{0, 1\} \qquad s \in S_c, c \in C_g, g \in G, j \in J^{\mathrm{avail}}_{sd},$$
$$d \in D_w, w \in W, r \in R^1_s \cup R^2_s \quad (18)$$

$$y_{sd} \in \{0, 1\}$$
$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, d \in D_w, w \in W \quad (19)$$

$$z_{sj_1j_2} \in \{0, 1\} \qquad s \in S^2_c, c \in C_g, g \in G, (j_1, j_2) \in J^2_{cd},$$
$$j_1, j_2 \in J^{\mathrm{avail}}_{sd}, d \in D_w, w \in W \quad (20)$$

$$\gamma_{tdn} \in \{0, 1\}$$
$$t \in T, d \in D_w, w \in W, n \in \{1, ..., v_{td}\} \quad (21)$$

$$0 \leq \alpha_{SJ} \leq v'_{SJ} \qquad (S, J) \in A_c, c \in C_g, g \in G \quad (22)$$

$$UB_g \geq 0 \qquad g \in G \quad (23)$$

$$\beta_{s\hat{s}j\hat{j}} \in \{0, 1\} \qquad (s, \hat{s}, j, \hat{j}) \in F \quad (24)$$

$$X_{srn} \in \{0, 1\}$$
$$s \in S_c, c \in C_g, g \in G, r \in R^2_s, n \in \{1, ..., n_s\} \quad (25)$$

各式が 2 節のそれぞれの制約を表している．制約 (a) を (1)，制約 (b) を (2)，制約 (f) を (3)，制約 (e) を (4)，制約 (g) を (5)，制約 (h) を (6)(7)，制約 (i) を (8)，制約 (j) を (9)，制約 (k) を (10)(17)，制約 (l) を (11)，制約 (m) を (12)(13)，制約 (n) を (14) が表している．また，制約 (c)(d) は複数の式で満たすように表されている．(18)∼(25) は値域設定である．

違反が分散するように目的関数は以下の通りとした．
minimize

$$\sum_{g\in G}\sum_{c\in C_g}\sum_{s\in S_c}\sum_{r\in R_s^2} p_{sr}^{\mathrm{room1}} \sum_{i=1}^{n_s} p_{sri}^{room2}\ X_{sri}$$
$$+\sum_{t\in T} p_t^{\mathrm{tea1}} \sum_{w\in W}\sum_{d\in D_w}\sum_{i=1}^{v_{td}} p_{tdi}^{tea2}\ \gamma_{tdi}$$
$$+\sum_{g\in G} p_g^{\mathrm{ub}}\ UB_g + \sum_{(s,\hat{s},j,\hat{j})\in F} p_{s\hat{s}j\hat{j}}^{\mathrm{avoid}}\ \beta_{s\hat{s}j\hat{j}}$$

6. 計算実験

5 節のモデルと数理最適化汎用ソルバーを利用して 3 つの実験を行った．実験 1 と実験 2 はモデル提案で対象とした小学校，実験 3 は千葉県市立の小学校を対象とした．期間は実験 1 と実験 3 が通常期間，実験 2 は文化祭準備期間である．各実験データの概要を表 1 に示す．

計算環境は 2.80GHz Hexa-Core Intel Xeon CPU X5660，

表 1 実験データ

	実験 1	実験 2	実験 3
小学校	対象小学校	対象小学校	公立小学校
期間の種類	通常	文化祭前	通常
学年数	6	6	7*1
クラス数	24	24	28
教員数	43	44	34
教科数	16	22	23
教室数	36	45	41
対象時限	1,312	1,252	760
意思決定変数の数	13,268	24,940	14,736
その他の変数の数	20,858	6,720	24,292
制約式の数	35,362	28,768	32,171
違反数	162	32	16
計算時間 (秒)	10 日以上	72.72	6.59

数理最適化汎用ソルバーは CPLEX12.5.0.0 を用いた．計算時間の上限は 10 日間とした．

実験の結果，実験 1 では最適解が得られなかった．しかし下界との gap は 11.45%の暫定解が得られた．一方，実験 2，3 では最適解が得られた．

実験 1 と実験 2，3 の計算時間には 1 万倍以上の差が存在する．生徒数や教員の人数・教室数といった小学校の規模は 2 つの小学校でほとんど変わらない．この差の原因は 1 クラスに関わる教員の数や，ある教室に対して使用を希望する教科の数等の違いと考える．

*1 6 学年と特別支援学級

図 1 は実験 1 で得られた暫定解による時間割の一部である．

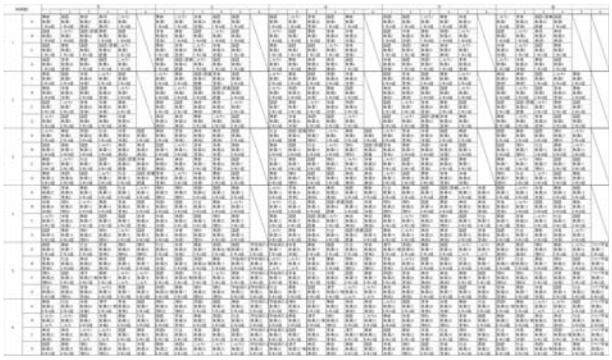

図 1 モデル化を基に作成された時間割 (教員名等は加工している)

7. おわりに

本研究では小学校時間割作成において学校，期間を問わない柔軟性のある数理最適化モデルの構築を行なった．そして，特徴が異なる小学校および期間に対して実験を行ない，時間割を作成した．

時間割を作成する上で，2 節の制約 (a)∼(l) はどの小学校や期間でも必ず考えられている．一方で小学校や期間による特徴は 2 節の「その他の制約」に分類される．実験 1 と実験 2 の小学校は，クラス担任教員以外の教員による教科は 1 限と 4 限に行わないようにし，実験 3 の小学校は同じ日に行なえない教科の組合せが存在する等の特徴が見られた．提案モデルでは 2 節の制約 (m) と制約 (n) によってそれぞれを表すことが出来る．このように多くの特徴を柔軟に表現出来る制約を考えたことで汎用性のあるモデルを構築することが出来たと考える．

また，違反をクラスや教員間でコントロール出来るようにしたことで，実用出来る時間割の作成が可能となった．

参考文献

[1] A. Schaerf. A Survey of Automated Timetabling. Artificial Intelligence Review, Vol. 13, No. 2, pp.87-127, 1999
[2] Nelishia Pillay. A survey of school timetabling research. Annals of Operations Research, Vol. 1, pp.261-293, 2014