

個別機会制約条件を含む最適化問題の 経験分布と差分進化による解法

田川 聖治^{1,a)} 宮永 峻²

概要：本稿では、個別機会制約条件を含む最適化問題（機会制約問題と呼ぶ）に対し、計算統計学の技法である経験分布と、進化アルゴリズムの1つである差分進化を組み合わせた解法を提案する。経験分布から分位点を推定することで、従来のモンテカルロ法よりも遥に少ない標本で解を評価できる。また、差分進化を用いることで、微分不可能な多峰性の関数を含む機会制約問題にも適用できる。さらに、経験分布による分位点の精度を高めるため、重み付き経験分布を採用する。最後に、提案した解法により機会制約問題の実効可能解が得られること、解の精度で重み付き経験分布は、経験分布に勝ることを示す。

1. はじめに

現実の世界における様々な意志決定に関わる諸問題は最適化問題として記述できる。しかし、それらの多くは予測の難しい不確実性を含む最適化問題である。このため、不確実性を含む最適化問題が長年に渡り研究されてきた。不確実性を含む最適化問題の記述法は幾つもあるが、非確率論的なものと確率論的なものに大別される [1]。

最悪状況を考慮するロバスト最適化問題 [2] は、非確率論的な問題の定式化である。現実の世界でも大きなリスクを避けるため、最悪状況を想定した意思決定が望まれる場合はあるが、一般的にロバスト最適化問題の解は保守的であり、経済的な合理性を欠くものとなる恐れがある。

機会制約問題は確率論的な問題の定式化の1つであり、ロバスト最適化問題の制約条件を確率的に緩和したものである。リスクを確率によって管理することで、合理的な解が得られるため、確率計画法 [3], [4] の分野で研究されてきた。しかし、機会制約問題の解を求めるためには、計算コストの大きなモンテカルロ法で生成した膨大な数の標本による確率の計算が必要となる。また、機会制約問題に対する既存の解法は、関数の微分可能性や凸性を前提とした非線形計画法に基づくものである [4]。近年、進化アルゴリズムを用いた機会制約問題の解法も報告されているが [5], [6]、解の評価では前述のモンテカルロ法が不可欠である。

ランドマイズド・アルゴリズム [7], [8] はロバスト最適化問題の解法の1つであり、ランダムに選んだ幾つかの標本

(シナリオ)のみを考えることで、ロバスト最適化問題を機会制約問題に緩和する。ただし、ランドマイズド・アルゴリズムはロバスト最適化問題の解の精度を確率により保証するもので、機会制約問題に対する解法ではない。

本稿では、機会制約問題の新たな解法を提案する。まず、累積分布関数 (CDF: Cumulative Distribution Function) を用いて機会制約問題を等価な問題に変換する。次に、計算統計学の技法である経験分布 (ECDF: Empirical CDF) [9] と、進化アルゴリズムの1つである差分進化 (DE: Differential Evolution) [10] を組み合わせた等価な問題の解法を提案する。提案する解法は、目的関数に対する単一の機会制約条件のみを考慮した先行研究の解法 [11] を、複数の個別機会制約条件を含む最適化問題にも適用できるように拡張したものである。ECDFから分位点を推定することで、従来のモンテカルロ法よりも遥に少ない標本で解を評価できる。また、DEを用いることで、微分不可能な多峰性の関数を含む機会制約問題にも適用できる。さらに、ECDFによって推定する分位点の精度を高めるため、重み付き経験分布 (W_ECDF: Weighted ECDF) [12] を採用するとともに、その妥当性を理論的に解説する。最後に、テスト問題を用いた数値実験により、提案した解法によれば機会制約問題の実効可能解が得られること、解の精度で W_ECDF は、既存の ECDF に勝ることを示す。

2. 機会制約問題

決定変数 $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^D$, $\mathbf{X} = [\underline{x}_j, \bar{x}_j]^D$, $j = 1, \dots, D$, 確率変数のベクトル $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$, 関数 $g_m: \mathbf{X} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$, 任意の充足水準 (確率) $\alpha_m \in (0, 1)$, $m \in \mathcal{I}_M = \{1, 2, \dots, M\}$ から、機会制約問題は以下のように定式化される。

¹ 近畿大学 理工学部
² 近畿大学 総合理工学研究科
^{a)} tagawa@info.kindai.ac.jp

$$\left[\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \quad \gamma \\ \text{sub. to} \quad \Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \geq \alpha_0 \\ \quad \Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0) \geq \alpha_m, \\ \quad m \in \mathcal{I}_M = \{1, 2, \dots, M\} \end{array} \right. \quad (1)$$

ただし、 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ は実数ベクトルであり、 Ξ は台とする。

機会制約条件は、個別機会制約条件と同時機会制約条件に大別される [4]。個別機会制約条件では、制約条件ごとに充足水準 α_m が与えられる。一方、同時機会制約条件では、式 (2) のように 1 つの充足水準 α で複数の制約条件を満たす必要がある。本稿で扱う機会制約問題は、式 (1) のような個別機会制約条件を含む最適化問題である。

$$\Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, m \in \mathcal{I}_M) \geq \alpha \quad (2)$$

3. 累積分布関数による定式化

式 (1) の機会制約問題を等価な問題に変換する。まず、ベクトル $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ は確率変数であるため、式 (1) の不確実な関数値 $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}$ も確率変数となり、その CDF は

$$F_m(z) = \Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq z) \quad (3)$$

である。関数値の CDF で機会制約条件を記述すると、

$$\left(\begin{array}{l} F_0(\gamma) = \Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \geq \alpha_0 \\ F_m(0) = \Pr(\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi : g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0) \geq \alpha_m \end{array} \right) \quad (4)$$

となる。したがって、式 (1) の機会制約問題は

$$\left[\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \quad \gamma \\ \text{sub. to} \quad F_0^{-1}(\alpha_0) \leq \gamma \\ \quad F_m^{-1}(\alpha_m) \leq 0, m \in \mathcal{I}_M \end{array} \right. \quad (5)$$

となる。分位点 $y_m^\alpha \in \mathcal{R}$ は以下のように定義される。

$$y_m^\alpha = F_m^{-1}(\alpha_m), m \in \{0\} \cup \mathcal{I}_M \quad (6)$$

機会制約問題の解 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ に依存する分位点を $y_m^\alpha(\mathbf{x})$ と表記する。分位点を式 (5) に代入して、式 (1) の機会制約問題と等価な問題を式 (7) のように定式化する。

$$\left[\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \quad \gamma = y_0^\alpha(\mathbf{x}) \\ \text{sub. to} \quad y_m^\alpha(\mathbf{x}) \leq 0, m \in \mathcal{I}_M \end{array} \right. \quad (7)$$

式 (3) の関数値の CDF が分かれば、式 (7) の最適化問題を解くことで、式 (1) の機会制約問題の解が得られる。ここで、確率変数 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ の確率密度関数 (PDF: Probability Density Function) $f(\boldsymbol{\xi})$ は既知とする。しかし、現実的な問題では関数 $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ が非常に複雑であったり、ブラック・ボックスであったりするため、 $f(\boldsymbol{\xi})$ から関数値の CDF を解析的に求めることはできない。したがって、式 (1) の機会制約問題において関数値の CDF は未知とする。

4. 累積分布関数の近似法

計算統計学 [9] の技法を用いて、関数値の標本から式 (3) の CDF を近似する関数を構築し、式 (7) の最適化問題における分位点 $y_m^\alpha(\mathbf{x})$, $m \in \{0\} \cup \mathcal{I}_M$ を推定する。

まず、確率変数 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ の標本 $\boldsymbol{\xi}^n$, $n = 1, \dots, N$ から、ある解 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ に対する関数値の標本 $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n)$ を求める。また、関数値の標本について以下の関数 ℓ を定義する。

$$\ell(g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \leq z) = \begin{cases} 1; & \text{if } g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \leq z \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

4.1 経験分布 (ECDF)

確率変数 $\boldsymbol{\xi}$ の PDF に従う標本 $\boldsymbol{\xi}^n \sim f(\boldsymbol{\xi})$ から関数値の標本 $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n)$ を求め、式 (9) より ECDF を構築する。

$$\mathbb{F}_m(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ell(g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \leq z) \quad (9)$$

式 (9) の $\mathbb{F}_m(z)$ を平滑化した $\tilde{\mathbb{F}}_m(z)$ で式 (3) の $F_m(z)$ を近似し、分位点を $\hat{y}_m^\alpha(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbb{F}}_m^{-1}(\alpha_m)$ と推定する。

ECDF の欠点として、通常 $\boldsymbol{\xi}$ の PDF には濃淡があり、 $f(\boldsymbol{\xi})$ の裾からの標本 $\boldsymbol{\xi}^n$ は少ないため、分位点を正確に推定するには、標本数 N を十分に大きく取る必要がある。

4.2 重み付き経験分布 (W_ECDF)

確率変数 $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ の標本を台 Ξ からあまねく採取するため、本来の分布 $f: \Xi \rightarrow (0, \infty)$ に代えて、一様分布 $u: \Xi \rightarrow c_p$, $c_p \in (0, 1)$ を用いる。すなわち、一様分布に従う標本 $\boldsymbol{\xi}^n \sim u(\boldsymbol{\xi})$ から関数値の標本 $g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n)$ を求め、それらに対応する各標本 $\boldsymbol{\xi}^n$ の PDF の値 $f(\boldsymbol{\xi}^n)$ で重みを付けた後、式 (10) によって W_ECDF [12] を構築する。

$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{F}_m(z) = \frac{1}{W} \sum_{n=1}^N f(\boldsymbol{\xi}^n) \ell(g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \leq z) \\ W = \sum_{n=1}^N f(\boldsymbol{\xi}^n) \end{array} \right. \quad (10)$$

以下に W_ECDF の妥当性を示す。式 (3) の CDF を算出するため、式 (11) の領域 $\mathbf{A}_m(z) \subseteq \Xi$ を考える。

$$\mathbf{A}_m(z) = \{\boldsymbol{\xi} \in \Xi \mid g_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq z\} \quad (11)$$

確率変数が $\boldsymbol{\xi} \sim f(\boldsymbol{\xi})$ とすると、式 (3) の CDF は

$$F_m(z) = \int_{\mathbf{A}_m(z)} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (12)$$

となる。一方、 $\boldsymbol{\xi} \sim u(\boldsymbol{\xi})$ とすると、式 (3) の CDF は

$$F_m(z) = \int_{\mathbf{A}_m(z)} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{u(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (13)$$

となる。式 (13) を考慮すると、標本が $\boldsymbol{\xi}^n \sim u(\boldsymbol{\xi})$ のとき、

関数値の標本から式 (3) の CDF を近似する関数は

$$F_m(z) = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{f(\xi^n)}{u(\xi^n)} \ell(g_m(\mathbf{x}, \xi^n) \leq z)}{\sum_{n=1}^N \frac{f(\xi^n)}{u(\xi^n)}} \quad (14)$$

となる。さらに、 $u(\xi^n) = c_p$ から式 (10) が得られる。

著者らは、一様分布 $u(\xi)$ よりも一様な標本 $\xi^n \in \Xi$, $n = 1, \dots, N$ を生成するため、 $u(\xi)$ に代えて超一様分布列 (Halton 列) を使用することを提唱している [11]。

5. 差分進化に基づく最適化手法

分位点の推定値を用いて、式 (7) の最適化問題の解を求めするため、DE に基づく最適化手法 (DECC: DE for Chance Constrained optimization problems) を提案する。

提案する DECC では、式 (7) の最適化問題の解候補を個体と呼び、 N_P 個の個体 \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, N_P$ の集団 \mathbf{P} を保持する。また、個体 \mathbf{x}_i に対する関数値の標本 $g_m(\mathbf{x}_i, \xi^n)$, $n = 1, \dots, N$ から推定された分位点を $\hat{y}_m^\alpha(\mathbf{x}_i)$ とする。

DE は他の多くの進化アルゴリズムと同様、制約条件のない最適化問題を対象とする。DECC では制約条件を扱う必要があるため、式 (7) の最適化問題の解候補 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ に対する制約違反量 $\phi(\mathbf{x})$ を以下のように定義する [13]。

$$\phi(\mathbf{x}) = \max\{0, \max_{m \in \mathcal{I}_M} \{\hat{y}_m^\alpha(\mathbf{x})\}\}. \quad (15)$$

上記の制約違反量が $\phi(\mathbf{x}) = 0$ ならば $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ は実行可能であり、 $\phi(\mathbf{x}) > 0$ ならば実行不可能であると判定する。

DE の探索性能は制御パラメータであるスケール係数 S_F と交叉率 C_R に左右される。そこで、DECC では制御パラメータの自動調整法 [14] を採用し、各個体 \mathbf{x}_i ごとにスケール係数 $S_{F,i}$ と交叉率 $C_{R,i}$ を割り当て、それらを適応的に変化させる。また、DE の世代交代モデルには同期型と非同期型がある [15]。DECC では後者の世代交代モデルを採用し、集団 \mathbf{P} 内の個体 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ を随時更新する。

以下に提案する DECC のアルゴリズムを示す。

手順 1 個体 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$, $i = 1, \dots, N_P$ をランダムに生成して初期集団 \mathbf{P} とする。全個体のスケール係数と交叉率を $S_{F,i} = 0.5$, $C_{R,i} = 0.9$ と初期化する [14]。

手順 2 各個体 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$, $i = 1, \dots, N_P$ を N 回評価し、 $g_m(\mathbf{x}_i, \xi^n)$ から $\hat{y}_m^\alpha(\mathbf{x}_i)$, $m \in \mathcal{I}_M$ を求める。

手順 3 終了条件を満たせば、実行可能な個体の中で目的関数値が最小の $\mathbf{x}_b \in \mathbf{P}$ を解とする。実行可能な個体が集団 \mathbf{P} に存在しなければ、探索は失敗である。

手順 4 各個体 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ を順番にターゲット・ベクトルに指定し、手順 4.1 から手順 4.3 を繰り返す。

手順 4.1 新たな個体の候補であるトライアル・ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^D$ を生成する。まず、現在のターゲット・ベクトル $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ の $S_{F,i}$ と $C_{R,i}$ から、スケール係数

S_F と交叉率 C_R を以下のように決める [14]。

$$S_F = \begin{cases} 0.1 + \text{rand}_1 \cdot 0.9; & \text{if } \text{rand}_2 < 0.1 \\ S_{F,i}; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

$$C_R = \begin{cases} \text{rand}_3; & \text{if } \text{rand}_4 < 0.1 \\ C_{R,i}; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

ただし、 $\text{rand}_k \in [0, 1]$ は一様乱数である。

次に、 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ とは別に集団 \mathbf{P} からランダムに異なる 3 つの個体 \mathbf{x}_{r1} , \mathbf{x}_{r2} , \mathbf{x}_{r3} ($i \neq r1 \neq r2 \neq r3$) を選び、DE の戦略 (DE/rand/1/bin) [10] を用いて、 \mathbf{u} の要素 $u_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, D$ を以下のように決める。

$$u_j = \begin{cases} x_{r1,j} + S_F(x_{r2,j} - x_{r3,j}); & \text{if } \text{rand}_j < C_R \vee j = j_r \\ x_{i,j}; & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

ただし、添字 $j_r \in [1, D]$ はランダムに選択する。

上記の結果、 \mathbf{u} の要素 u_j が探索範囲 $[\underline{x}_j, \bar{x}_j]$ の外側に作られた場合は、以下のように u_j を修正する。

$$u_j = \begin{cases} \underline{x}_j; & \text{if } u_j < \underline{x}_j \\ \bar{x}_j; & \text{if } u_j > \bar{x}_j. \end{cases} \quad (19)$$

手順 4.2 トライアル・ベクトル \mathbf{u} を N 回評価し、 $g_m(\mathbf{u}, \xi^n)$ から $\hat{y}_m^\alpha(\mathbf{u})$, $m \in \mathcal{I}_M$ を求める。

手順 4.3 トライアル・ベクトル \mathbf{u} とターゲット・ベクトル $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ を比較し、以下の 3 つの条件のうち、少なくとも 1 つが満たされれば、 \mathbf{u} が $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ に勝ると判定し、直ちに $\mathbf{x}_i \in \mathbf{P}$ を \mathbf{u} で置き換える。

- $\phi(\mathbf{u}) = 0 \wedge \hat{y}_0^\alpha(\mathbf{u}) \leq \hat{y}_0^\alpha(\mathbf{x}_i)$
- $\phi(\mathbf{u}) = 0 \wedge \phi(\mathbf{x}_i) > 0$
- $\phi(\mathbf{u}) > 0 \wedge \phi(\mathbf{u}) \leq \phi(\mathbf{x}_i)$

また、その場合は $S_{F,i} = S_F$, $C_{R,i} = C_R$ とする。

手順 5 手順 3 に戻る。

6. 数値実験

提案した DECC のプログラムを MATLAB® で実装し、DECC に W.ECDF を組み込んだ DECC(W) と、DECC に ECDF を組み込んだ DECC(E) の性能を比較した。

6.1 経験確率による検証

DECC で得られた解 $\mathbf{x}_b \in \mathbf{X}$ が式 (1) の機会制約条件を実際に満たすか否か、モンテカルロ法で生成した膨大な数の標本から経験確率 $\hat{\alpha}_m$ を計算することで検証する。

標本 $\xi^n \sim f(\xi)$, $n = 1, \dots, N$ から経験確率は

$$\hat{\alpha}_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ell(g_m(\mathbf{x}_b, \xi^n) \leq z) \quad (20)$$

となる。ここで、任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ と $\delta \in (0, 1)$ から式 (21)

のように標本数 N を決めると、確率の理論値 α_m に対する経験確率 $\hat{\alpha}_m$ の精度が式 (22) により保証される [7].

$$N \geq \frac{1}{2\epsilon^2} \log\left(\frac{2}{\delta}\right) \quad (21)$$

$$\Pr(|\alpha_m - \hat{\alpha}_m| \leq \epsilon) \geq 1 - \delta \quad (22)$$

本稿では、式 (21) で $\epsilon = 0.01$, $\delta = 10^{-3}$ と設定し、 $N = 2,649,159$ の標本から経験確率 $\hat{\alpha}_m$ を計算した。

6.2 テスト問題

確率変数を含まない以下のテスト問題を考える。

$$\left[\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \quad g_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{sub. to} \quad g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 4)^2 - 2x_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad g_2(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad -5 \leq x_j \leq 10, j = 1, 2 \end{array} \right. \quad (23)$$

上記のテスト問題の最適解は $\mathbf{x}^\dagger = (2, 2)$ であり、各関数値は $g_0(\mathbf{x}^\dagger) = 4$, $g_1(\mathbf{x}^\dagger) = 0$, $g_2(\mathbf{x}^\dagger) = 0$ となる。

6.3 機会制約問題 (その1)

式 (23) のテスト問題に対して、互いに独立で正規分布に従う確率変数を導入し、以下の機会制約問題を定義する。

$$\left[\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \quad g_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{sub. to} \quad g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 4)^2 - 2x_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad \Pr(-\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 \leq 0) \geq \alpha \\ \quad \quad \quad -5 \leq x_j \leq 10, j = 1, 2, \alpha = 0.95 \\ \quad \quad \quad \xi_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) = \mathcal{N}(1, 0.1^2) \\ \quad \quad \quad \xi_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(2, 0.2^2) \\ \quad \quad \quad \xi_3 \sim \mathcal{N}(\mu_3, \sigma_3^2) = \mathcal{N}(2, 0.2^2) \end{array} \right. \quad (24)$$

正規分布の再生性から、式 (24) の機会制約問題は、確率変数を含まない式 (25) の最適化問題に変換できる。

$$\left[\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \quad g_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{sub. to} \quad g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 4)^2 - 2x_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad -\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - \mu_3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\sigma(\mathbf{x}) \Phi^{-1}(1 - \alpha) \leq 0 \\ \quad \quad \quad -5 \leq x_j \leq 10, j = 1, 2 \end{array} \right. \quad (25)$$

ただし、 $\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2}$ である。また、標準正規分布の CDF を Φ とし、その逆関数を Φ^{-1} とする。

式 (25) の最適化問題に DE を適用し、式 (24) の機会制約問題の最適解 $\mathbf{x}^* = (2.153, 1.705)$ を求めた。目的関数値 $\gamma^* = g_0(\mathbf{x}^*) = 4.722$, 経験確率 $\hat{\alpha} = 0.950$ である。

図 1 に式 (23) のテスト問題の決定変数空間における実行可能領域を示す。また、図 1 の ● 印は式 (23) のテスト問

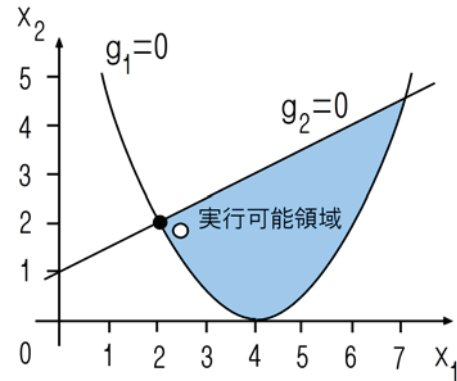


図 1 テスト問題の実効可能領域

表 1 DECC(W) と DECC(E) による解の比較 (その 1)

$N = 20$	DECC	AVE	MIN	MAX	TEST
γ_b	W_ECDF	4.571	4.353	4.956	
	ECDF	3.830	3.714	4.093	**
$\eta(\gamma_b)$	W_ECDF	0.173	0.011	0.369	
	ECDF	0.892	0.629	1.008	**
$\eta(\mathbf{x}_b)$	W_ECDF	0.107	0.017	0.186	
	ECDF	0.459	0.356	0.521	**
$\hat{\alpha}$	W_ECDF	0.863	0.783	0.946	
	ECDF	0.292	0.206	0.456	**
$N = 100$	DECC	AVE	MIN	MAX	TEST
γ_b	W_ECDF	4.810	4.789	5.038	
	ECDF	3.849	3.780	3.943	**
$\eta(\gamma_b)$	W_ECDF	0.087	0.066	0.315	
	ECDF	0.873	0.779	0.942	**
$\eta(\mathbf{x}_b)$	W_ECDF	0.030	0.025	0.071	
	ECDF	0.431	0.366	0.469	**
$\hat{\alpha}$	W_ECDF	0.964	0.962	0.967	
	ECDF	0.330	0.272	0.438	**

題の最適解 $\mathbf{x}^\dagger \in \mathfrak{R}^2$ であり、○印は式 (24) の機会制約問題の最適解 $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{R}^2$ である。前者 \mathbf{x}^\dagger は実効可能領域の境界上に存在するが、後者 \mathbf{x}^* は内側に位置している。

次に、式 (24) の機会制約問題を式 (7) のような等価な問題に変換し、DECC(W) と DECC(E) を適用して最良解 $\mathbf{x}_b \in \mathbf{X}$ と目的関数値 $\gamma_b \in \mathfrak{R}$ を求めた。ただし、各 DECC の集団サイズは $N_P = 20$, 終了条件は世代数 50, 標本数は $N = 20$ と $N = 100$ とし、試行回数は 30 とした。

各 DECC で得られた解 $\mathbf{x}_b \in \mathbf{X}$ の評価指標として、前述の経験確率 $\hat{\alpha}$ のほか、式 (26) の最良解 \mathbf{x}_b と最適解 \mathbf{x}^* との距離、および、式 (27) の目的関数値の差を用いた。

$$\eta(\mathbf{x}_b) = \sqrt{\sum_{j=1}^D (x_{j,b} - x_j^*)^2} \quad (26)$$

$$\eta(\gamma_b) = |\gamma_b - \gamma^*| \quad (27)$$

表 1 に実験結果を示す。表 1 では 30 回の試行における各評価指標の平均値, 最小値, 最大値を比べている。また、DECC(W) と DECC(E) との違いを Wilcoxon 検定で調べ

表 2 DECC(W) と DECC(E) による解の比較 (その 2)

$N = 20$	DECC	AVE	MIN	MAX	TEST
γ_b	W_ECDF	4.175	4.151	4.521	**
	ECDF	4.129	4.103	4.281	
$\hat{\alpha}_0$	W_ECDF	0.957	0.957	0.957	**
	ECDF	0.827	0.732	0.950	
$\hat{\alpha}_1$	W_ECDF	0.977	0.969	1.000	**
	ECDF	0.955	0.846	1.000	
$\hat{\alpha}_2$	W_ECDF	0.970	0.954	1.000	**
	ECDF	0.986	0.904	1.000	
$N = 100$	DECC	AVE	MIN	MAX	TEST
γ_b	W_ECDF	4.169	4.137	4.501	**
	ECDF	4.137	4.119	4.182	
$\hat{\alpha}_0$	W_ECDF	0.952	0.951	0.953	**
	ECDF	0.907	0.842	0.947	
$\hat{\alpha}_1$	W_ECDF	0.958	0.940	1.000	-
	ECDF	0.955	0.901	0.991	
$\hat{\alpha}_2$	W_ECDF	0.971	0.949	1.000	-
	ECDF	0.979	0.919	1.000	

た結果も示している。印「**」は危険率 1% で両者に有意な差があり、印「-」は差がないことを意味する。

表 1 から、目的関数値 γ_b で DECC(E) は DECC(W) に勝るが、解の精度の評価指標である $\eta(\mathbf{x}_b)$ と $\eta(\gamma_b)$ で DECC(W) は DECC(E) に勝っている。また、経験確率 $\hat{\alpha}$ の値から、DECC(E) では機会制約問題の実行可能解がまったく得られないが、DECC(W) は標本数を $N = 100$ とすることで、実行可能解を全試行で求めている。

6.4 機会制約問題 (その 2)

式 (23) のテスト問題の各決定変数に対して正規分布に従う摂動を加え、以下の機会制約問題を定義する。

$$\begin{cases}
 \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} & \gamma \\
 \text{sub. to} & \Pr(g_0(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \leq \gamma) \geq \alpha_0 \\
 & \Pr(g_1(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \leq 0) \geq \alpha_1 \\
 & \Pr(g_2(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \leq 0) \geq \alpha_2 \\
 & -5 \leq x_j \leq 10, j = 1, 2 \\
 & \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.95 \\
 & \xi_j \sim \mathcal{N}(0, 0.01^2), j = 1, 2
 \end{cases} \quad (28)$$

式 (28) の機会制約問題を式 (7) のような等価の問題に変換した後、DECC(W) と DECC(E) を適用して最良解 $\mathbf{x}_b \in \mathbf{X}$ と目的関数値 $\gamma_b \in \mathbb{R}$ を求めた。各 DECC の制御パラメータ、終了条件、試行回数は前述の通りである。

表 1 と同様の形式で、実験結果を表 2 に示す。表 2 から、目的関数値 γ_b で DECC(E) は DECC(W) に勝る。しかし、DECC(E) では標本数 $N = 100$ の場合でも、経験確率が $\hat{\alpha}_0 < 0.95$ となり、機会制約問題の実行可能解が得られていない。一方、DECC(W) では標本数 N に関わらず、大半の試行において実行可能解が得られている。

7. おわりに

本稿では、複数の個別機会制約条件を含む最適化問題に対して、DE と W_ECDF を組み合わせた解法を提案した。また、テスト問題を用いた数値実験により、提案した解法によって機会制約問題の実行可能解が得られること、解の精度で W_ECDF は ECDF に勝ることを示した。

今後の課題は、分位点の推定精度と DE の探索効率の観点から、W_ECDF の構築に適した標本数 N について検討することである。また、同時機会制約条件も扱えるように、現在の W_ECDF と解法を拡張する必要もある。

参考文献

- [1] Parkinson, A., Sorensen, C. and Pourhassan, N.: A general approach for robust optimal design, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, No. 1, pp. 74–80 (1993).
- [2] 武田朗子: ロバスト最適化法とその動向, 電気学会論文誌 C, Vol. 134, No. 6, pp. 760–764 (2014).
- [3] Prékopa, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers (1995).
- [4] 椎名孝之: 確率計画法, 朝倉書店 (2015).
- [5] Poojari, C. A. and Varghese, B.: Genetic algorithm based technique for solving chance constrained problems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 185, pp. 1128–1154 (2008).
- [6] Liu, B., Zhang, Q., V., F. F. and E., G. G. G.: An efficient evolutionary algorithm for chance-constrained bi-objective stochastic optimization, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 17, No. 6, pp. 786–796 (2013).
- [7] Tempo, R., Calafiore, G. and Dabbene, F.: *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems: With Applications*, Springer (2012).
- [8] 藤崎泰正, 和田孝之: (解説) ロバスト凸最適化のためのランダムマイズドアルゴリズム, 計測と制御, Vol. 50, No. 11, pp. 950–955 (2011).
- [9] Martinez, A. R. and Martinez, W. L.: *Computational Statistics Handbook with MATLAB®*, Chapman & Hall/CRC (2008).
- [10] Price, K. V., Storn, R. M. and Lampinen, J. A.: *Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization*, Springer (2005).
- [11] 田川聖治, 宮永 峻: 重み付き経験分布と差分進化による機会制約問題の解法, システム・情報部門学術講演会, 計測自動制御学会, pp. 93–96 (2016).
- [12] Tagawa, K.: A statistical sensitivity analysis method using weighted empirical distribution function, *ICISIP2006 Proceedings*, Kyoto, Japan, IIAE, pp. 79–84 (2016).
- [13] Deb, K.: An efficient constraint handling method for genetic algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 186, pp. 311–338 (2000).
- [14] Brest, J., Greiner, S., Bošković, B., Merink, M. and Žumer, V.: Self-adapting control parameters in differential evolution: a comparative study on numerical benchmark problems, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 10, No. 6, pp. 646–657 (2006).
- [15] 田川聖治: (解説) 差分進化の基礎と並行プログラミング, システム/制御/情報, Vol. 59, No. 2, pp. 47–52 (2015).

付 録

式 (24) の機会制約問題が、式 (25) のような確率変数を含まない最適化問題に変換できることを示す。

式 (24) の機会制約条件は

$$\begin{cases} \Pr(-\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 \leq 0) \geq \alpha \\ \xi_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) = \mathcal{N}(1, 0.1^2) \\ \xi_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(2, 0.2^2) \\ \xi_3 \sim \mathcal{N}(\mu_3, \sigma_3^2) = \mathcal{N}(2, 0.2^2) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

である。ここで、以下の確率変数 $y \in \mathfrak{R}$ を考える。

$$y = -\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 \quad (\text{A.2})$$

正規分布の再生性より、上記の確率変数 y は平均 $\mu(\mathbf{x})$ 、分散 $\sigma(\mathbf{x})^2$ の正規分布に従う。

$$\begin{cases} y \sim \mathcal{N}(\mu(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x})^2) \\ \mu(\mathbf{x}) = -\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - \mu_3 \\ \sigma(\mathbf{x})^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

式 (A.1) の機会制約条件を確率変数 y で記述すると

$$\Pr(y \leq 0) \geq \alpha \quad (\text{A.4})$$

となる。さらに、確率変数 y を標準化すると

$$\Pr\left(s = \frac{y - \mu(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})} \leq \frac{-\mu(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}\right) \geq \alpha \quad (\text{A.5})$$

となる。ここで、確率変数 s は標準正規分布に従う。

標準正規分布の CDF を Φ とすると、式 (A.5) は

$$\Phi\left(\frac{-\mu(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}\right) \geq \alpha \quad (\text{A.6})$$

となる。さらに、 Φ の逆関数を取ると次式が得られる。

$$-\mu(\mathbf{x}) \geq \sigma(\mathbf{x}) \Phi^{-1}(\alpha) \quad (\text{A.7})$$

式 (A.7) の項を移項し、 $-\Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ を考慮すると、式 (25) の最適化問題の制約条件が導かれる。

$$-\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - \mu_3 - \sigma(\mathbf{x}) \Phi^{-1}(1 - \alpha) \leq 0 \quad (\text{A.8})$$