Vol.2017-AL-161 No.4
2017/1/17

ダイグラフの頂点の入支配集合と出支配集合への分割問題

中村 洸介[1]　荒木 徹[2,a)]

概要：与えられたダイグラフ（有向グラフ）の頂点集合を，入支配集合と出支配集合へ分割することが可能かどうかを判定する問題を考える．任意の連結な無向グラフの頂点集合は，必ず２つの支配集合への分割が存在することが知られている．しかしながら，ダイグラフにおいては同様のことが必ずしも成り立つわけではない．本発表では，特にアサイクリックダイグラフ（DAG）について考える．主な結果は次の２点である．(1) DAG において，入支配集合と出支配集合への分割が存在するかどうかを判定する問題は NP 完全である，(2) 任意に向き付けされた木が与えられたとき，その判定は多項式時間で可能である．

キーワード：ダイグラフ，支配集合，入支配集合，出支配集合，向き付けグラフ．

Partitioning Vertices into In- and Out-Dominating Sets in Digraphs

Kosuke Nakamura[1]　Toru Araki[2,a)]

Abstract: For a connected graph, it is known that there exists a partition of the vertex set into two dominating sets of the graph. However, for a digraph, there does not always exist such partition of the vertex set. We consider the problem of determining whether there is a partition of the vertex set into in- and out-dominating sets of the digraph. In this paper, we obtain the following results: (1) The decision problem is NP-complete even if a given digraph is acyclic, and (2) for a oriented tree, there is a polynomial time algorithm for deciding the existence of such partition.

Keywords: Digraph, dominating set, in-dominating set, out-dominating set, oriented graph.

1. はじめに

無向グラフ $G=(V,E)$ と頂点の部分集合 $S \subseteq V$ を考える．任意の $u \in V \setminus S$ に対して，$uv \in E$ である頂点 $v \in S$ が存在するとき，S を G の**支配集合**であるという．支配集合 S の任意の 2 頂点が隣接しないとき，それを**独立支配集合**という．また任意の $u \in V$ に対して，$uv \in E$ である頂点 $v \in S$ が存在するとき，S は G の**全支配集合**であるという．グラフの支配集合については，Haynes, Hedetniemi, Slater による書籍 [14], [15] や Chang によるサーベイ [5] に詳しくまとめられている．

グラフの支配問題では，主に与えられたグラフに対して，その最小の支配集合を求めることが問題とされる．これはグラフ理論における基本的で有名な NP 完全問題の一つであり [10]，非常に多くの研究が行われている．それとは異なる方向の研究として，グラフに複数の互いに素な支配集合が存在するかどうかを考える問題が研究されている．G が連結グラフならば，G には互いに素な支配集合が少なくとも 2 個存在することが知られている [8]．グラフ G の頂点集合の分割 $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ は，すべての V_i が G の支配集合であるとき，その分割を G の **domatic partition** といい，最大の k の値を G の **domatic number** という．G の domatic number を求める問題は NP-hard であることが知られており [10]，いくつかのクラス，例えば strongly chordal graph では多項式時間で計算可能であることが示されている [18]．また，2 個の互いに素な支配集合が存在するかどうかを考える問題も研究されている．Henning ら

1　群馬大学大学院理工学研究科
Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515, Japan
2　群馬大学大学院理工学府
Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515, Japan
a)　arakit@gunma-u.ac.jp

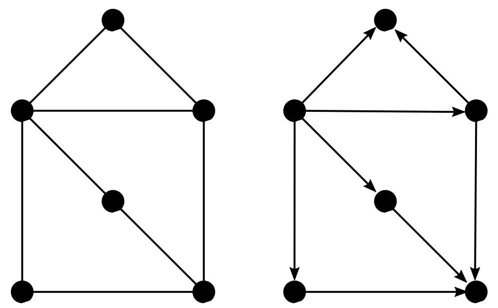

図 1　無向グラフとその向き付けグラフの例.

は，グラフに素な 2 個の最小支配集合が存在することや，2 個の素な独立支配集合が存在するかどうかを判定する問題が NP 完全であることを示した [16]．また，Henning らは，グラフに素な支配集合と全支配集合が存在するための条件について考察している [17].

本論文では，対象を有向グラフとし，互いに素な支配集合が存在するかどうかを考える．有向グラフ G に対して，その頂点集合を $V(G)$，辺集合（弧集合）を $E(G)$ と書く．本論文の有向グラフには，自己ループと多重辺は存在しないとする．頂点 v の**出近傍** $N^+(v)$ と**入近傍** $N^-(v)$ を以下のように定義する.

$$N^+(v) = \{u \mid (v,u) \in E(G)\},$$
$$N^-(v) = \{u \mid (u,v) \in E(G)\}.$$

$N^+(v)$ の要素数を v の**出次数**といい $\mathrm{od}_G(v)$ で表す．同様に $N^-(v)$ の要素数を v の**入次数**といい $\mathrm{id}_G(v)$ で表す．v の**次数**を $\deg_G(v) = \mathrm{od}_G(v) + \mathrm{id}_G(v)$ と定義する．$S \subseteq V(G)$ とするとき，$G - S$ を G から S のすべての頂点とそれらと接続する有向辺を取り除いた有向グラフとする．また H を G の部分グラフとしたとき，$G - V(H)$ を $G - H$ と表す.

$S \subseteq V(G)$ とする．任意の頂点 $u \in V(G) \setminus S$ に対して，$(u,v) \in E(G)$ であるような頂点 $v \in S$ が存在するとき，S を G の**入支配集合**という．また，任意の頂点 $u \in V(G) \setminus S$ に対して，$(v,u) \in E(G)$ であるような頂点 $v \in S$ が存在するとき，S を G の**出支配集合**という．有向グラフの支配問題についても，様々な研究が行われている [1], [2], [3], [4], [6], [7], [9], [11], [12], [13]．

H を無向グラフとする．H の各辺 uv を，有向辺 (u,v) または (v,u) のいずれか一方で置き換えることによって得られる有向グラフを，H の**向き付けグラフ**と呼ぶ．図 1 に，無向グラフとその向き付けグラフの例を示す.

本論文では，有向グラフに素な出支配集合と入支配集合が存在するかどうかという問題を考える．有向グラフ G に対して，その頂点集合の分割 $V(G) = ID \cup OD$ が存在し，ID が G の入支配集合でありかつ OD が G の出支配集合であるとき，その有向グラフ G は**分割可能である**または **IOP である**と呼ぶこととする．特に本論文では，向き付けグラフが IOP であるかどうかを判定する問題を取り扱う．第 2 節では，向き付けグラフが IOP であるかどうかを判定する問題が NP 完全であることを証明する．その後，第 3 節では，向き付け木が IOP かどうかが多項式時間で判定可能であることを示す.

2. NP 完全性

IOP 問題の NP 完全性を証明する．考える問題は，以下のものである.

IOP PROBLEM

- Instance : 有向グラフ D
- Question : 次のような頂点集合 $V(D)$ の分割 $I \cup O$ が存在するか : I と O が，それぞれ D の入支配集合と出支配集合である.

IOP Problem は，D を DAG に限定しても NP 完全であることを証明する．これは NP 完全問題の一つである 3-SAT から帰着する [10].

3-SAT

- Instance : 変数の集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，節の集合 $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$，ここで $|C_i| = 3$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Question : すべての節に true リテラルが少なくとも一つ存在するような，X への真偽割り当てが存在するか？

定理 2.1. *IOP Problem は，D を DAG に限定しても NP 完全である.*

Proof.　明らかに IOP Problem は NP に属する．3-SAT 問題のインスタンス ϕ の変数の集合を $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，節の集合を $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ とする．ここで，どのリテラルも，ある C_j に含まれると仮定しても一般性を失わない．このとき，上のインスタンス ϕ から有向グラフ $G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$ を以下のように構成する.

$$
\begin{aligned}
V_\phi &= X \cup C \cup \{\overline{x_i} \mid x_i \in X\} \cup \{d_i \mid 1 \le i \le n\} \\
E_\phi &= \{(C_j, x_i) \mid x_i \in C_j\} \\
&\quad \cup \{(C_j, \overline{x_i}) \mid \overline{x_i} \in C_i\} \\
&\quad \cup \{(x_i, \overline{x_i}) \mid 1 \le i \le n\} \\
&\quad \cup \{(x_i, d_i), (\overline{x_i}, d_i) \mid 1 \le i \le n\}.
\end{aligned}
$$

G_ϕ はアサイクリックダイグラフであり，明らかに多項式時間で ϕ から G_ϕ を構築できる.

続いて ϕ が充足可能であるための必要十分条件が G_ϕ が IOP であることを示す.

まず 3-SAT のインスタンス ϕ が充足可能であると仮定し，このときの真偽割り当てを $\alpha : X \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$ とする．G_ϕ の頂点の部分集合 ID, OD を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
ID &= \{x_i \mid \alpha(x_i) = \text{true}\} \cup \{\overline{x_i} \mid \alpha(x_i) = \text{false}\} \\
&\quad \cup \{d_i \mid 1 \le i \le n\} \\
OD &= \{x_i \mid \alpha(x_i) = \text{false}\} \cup \{\overline{x_i} \mid \alpha(x_i) = \text{true}\} \cup C
\end{aligned}
$$

このとき，$V_\phi = ID \cup OD$ かつ $ID \cap OD = \emptyset$ であるため，$ID \cup OD$ は G_ϕ の頂点集合の分割である．また，ID と OD が G_ϕ のそれぞれ入支配集合と出支配集合であることは，簡単に確かめられる．したがって，G_ϕ はIOP である．

逆に G_ϕ が IOP であると仮定する．ここで，G_ϕ の入支配集合と出支配集合の分割を $ID \cup OD$ とする．このとき，任意の整数 $1 \le i \le n$ に対して，$\mathrm{od}_{G_\phi}(d_i) = 0$ であるため，$d_i \in ID$ である．また，任意の整数 $1 \le j \le m$ に対して，$\mathrm{id}_{G_\phi}(C_j) = 0$ であるため，$C_i \in OD$ である．したがって，頂点 d_i は x_i と $\overline{x_i}$ のいずれかの頂点によって出支配される．ここで，$x_i \in OD$ かつ $\overline{x_i} \in OD$ の場合を考える．このとき，G_ϕ の構成法より $(x_i, \overline{x_i}) \in E(G_\phi)$ であるため，$\overline{x_i}$ は自身と x_i によって出支配される．ここで，$\overline{x_i} \in ID$ としても，d_i は自身と x_i に入支配かつ出支配され，$\overline{x_i}$ もまた自身と x_i によって入支配かつ出支配される．したがって，$x_i \in ID$ ならば $\overline{x_i} \in OD$ であり，$x_i \in OD$ ならば $\overline{x_i} \in ID$ であるような G_ϕ の入支配集合と出支配集合の分割が存在する．ここで，V_ϕ から ϕ のリテラルへの真偽割り当て関数 α を次のように定義する：$v \in ID$ ならば，$\alpha(v) = \text{true}$，$v \in OD$ ならば，$\alpha(v) = \text{false}$．任意の整数 $1 \le j \le m$ に対して，C_j は少なくとも 1 つの ID の頂点に入支配されるため，ϕ の各節に少なくとも 1 つの true のリテラルが存在する．したがって，ϕ は充足可能である．

以上より，一般のアサイクリックダイグラフに対する IOP 問題は NP 完全問題である． □

3. 向き付け木に対する IOP 問題

この節では，向き付け木が IOP であるかどうかを判定することが多項式時間で可能であることを示す．アルゴリズムを設計するために，まず向き付けパスについて考え，その後向き付けスパイダー，最後に一般の向き付け木について考える．

3.1 向き付けパスに対する IOP 問題

まず向き付けパスに対する IOP 問題について考える．

頂点集合 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を持つ**有向パス**とは，弧集合として $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ を持つ有向グラフである．向き付けパス P の部分有向パス P' は，P' が P のどの部分有向パスにも真に含まれないとき，P' は P の**極大部分有向パス**であるという．P が偶数個の頂点を持つ極大部分有向パスを少なくとも 1 つ含むならば，パス P は **good** であるという．また，P の全ての極大部分有向パスが奇数個の頂点を持つならば，パス P は **bad** であるという．図 2 に，有向パス，向き付けパスの例を示す．

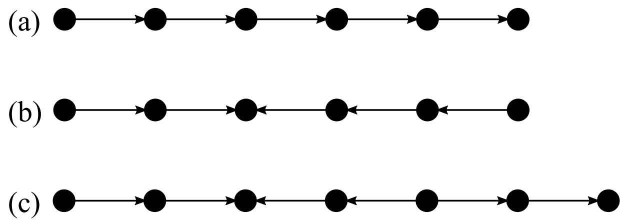

図 2 向き付けパスの例．(a) は有向パス，(b) は good な向き付けパス，(c) は bad な向き付けパス．

次の補題は容易に確かめることができる．

補題 3.1. 有向パス P が *IOP* であるための必要十分条件は，P が偶数個の頂点を持つことである．

補題 3.2. 向き付けパス P が *good* ならば，P は *IOP* である．

Proof. P の頂点集合を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする．また，任意の $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して (v_i, v_{i+1}) または (v_{i+1}, v_i) のいずれかが有向辺であるとする．頂点の部分集合 $R(P) = \{v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_p}\}$，$k_1 < k_2 < \cdots < k_p$ を，出次数または入次数が 0 の頂点の集合とする．このとき，$v_1 = v_{k_1}$, $v_n = v_{k_p}$ である．さらに，v_{k_j} と $v_{k_{j+1}}$ を両端とする極大有向パスを P_j とする．図 3 に例を示す．

もし P が good であるなら，P は $p-1$ 個の有向パスに分割でき，かつすべての有向パスが偶数個の頂点を持つようにできることを，p に関する帰納法で証明する．

$p = 2$ のときは，P 自身が偶数個の頂点を持つ有向パスである．

出次数または入次数が 0 の頂点が $p-1$ 個以下の任意の向き付けパス P' に対して，P' が good ならば，そのパスは偶数個の頂点を持つ有向パスへ分割することができると仮定する．P を $|R(P)| = p$ である good な向き付けパスとする．

(Case 1) P_1 または P_{p-1} が奇数個の頂点を持つとき．

P_1 が奇数個の頂点を持つとする．P_{p-1} の場合も同様に証明できる．$P'_1 = P_1 - \{v_{k_2}\}$ は，偶数個の頂点を持つ有向パスである．また，P が good であることから，$P' = P - P'_1$ は good パスであり，かつ $|R(P')| = p-1$ である．帰納法の仮定から P' は偶数個の頂点を持つ有向パスへ分割できる．したがって，P'_1 と P' の分割から，P の分割を得ることができる．

(Case 2) P_1 と P_{p-1} がいずれも偶数個の頂点を持つとき．

P_1 は偶数個の頂点を持つ有向パスである．P_{p-1} も偶数個の頂点を持つので，$P' = P - P_1$ は good パスであり，かつ $|R(P')| = p-1$ を満たす．よって Case 1 と同様に P の有向パスへの分割を得ることができる．

以上より，P が good であるなら，P は偶数個の頂点を持つ有向パスへ分割できる．分割によって得られたぞれぞれの有向パスは偶数個の頂点を持つので，補題 3.1 より入

支配集合と出支配集合へ分割できる．それらすべての入支配集合の和集合と出支配集合の和集合は，P の入支配集合と出支配集合への分割を作る．したがって P は IOP である． □

定理 3.3. 向き付けパス P が *IOP* であるための必要十分条件は，P が *good* であることである．

Proof. 補題 3.2 より，P が good ならば P は IOP である．

よって逆を背理法を用いて証明する．すなわち，ある向き付けパス P が存在し，P が IOP であり，かつ bad であると仮定する．さらに，P がそのような向き付けパスの中で，頂点数が最小のものであるとする．P の入支配集合と出支配集合への分割を $ID \cup OD$ とする．P の端点 v_1 を考える．一般性を失わずに $\mathrm{od}_P(v_1) = 1$ かつ $\mathrm{id}_P(v_1) = 0$ と仮定する．v_1 から隣接する頂点を v_2 とする．このとき，$v_1 \in OD$ かつ $v_2 \in ID$ である．$\mathrm{id}_P(v_2) = 2$ と仮定すると，P が 2 頂点の極大部分有向パスを持ってしまうので，$\mathrm{id}_P(v_2) = 1$ かつ $\mathrm{od}_P(v_2) = 1$ である．

以上のことから，$P - \{v_1, v_2\}$ もまた IOP であり，かつ bad な向き付けパスとなる．これは P の最小性に矛盾する． □

3.2 向き付けスパイダーに対する IOP 問題

続いて，向き付けスパイダーに対する IOP 問題について考える．

次数が 3 以上の頂点を高々 1 個持つ無向木を**スパイダー**と呼ぶ．次数が 3 以上の頂点を持たない木はパスであり，それは 3.1 節で考察したので，この後に扱うスパイダーは次数が 3 以上の頂点をちょうど 1 個持つものとする．次数が 3 以上の頂点を，そのスパイダーの**センター**という．

S を r をセンターとする向き付けスパイダーとする．r と S の端点を両端とする向き付けパスを，S の leg と呼ぶ．集合 $RI(S)$ を，S の leg P で $\mathrm{id}_P(r) = 1$ であるものの集合とする．同様に，$RO(S)$ を S の leg P で $\mathrm{od}_P(r) = 1$ であるものの集合とする．さらに、$MRI(S)$ を $MRO(S)$ を以下のような向き付けパスの集合とする。

$$MRI(S) = \{P - \{r\} \mid P \in RI(G)\}$$
$$MRO(S) = \{P - \{r\} \mid P \in RO(G)\}.$$

定理 3.4. S を r をセンターとする向き付けスパイダーとする．S が *IOP* であるための必要十分条件は以下の条件のいずれかを満たすことである．

(1) $RI(S)$ が *good* パスを含み，かつ $MRO(S) = \emptyset$ または $MRO(S)$ のすべての向き付けパスが *good* である．

(2) $RO(S)$ が *good* パスを含み，かつ $MRI(S) = \emptyset$ または $MRI(S)$ のすべての向き付けパスが *good* である．

Proof. ($\Rightarrow$) S が *IOP* であると仮定し，S の入支配集合と出支配集合への分割を $ID \cup OD$ とする．$r \in ID$ と仮定すると，S が条件 (1) を満たすことを示す．同様にして，$r \in OD$ の場合に，S が条件 (2) を満たすことが証明できる．

$r \in ID$ と仮定する．まず，$MRO(S) \neq \emptyset$ ならば，$MRO(S)$ の任意の向き付けパスが good であることを示す．定義より $\bigcup_{P \in MRO(S)} V(P)$ の頂点は r に入支配されない．したがって，ID と OD は $MRO(S)$ の各向き付けパス P の入支配集合と出支配集合への分割を誘導する．すなわち，$MRO(S)$ の各向き付けパス P に対して，$ID \cap V(P)$ と $OD \cap V(P)$ は，それぞれ P の入支配集合と出支配集合である．したがって，定理 3.3 より $MRO(S)$ の任意の向き付けパスは good である．

次に，$RI(S)$ が good パスを含むことを示す．S は IOP であるので，r は $RI(S)$ のある頂点から出支配される．$v \in OD$ を r を出支配する頂点とし，v を含む $RI(S)$ の向き付けパスを P とする．このとき, $ID \cap V(P)$ と $OD \cap V(P)$ はそれぞれ P の入支配集合と出支配集合である．よって，P は IOP であり，定理 3.3 より P は good である．

以上より，条件 (1) が成り立つことが示された．

($\Leftarrow$) 条件 (1) が成り立つと仮定する．このとき, $MRO(S)$ の任意の向き付けパスは good であるため，$MRO(S)$ に含まれるパス P は入支配集合と出支配集合に分割可能である．また, RI_1 を $RI(S)$ の good パスの集合, RI_2 を bad パスの集合とする．$RI(S)$ は good パスを含むので，$RI_1 \neq \emptyset$ である．RI_1 の向き付けパス P は good であるので，定理 3.3 より入支配集合と出支配集合への分割が可能である．センター r は必ず入支配集合に含まれることに注意する．RI_2 の向き付けパス P に含まれるすべての極大有向パスは奇数個の頂点を持つことから，$P - \{r\}$ は good パスとなる．以上より

- $MRO(S)$ の各パス P の入支配集合と出支配集合への分割
- RI_1 の各パス P の入支配集合と出支配集合への分割
- RI_2 の各パス P に対して，$P - \{r\}$ の入支配集合と出支配集合への分割

がそれぞれ存在し，それぞれの入支配集合の和集合を ID, 出支配集合の和集合を OD とすると，$ID \cup OD$ は S の分割である．したがって S は IOP である． □

系 3.5. S をセンターを r とする向き付けスパイダーとする．S が *IOP* であるとする。r を入支配集合に含むような入支配集合と出支配集合の分割が存在するための必要十分条件は，S が定理 *3.4* の条件 *(1)* を満たすことである。

系 3.6. S をセンターを r とする向き付けスパイダーとする。S が *IOP* であるとする。r を出支配集合に含むような入支配集合と出支配集合の分割が存在するための必要十分条件は，S が定理 *3.4* の条件 *(2)* を満たすことである。

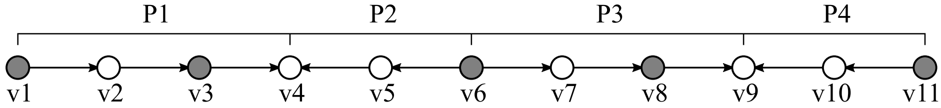

図 3 向き付けパス P の分割の例．白い頂点の集合が入支配集合，黒い頂点の集合が出支配集合．$R(P) = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{11}\}$（補題 3.2）である．

系 3.7. *S をセンターを r とする向き付けスパイダーとする。S が IOP であるとする。r を入支配集合に含むような入支配集合と出支配集合の分割が存在し，かつ r を出支配集合に含むような入支配集合と出支配集合の分割が存在するための必要十分条件は，S が定理 3.4 の条件 (1)，(2) の両方を満たすことである。*

3.3 向き付け木に対する IOP 問題

向き付け木に対する IOP 問題について考える．向き付け木 T の部分グラフ S が次を満たすとき，S を T の**エンドスパイダー**と呼ぶ.

- S は向き付けスパイダーである．そのセンター r とする．
- $\deg_T(r) \geq 3$ である．
- $\deg_S(r) = \deg_T(r) - 1$ である．
- $T - (V(S) \setminus \{r\})$ は連結グラフである．
- $V(S) \neq V(T)$

向き付け木 T に対して，T のエンドスパイダーは向き付けスパイダーである．定義より，T のエンドスパイダーが存在しないときは，T 自身が向き付けスパイダーである．

T のエンドスパイダー S を考える．S のセンターを r とする．まず，$MRO(S)$ と $MRI(S)$ の両方が bad パスを含むときは，T が IOP でないことを示す.

定理 3.8. *T を向き付け木とする．T にあるエンドスパイダー S が存在し，$MRO(S)$ と $MRI(S)$ の両方が bad パスを含むならば，T は IOP でない.*

Proof. 対偶を証明する．T が IOP であると仮定し，T の入支配集合と出支配集合の分割を $ID \cup OD$ とする．T の任意のエンドスパイダー S を考える．S のセンターを r とする．$r \in ID$ または $r \in OD$ である．

まず $r \in ID$ と仮定する．このとき，$N^-(r) \cap \left(\bigcup_{P \in MRO(S)} V(P)\right) = \emptyset$ であるから，$\bigcup_{P \in MRO(S)} V(P)$ の頂点は r に入支配されない．したがって，$MRO(S)$ の任意のパス P に対して，$ID \cap V(P)$ と $OD \cap V(P)$ は，それぞれ P の入支配集合と出支配集合である．すなわち，$MRO(S)$ の向き付けパスは IOP であり，定理 3.3 よりそれらは good である．

同様に $r \in OD$ ならば，$MRI(S)$ の任意の向き付けパスは good である．

以上より，T が IOP ならば，$MRO(S)$ の任意の向き付けパスが good である，または $MRI(S)$ の任意の向き付けパスが good であることがいえた. □

向き付け木 T が，定理 3.8 の条件を満たすエンドスパイダーを持たない場合を考える．今，T から次のような操作により，新たな向き付け木 T' を構成する.

(1) $T'' = T - (S - \{r\})$ とする.
(2) T'' で r と隣接する頂点を v とする.
(3) T' を以下のように定義する.
  (a) S が定理 3.4 の条件 (1), (2) の両方を満たすとき
    $V(T') = V(T'') \cup \{u_1, u_2\}$ とする．また,
    (a-1)$(r, v) \in E(T)$ ならば，$E(T') = E(T'') \cup \{(u_1, r), (u_1, u_2)\}$.
    (a-2)$(v, r) \in E(T)$ ならば，$E(T') = E(T'') \cup \{(r, u_1), (u_2, u_1)\}$.
  (b) S が定理 3.4 の条件 (1), (2) のいずれか一方を満たすとき
    $V(T') = V(T'') \cup \{u\}$ とする．また
    (b-1)S が定理 3.4 の条件 (1) を満たすならば，$E(T') = E(T'') \cup \{(u, r)\}$.
    (b-2)S が定理 3.4 の条件 (2) を満たすならば，$E(T') = E(T'') \cup \{(r, u)\}$.
  (c) S が定理 3.4 の条件 (1), (2) の両方を満たさないとき.
    $V(T') = V(T'')$, $E(T') = E(T'')$ とする.

上記の T から T' を構成する操作を，向き付け木 T の S に対する **reduction** と呼ぶことにする.

定理 3.9. *T にエンドスパイダー S が存在し，かつ S が定理 3.8 の条件を満たさないとする．さらに，T' を T の S に対する reduction によって得られるグラフとする．このとき，T が IOP であるための必要十分条件は T' が IOP であることである.*

Proof. (⇒) T が IOP であると仮定し，T の入支配集合と出支配集合への分割を $ID \cup OD$ とする．$ID_S = ID \cap V(S)$, $OD_S = OD \cap V(S)$ とする.

(Case 1) $ID_S \cup OD_S$ が S の入支配集合と出支配集合への分割となる場合.

このとき，S が IOP であるので定理 3.4 の条件を満たす.

(1-a) S が定理 3.4 の条件 (1), (2) の両方を満たす場合.

S のセンターを r とし，r と隣接する S の頂点でないものを v とする．$(r, v) \in E(T)$ と仮定する．このとき，$ID' = (ID \cap V(T')) \cup \{u_2\}$, $OD' = (OD \cap V(T')) \cup \{u_1\}$

とすると，$ID' \cap OD' = \emptyset$ である．また，ID' と OD' はそれぞれ T' の入支配集合と出支配集合である．したがって，T' は IOP である．

$(r, v) \in E(T)$ の場合も，同様にして T' が IOP であることが確かめられる．

(1-b) S が定理 3.4 の条件 (1), (2) のいずれか一方のみを満たす場合．

S が定理 3.4 の条件 (1) を満たし，条件 (2) を満たさないと仮定する．このとき，系 3.5 より r は ID に含まれる．T' について考えると，$ID' = V(T') \cap ID$ は $T' - \{r, u\}$ の入支配集合であり，かつ $OD' = V(T') \cap OD$ は $T' - \{r, u\}$ の出支配集合である．T' の構成法より，$(u, r) \in E(T')$ であるので，$ID' \cup (OD' \cup \{u\})$ は T' の入支配集合と出支配集合への分割である．したがって，T' は IOP である．

S が定理 3.4 の条件 (2) を満たし，かつ条件 (1) を満たさない場合も，同様にして T' が IOP であることを示すことができる．

(Case 2) $ID_S \cup OD_S$ が S の入支配集合と出支配集合への分割となっていない場合．

一般性を失わずに $r \in ID$ であると仮定する．$MRO(S)$ の向き付けパスに含まれる頂点は r から入支配されないので，$MRO(S)$ のすべての向き付けパスは IOP である．もし S が定理 3.4 の条件 (1) を満たすならば，系 3.5 より S は r を入支配集合に持つ分割が存在する．このとき，その入支配集合と出支配集合を ID_S と OD_S に置き換えることによって得られる $V(T)$ の分割も，T の入支配集合と出支配集合への分割となる．よって，この場合は (Case 1) の (b) と同様に T' が IOP であることが証明できる．

S が定理 3.4 の条件 (1) を満たさないとする．すなわち $RI(S)$ のすべての向き付けパスは bad であるとする．$RI(S)$ の任意の向き付けパスを P とし，r へ隣接する P の頂点を w とし，w と隣接する r でない頂点を x とする．$(w, x) \in E$ とすると P が good になるため，$(x, w) \in E$ である．ここで $w \in OD$ と仮定すると，x は w から出支配されないため，向き付けパス $P - \{r, w\}$ が IOP でなければならない．よって定理 3.3 より $P - \{r, w\}$ が good であり，かつ P が bad でなければならないが，これは不可能である．

以上より，$RI(S)$ の任意の向き付けパスを P で，r へ隣接する頂点はどれも ID に含まれる．よって，エンドスパイダー S には r を出支配する頂点が存在しない．ゆえに reduction の手続き (c) による T' に対して，$ID \cap V(T')$ と $OD \cap V(T')$ はそれぞれ T' の入支配集合と出支配集合であり，T' は IOP であることが示された．

($\Leftarrow$) T' が IOP であると仮定する．T' の入支配集合と出支配集合の分割を $ID' \cup OD'$ とする．

(a) S が定理 3.4 の条件 (1) と (2) を満たす場合．

S のセンターを r とし，r と隣接する S の頂点でないものを v とする．$(r, v) \in E(T)$ と仮定する．このとき $u_1 \in OD'$，$u_2 \in ID'$ である．もし，$r \in ID'$ なら，系 3.7 より，S の分割 $ID_S \cup OD_S$ が存在し，かつ $r \in ID_S$ とすることができる．$ID = ID' \cup ID_S$ は T の入支配集合であり，$OD = OD' \cup OD_S$ は T の出支配集合であり，かつ $ID \cup OD$ が $V(T)$ の分割であることは容易に確かめることができる．$r \in OD'$ の場合も同様である．

(b) S が定理 3.4 の条件 (1) と (2) のいずれか一方を満たす場合．

S が定理 3.4 の条件 (1) を満たす場合を考える．T' を考えると，$r \in ID'$ かつ $u \in OD'$ である．系 3.7 より，S の分割 $ID_S \cup OD_S$ が存在し，かつ $r \in OD_S$ とすることができる．$ID = ID' \cup ID_S$ は T の入支配集合であり，$OD = OD' \cup OD_S$ は T の出支配集合であり，かつ $ID \cup OD$ が $V(T)$ の分割であることは容易に確かめることができる．

S が定理 3.4 の条件 (2) を満たす場合も，同様に T が IOP であることを確かめることができる．

(c) S が定理 3.4 の条件 (1) も (2) も満たさない場合．

S が定理 3.8 の条件を満たさないので，$MRO(S)$ か $MRI(S)$ の少なくとも一方は bad パスを含まない．一般性を失わずに，$MRO(S)$ が bad パスを含まないと仮定する．S は定理 3.4 の条件 (1) を満たさないので，$RI(S)$ のすべての向き付けパスは bad である．これは $MRI(S)$ の任意の向き付けパス P が good であることを意味する．以上より，

- T' の入支配集合と出支配集合への分割 $ID' \cup OD'$,
- $MRO(S)$ の各向き付けパス P_O の入支配集合と出支配集合への分割,
- $MRI(S)$ の各向き付けパス P_I の入支配集合と出支配集合への分割,

を考え，それらすべての入支配集合の和を ID，出支配集合の和を OD とすると，$ID \cup OD$ は T の入支配集合と出支配集合への分割となる．よって T は IOP である． □

エンドスパイダーを持つ任意の向き付け木 T に対して，T に対する reduction を 1 回行うことで，T' が持つ次数が 3 以上の頂点の数は 1 個減少する．さらに定理 3.9 より，T が IOP であるかどうかを判定する問題を，T' が IOP であるかどうかを判定する問題へ帰着できる．したがって，reduction を繰り返すことにより，与えられた向き付け木が IOP であるかどうかを判定する問題を，最終的に向き付けスパイダーが IOP であるかどうかを判定する問題へ帰着できる．

以上のことから，木が IOP であるかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムを設計できる．向き付け木 T が IOP であるかどうかを判定するアルゴリズムを，Algorithm 1 に示す．

Algorithm 1 TREE(T)

1: **Input.** 向き付け木 T.
2: **Output.** T が IOP ならば true，IOP でないならば false.
3: **while** T のエンドスパイダーが存在する **do**
4: S を T のエンドスパイダーとする
5: S のセンターを r とする
6: $(N_T^+(r) \cup N_T^-(r)) \cap (V(T) \setminus V(S))$ のある頂点を v とする
7: $T \leftarrow T - (S - \{r\})$
8: **if** S が定理 3.4 の条件 (1), (2) を満たす **then**
9: $V(T) \leftarrow V(T) \cup \{u_1, u_2\}$
10: **if** $(r, v) \in E(T)$ **then**
11: $E(T) = E(T) \cup \{(u_1, r), (r, u_2)\}$
12: **else**
13: $E(T) = E(T) \cup \{(r, u_1), (u_2, u_1)\}$
14: **end if**
15: **else if** S が定理 3.4 の条件を少なくとも 1 つ満たす **then**
16: $V(T) \leftarrow V(T) \cup \{u\}$
17: **if** S が定理 3.4 の 1 つ目の条件を満たす **then**
18: $E(T) = E(T) \cup \{(u, r)\}$
19: **else**
20: $E(T) = E(T) \cup \{(r, u)\}$
21: **end if**
22: **else if** $MRI(S)$ と $MRO(S)$ の任意の向き付けパスが good **then**
23: /* do nothing */
24: **else**
25: **return** false
26: **end if**
27: **end while**
28: **if** T が定理 3.4 の条件を少なくとも 1 満たす **then**
29: **return** true
30: **else**
31: **return** false
32: **end if**

3.4 アルゴリズムの計算量

入力の向き付け木を T とし，$|V(T)| = n$ とする．

次に 3-27 行目の向き付け木のエンドスパイダーに対する処理を考える．3-27 行目の各反復では 8, 15, 22 行目の処理いずれかの処理を行うため，T の頂点数は反復回数に比例して小さくなる．ここで，3-27 行目の反復回数が k 回とし，i 回目の反復の T のエンドスパイダーを S_i とすると，$RI(S_i)$ などの計算は深さ優先探索を用いることで $O(|V(S_i)| + |E(V(S_i))|)$ 時間で計算できる．したがって，$|V(S_1)| + |V(S_2)| + \cdots + |V(S_k)| \leq n$ かつ $|E(S_1)| + |E(S_2)| + \cdots + |E(S_k)| \leq n - 1$ であるため，3-27 行目での計算量は $O(|V(S_1)| + |E(S_1)| + |V(S_2)| + |E(S_2)| + \cdots + |V(S_k)| + |E(S_k)|) = O(n)$ である．反復回数 k は $O(n)$ であるので，reduction にかかる計算量は $O(n^2)$ 時間となる．28 行目にある最後に残った向き付けスパイダーの処理は $O(n)$ 時間で可能である．したがって，アルゴリズム全体での計算量は $O(n^2)$ である．

定理 3.10. 頂点数が n の向き付け木 T に対して，T が *IOP* であるかどうかを $O(n^2)$ 時間で判定できる．

4. アルゴリズムの動作例

図 4 に，提案アルゴリズムによる reduction と IOP であるかどうかを判定する例を示す．

図 4(a) を入力の向き付け木 T とする．図では，頂点 v_1 を根とする木としてグラフを描く．頂点 v から，有向辺の向きを無視して，下方向に到達可能なすべての頂点から誘導される部分グラフを，v を根とする部分木という．特に頂点 v を根とする部分木がスパイダーであるときは，そのスパイダーを v をセンターとするエンドスパイダーと呼ぶ．

- T の頂点 v_6 をセンターとするエンドスパイダーを S_1 とする．S_1 は定理 3.4 の条件 (2) を満たす．S_1 に対する reduction を行うと (b) の向き付け木となる．
- 向き付け木 (b) で v_3 をセンターとするエンドスパイダーを S_2 とする．S_2 は定理 3.4 の条件 (1) も (2) も満たさない．S_2 に対する reduction を行うと (c) の向き付け木となる．
- 向き付け木 (c) で v_4 をセンターとするエンドスパイダーを S_3 とする．S_3 は定理 3.4 の条件 (1) を満たす．S_3 に対する reduction を行うと (d) の向き付け木となる．
- 向き付け木 (d) は v_1 をセンターとするスパイダーである．これは定理 3.4 の条件 (2) を満たすので，IOP である．

以上より，向き付け木 T は IOP である．図 4(e) に，出支配集合と入支配集合への分割を示す．ここで，白の頂点が入支配集合の頂点，色のある頂点が出支配集合の頂点である．

参考文献

[1] Araki, T.: The k-tuple twin domination in de Bruijn and Kautz digraphs, *Discrete Mathematics*, Vol. 308, pp. 6406–6413 (online), available from ⟨http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2007.12.020⟩ (2008).

[2] Araki, T.: Connected twin domination in de Bruijn and Kautz digraphs, *Discrete Mathematics*, Vol. 309, pp. 6229–6234 (online), available from ⟨http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.031⟩ (2009).

[3] Bang-Jensen, J., Guo, Y., Gutin, G. and Volkmann, L.: A classification of locally semicomplete digraphs, *Discrete Mathematics*, Vol. 167/168, pp. 101–114 (1997).

[4] Bang-Jensen, J. and Gutin, G.: *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag London, 2 edition (2009).

[5] Chang, G. J.: Algorithmic Aspects of Domination in Graphs, *Handbook of Combinatorial Optimization* (Du, D. and Pardalos, P., eds.), Vol. 3, Kluwer Academic Pbulishers, pp. 339–405 (1998).

[6] Chartrand, G., Dankelmann, P., Schultz, M. and Swart, H. C.: Twin domination in digraphs, *Ars Combinatoria*, Vol. 67, pp. 105–114 (2003).

[7] Chartrand, G., Harary, F. and Yue, B. Q.: On the out-domination and in-domination numbers of a digraph,

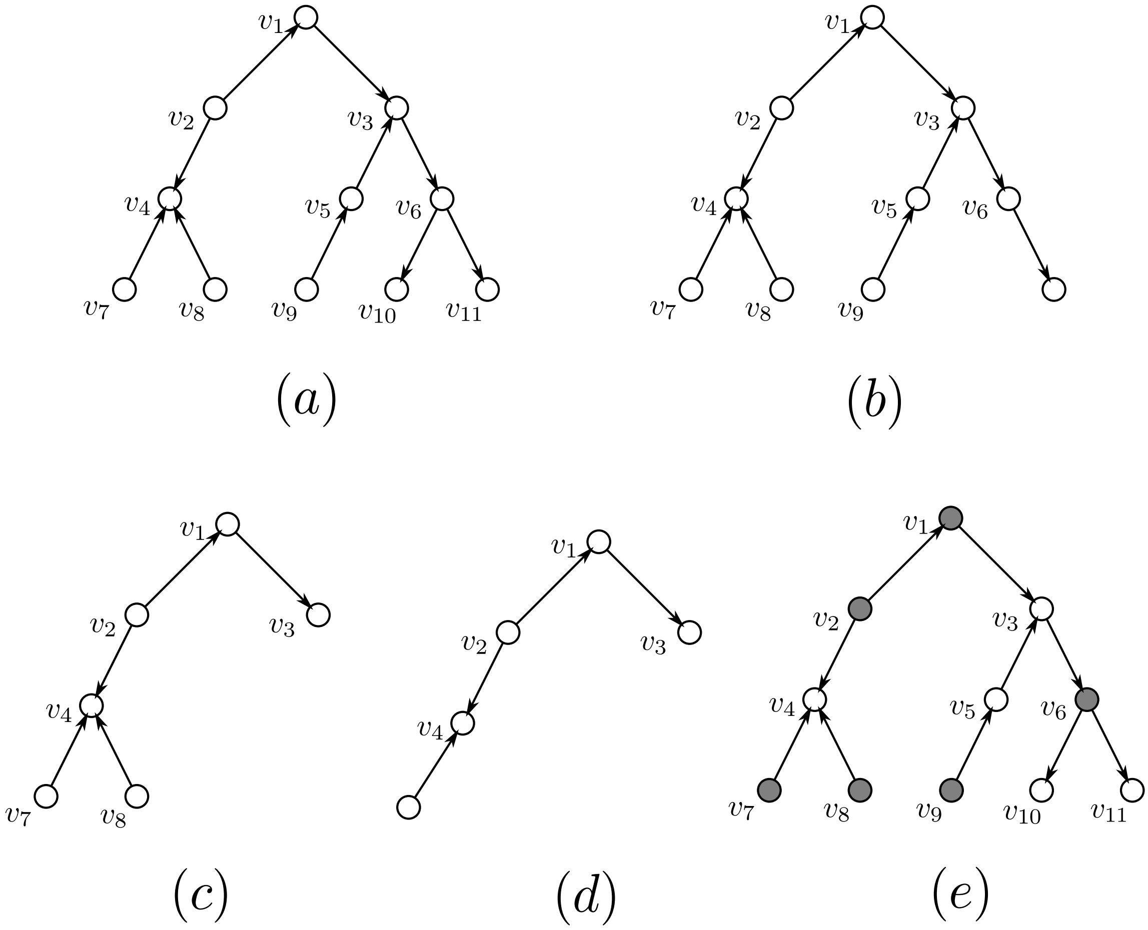

図 4 Algorihtm 1 の実行例．(a) 入力の向き付け木 T．(b) から (d) はエンドスパイダーに対して reduction を行って得られる向き付け木．(e) は T の頂点集合の出支配集合と入支配集合への分割．白の頂点が入支配集合の頂点，色のある頂点が出支配集合の頂点である．

Discrete Mathematics, Vol. 197-198, pp. 179–183 (1999).

[8] Chartrand, G., Lesniak, L. and Zhang, P.: *Graphs & Digraphs*, Chapman & Hall/CRC, 5 edition (2011).

[9] Fraenkel, A. S.: Planar kernel and Grundy with $d \leq 3$, $d^+ \leq 2$, $d^- \leq 2$ are NP-complete, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 3, pp. 257–262 (1981).

[10] Garey, M. R. and Johnson, D. S.: *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*, W. H. Freeman, New York (1979).

[11] Ghosal, J., Laskar, R. and Pillone, D.: Topics on domination in directed graphs, *Domination in Graphs: Advanced Topics* (Haynes, T., Hedetniemi, S. and Slater, P., eds.), Marcel Dekker, pp. 401–437 (1998).

[12] Gutin, G., Kloks, T., Lee, C. M. and Yeo, A.: Kernels in planar digraphs, *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 71, pp. 174–184 (2005).

[13] Hasunuma, T. and Otani, M.: On the (h, k)-domination numbers of iterated line digraphs, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 160, No. 12, pp. 1859–1863 (online), DOI: 10.1016/j.dam.2012.03.024 (2012).

[14] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T. and Slater, P. J.: *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York (1998).

[15] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T. and Slater, P. J.: *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York (1998).

[16] Henning, M. A., Löwenstein, C. and Rautenbach, D.: Remarks about disjoint dominating sets, *Discrete Mathematics*, Vol. 309, pp. 6451–6458 (2009).

[17] Henning, M. A. and Southey, J.: A note on graphs with disjoint dominating and total dominating sets, *Ars Combinatoria*, Vol. 89, pp. 159–162 (2008).

[18] Peng, S. L. and Chang, M. S.: A simple linear algorithm for the domatic partition problem on strongly chordal graphs, *Information Processing Letters*, Vol. 43, pp. 297–300 (1992).