

交差数の少ない単一ページ描画における固定パラメータアルゴリズム

大塚 広夢^{†1,a)} 小林 靖明^{†2,b)} 玉木 久夫^{†1,c)}

概要: グラフの本型埋め込みの研究は古くから行われ、その拡張として、少ないページ数に少ない辺交差数でグラフを埋め込む問題が考えられている。ここでは、 n 頂点のグラフ G と非負整数 k が与えられたとき、 G が 1 ページに辺の交差数が高々 k で埋め込みができるかを判定する問題を考える。この問題は Bannister と Eppstein (GD 2014) によって固定パラメータ容易であることが示されたが、その結果の中では Courcelle の定理を用いているため、アルゴリズムやその計算時間は陽に示されていない。本稿では、その判定問題に対する $2^{O(k \log k)} n$ 時間アルゴリズムを与える。この結果は、既存の手法に対して単純に動的計画法を与えるのではなく、1 ページ描画に関する非自明な性質を用いたアルゴリズムである。

キーワード: 1 ページ交差数, グラフアルゴリズム, グラフ描画, 固定パラメータ容易性

1. はじめに

グラフの本型埋め込み (*book embedding*) に関する研究は、グラフ描画の分野でよく研究されているもののひとつである。本型埋め込みにおいて、頂点は背表紙 (*spine*) と呼ばれる直線上に異なる点として描画され、任意の辺は背表紙によって定義される半平面に描画される。この半平面をページと呼ぶ。一般に、辺同士が互いに交差しないように描画するするためには複数のページが必要になる。このように辺同士が互いに交差しないようにグラフをいくつかのページに埋め込むために必要なページ数の最小値は最小ページ数 (*page number* または *book thickness*) と呼ばれ、数多くの研究がなされている [4], [23]。一般に、与えられたグラフの最小ページ数を求める問題は NP 困難であり、特に、グラフを 2 ページに埋め込むことができるかを判定する問題は NP 完全であることが知られている [8]。

これらとは別に、与えられたページ数にグラフを埋め込むとき、各ページに埋め込まれた辺同士の交差を許容した描画に関する研究が行われている。ここでの交差とは同じページに埋め込まれた辺の (非順序) 対で、描画上に互いに非空な共通部分を端点を除いた位置に持つようなものと定

義する。正整数 k において、グラフを k ページ以内に埋め込み、そのときの描画における各ページの辺交差数の総和の最小値は k ページ交差数と呼ばれている。 k ページ交差数の概念は Shahrokhi ら [20] によって導入された後、いくつかの研究がこれまでに行われてきた。最小ページ数が 2 であるかを判定する問題は NP 完全である [8] ため、2 ページ交差数を求める問題も NP 困難である。 $k = 1$ の場合は、最もよく研究されている特殊ケースであり、円形交差数 (*circular crossing number*)、凸交差数 (*convex crossing number*)、外平面交差数 (*outerplanar crossing number*) といった別の名前でも研究が行われてきた [15]。1 ページ交差数とこれらの関係性は以下のように確認できる。グラフの頂点のある円盤の外周上の異なる点として配置し、各辺をその円盤の内側に直線分として描画する。このような描画における最小の辺交差数は 1 ページ交差数と等しいことが知られている (図 1)。

円形交差数を小さくするような描画は Graphviz^{*1} や yFiles^{*2} といった有名なグラフ描画ソフトウェアでも取り扱われており、交差数の小さい円形描画を求める問題は重要であると認識されている。また、Blin ら [5] は 1 ページ交差数を小さいパラメータとしてふたつの mRNA 列の類似度を計算するアルゴリズムを提案しており、彼らの論文の未解決問題として 1 ページ交差数最小化問題を解くアルゴリズムが挙げられている。

^{†1} 現在, 明治大学
Presently with Meiji University

^{†2} 現在, 京都大学
Presently with Kyoto University

a) ohtsuka_yume@cs.meiji.ac.jp

b) kobayashi@iip.ist.i.kyoto-u.ac.jp

c) tamaki@cs.meiji.ac.jp

*1 <http://www.graphviz.org/>

*2 <https://www.yworks.com/>

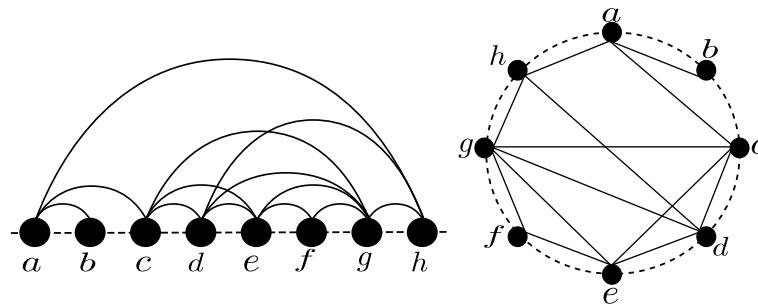


図 1 1 ページ描画と円盤上の描画の等価性

1 ページ交差数を求める問題は Masuda ら [18] によって NP 困難であることが示された。これまでに、いくつかの特別なグラフに関する 1 ページ交差数の研究 [12], [13] や、いくつかのヒューリスティクスが提案されてきた [3], [17], [21]。その一方で, [1] や [2] では固定パラメータ容易性 (fixed parameter tractability) の観点から 1 ページ交差数の計算複雑性を議論した。特に, 1 ページ交差数が与えられたパラメータ k 以下であるかを判定する問題は固定パラメータ容易 (fixed parameter tractable) である [1]。この結果においては, 木分解と Courcelle の定理 [9], [10] を用いているため, 1 ページ交差数が k 以下であるような描画を求める木分解上の動的計画法は陽には与えられていない。また, アルゴリズムの実行時間における k に依存する指数関数は非常に大きく, k が非常に小さい場合でも実用的なアルゴリズムとは言い難い。

本稿では, 与えられたグラフ G と非負整数 k において, G の 1 ページ交差数が k 以下であるかを判定するアルゴリズムを与える。また, その判定問題の答えが YES である場合には, 実際にその描画を求める。

定理 1. グラフ G と非負整数 k が与えられたとき, G の 1 ページ交差数が k 以下であるかどうかを判定する問題は $2^{O(k \log k)} n$ 時間で判定可能であり, さらにその答えが YES である場合には, 同じ実行時間で 1 ページ交差数が k 以下であるような描画を求めることができる。ここで n は G の頂点数とする。

この結果は Bannister と Eppstein [1] の結果と同様に, 外平面グラフの認識問題に対する線形時間アルゴリズム [19], [22] の一般化としても見ることができる。

本稿で提案するアルゴリズムでは, [1] と同じくグラフの木分解を用いる。具体的には, G の 1 ページ交差数が k 以下であるとき, G の木幅は k の関数で上から抑えることができる (補題 3)。そのため, 定理 1 を示すためには, 木分解を用いた動的計画法を示せば十分である。動的計画法では単純に描画を抜おうとすると, 頂点数に対して指数個の可能性が出てきてしまうため, そのような状況を回避するために工夫が必要である。提案するアルゴリズムでは, 描画の「簡約化された表現」を用いることでこの問題を解決

している。この「簡約化された表現」の個数は交差数が k 以下である場合に k の関数で上から抑えることができ, さらにグラフの 2 連結性より導かれる非自明な性質を用いることで, その「簡約化された表現」は本質的に通常の描画と等しいことがわかる。動的計画法では, この「簡約化された表現」をすべて考慮し, それぞれが実現可能であるかどうかを YES または NO でテーブルに保存する。この動的計画法は Dujmović らの階層的グラフ描画問題に対する動的計画法 [11] と近いアイデアを用いていることにも言及しておく。

本稿の構成は以下のようなものである。次節においては, 本稿で使用する概念や記法および本結果に関わる基礎的な結果について述べる。3 節では定理 1 を証明するための動的計画法を与える。最後に, 4 節では本結果のまとめと未解決問題について述べる。

2. 準備

本稿では, G を与えられたグラフとし, その頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表す。また, G の頂点数は n であるとする。頂点集合の部分集合 $X \subseteq V(G)$ において, $G[X]$ で X によって誘導される G の部分グラフを表す。

前節でも述べたように, 1 ページ交差数とグラフを円盤上に描画した際の最小交差数は一致するため, 本稿では交差数が最小となるように円盤上に描画する問題に取り組む。よって, G の描画に関して言及するときは, つねにグラフを円盤上に描画することを指すとし, さらに交差について言及するときは, つねに 1 ページ交差に関して述べているとする。 G の描画 D において, D が含む交差の数を $\text{cr}(D)$ で表し, グラフ G の最小交差数を $\text{cr}(G)$ と表記する。ここで, ある描画における交差数は頂点の円周上の位置に依存するのではなく, 円周上における順序に依存することが観察できる。よって以下では, G の描画を頂点の円順列とみなし, ふたつの G の描画が等価であるとは, その描画を定義する円順列が等しいことを指す。 G の描画について述べるときには, 暗黙的に $V(G)$ の円順列を指すことがある。

D を G の描画とする。ふたつの異なる頂点 $u, v \in V(G)$ が D において連続するとは, D を定義する円順列上でそれらが隣り合うことを意味する。 D において連続するふたつ

の頂点 $u, v \in V(G)$ が D において接続するとは、 G において隣接するときである。文脈より D が明らかであるときは、単に u と v が連続するまたは接続するという事もある。頂点集合の部分集合 $X \subseteq V(G)$ において、 $D|X$ で X で誘導される D の部分描画、つまり D において $V(G) \setminus X$ の頂点をすべて削除することによって得られる描画を表す。 D に対して、円順列に新しい頂点をいくつか追加し、その追加された頂点やすでに円順列上にあるいくつかの頂点との間に辺を加えることで得られる描画を D の拡張と呼ぶ。

以下では、本稿で用いるいくつかの既存の概念やそれらに関する事実について述べる。提案するアルゴリズムは、グラフの木分解 (tree decomposition) を用いる。

定義 1. G の木分解 $(T, \{X_t : t \in V(T)\})$ とは、木 T と T の各頂点 $t \in V(T)$ (以下では G の頂点と区別するため、ノードと呼ぶ) について定義される $V(G)$ の部分集合 $X_t \subseteq V(G)$ の族で以下の3つの条件を満たすものである。

- (1) $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V(G)$,
- (2) 任意の辺 $\{u, v\} \in E(G)$ において、 $\{u, v\} \subseteq X_t$ を満たす $t \in V(T)$ が存在し、
- (3) 任意の $u \in V(G)$ において、 $u \in X_t$ を満たすノードの集合によって誘導される T の部分グラフは連結、つまり部分木である。

混乱を生じさせない限り、木分解 $(T, \{X_t : t \in T\})$ を単に T と記述する。木分解 T の幅とは、 T に含まれるノード t において X_t の要素数の最大値から1減じた値であり、 G の木幅 $\text{tw}(G)$ とは、 G が幅 w の木分解を持つような最小の整数 w であると定義する。以下では木分解 T が根ノード r を持つと仮定する。

定義 2. 木分解 T が以下の条件を満たすとき、 T が好適 (nice) であるという。

- 根ノード $r \in V(T)$ において、 $X_r = \emptyset$ かつ任意の葉ノード $l \in V(T)$ において、 $X_l = \emptyset$ 。
- すべての葉でないノード $t \in V(T)$ は、以下のいずれかである。

導入ノード: ノード t はひとつの子 t' を持ち、 $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$ であるような $v \notin X_{t'}$ が存在する。このとき頂点 v はノード t で導入されるといい、 t を導入ノードと呼ぶ。

忘却ノード: ノード t はひとつの子 t' を持ち、 $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$ であるような $v \in X_{t'}$ が存在する。このとき v はノード t で忘却されるといい、 t を忘却ノードと呼ぶ。

結合ノード: ノード t はふたつの子 t_1, t_2 を持ち、 $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$ である。このとき t を結合ノードと呼ぶ。

好適な木分解 T とそのノード $t \in V(T)$ において、

$V_t = \bigcup_{t' \in V(T_t)} X_{t'}$ とする。ここで T_t は t を根とする T の部分木で極大なものと定義する。

補題 1 ([16]). グラフ G と幅 k の木分解が与えられたとき、幅が k 以下で好適な G の木分解で $O(kn)$ ノードを持つものを $O(k^2n)$ 時間で計算できる。

グラフの描画に関する事実として以下のことが知られている。グラフが交差を含まない描画を持つことの必要十分条件として以下の事実が知られている。

補題 2 ([4]). $\text{cr}(G) = 0$ であることと G が外平面グラフであることは等価である。

任意の外平面グラフの木幅は2以下であるため、明らかに $\text{tw}(G) = O(\text{cr}(G))$ である。さらにタイトな木幅と交差数の関係として以下が知られている。

補題 3 ([1]). 任意のグラフ G は $\text{tw}(G) = O(\sqrt{\text{cr}(G)})$ を満たす。

以下の補題はいくつかの既存の結果でも用いられているが、陽に証明を与えている文献が見つからなかったため証明を与える。

補題 4. グラフ G の2連結成分を G_1, G_2, \dots, G_t とする。このとき、 $\text{cr}(G) = \sum_{1 \leq i \leq t} \text{cr}(G_i)$ である。

証明. G が2連結であるとき、補題は明らかであるため、以下では G が関節点 v を持つとする。 $G[V(G) \setminus \{v\}]$ の連結成分を C_1, C_2, \dots, C_m とし、各 $i (1 \leq i \leq m)$ について $H_i = G[C_i \cup \{v\}]$ とする。 H_i に帰納法を適用することで、 H_i は H_i の各2連結成分の交差数の総和と $\text{cr}(H_i)$ が一致するような描画 D_i を持つ。 D_i を構成する円順列を $D_i = (v, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{h_i}^i)$ とすると、

$$D = (v, v_1^1, v_2^1, \dots, v_{h_1}^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{h_2}^2, \dots, v_1^m, v_2^m, \dots, v_{h_m}^m)$$

は G の描画であり、異なる $i \neq j$ なる H_i と H_j において $e \in E(H_i)$ と $f \in E(H_j)$ は D において交差しないため、 $\text{cr}(G) \leq \text{cr}(D) = \sum_{1 \leq i \leq m} \text{cr}(H_i) = \sum_{1 \leq i \leq t} \text{cr}(G_i)$ である。また、 G_i は $E(G)$ を分割するため、 $\text{cr}(G) \geq \sum_{1 \leq i \leq t} \text{cr}(G_i)$ である。よって補題が得られる。□

3. 動的計画法

この節では、定理1を証明するためにグラフ G と正整数 k が与えられたとき、 G が交差数 k 以下の描画を持つかどうかを判定し、その判定の答えが YES であれば、交差数が k 以下であるような描画を求める動的計画法を与える。ここでは、与えられたグラフ G は2連結であると仮定し、また、 G の好適な木分解 T が与えられたと仮定する。

3頂点以上の2連結なグラフ G が交差を含まない描画を持つとき、補題2より、その描画は2連結外平面グラフの

埋め込みであり、その描画を定義する円順列はハミルトン閉路を誘導することが知られている [7]。この性質を局所的に記述するために、以下の定義を用いる。 G の描画において、ある頂点 $v \in V(G)$ が連鎖であるとは、その描画において v と連続であるふたつの頂点 $u, w \in V(G)$ がどちらも v と接続するときである。上で行った観察より、3 頂点以上の 2 連結なグラフは交差の含まない描画においては、すべての頂点が連鎖である。以下の補題は交差を含む描画についても局所的に連鎖が生じることを示す。

補題 5. 3 頂点以上の 2 連結グラフ G の任意の描画において、交差を含む辺が接続されていない頂点は連鎖である。

証明. G の任意の描画 D を固定する。 v を D において交差を含む辺が接続されていない頂点とする。 v と連続であるふたつの頂点を u, w とする。 G の 2 連結性より、 v の次数は 2 以上である。 v が u と w のどちらも隣接する場合は補題が成り立つので、ここでは、 v の隣接点で u, w ではない頂点 x が存在する場合を考える。 辺 $\{v, x\}$ は交差を含まないため、 u と w の間のふたつの内点素パス P_1, P_2 は一方が v を通り、もう一方が x を必ず通る。 v を通るパスを P_1 とし、 P_1 が $\{u, v\}$ を辺として含まないと仮定する。 u と v の間の P_1 の部分パスにおける v の隣接点を u' とすると、 辺 $\{u', v\}$ は P_2 の辺と交差しなければならない。 このことは v に接続される辺が交差を含まないことに矛盾するので、 P_1 は辺 $\{u, v\}$ を含む。 同じ議論を w についても行うことで、 辺 $\{v, w\}$ が存在することが示される。 よって補題が得られる。 \square

提案する動的計画法では、 G の好適な木分解 T と各ノード $t \in V(T)$ について $G[V_t]$ の描画の集合を求める。 ただし、そのような描画は数多くあるため、以下で定義する「簡約された表現」を用いることで目的の実行時間を達成する。

3.1 簡約表現

G を 2 連結グラフとし、 $G[V_t]$ の描画 D に関する「簡約化された表現」を与える。 以降では、描画の各頂点と各辺は彩色されている状況を考え、ふたつの描画が等価であっても彩色が異なる場合にはそれらの描画を区別する。 描画 D の各辺は黒または白で彩色され、黒で彩色された辺を黒辺と呼び、白で彩色された辺を白辺と呼ぶ。 また、少なくともひとつの黒辺が接続される頂点は黒で彩色され、その頂点を黒頂点と呼び、それ以外頂点は白で彩色され、白頂点と呼ぶ。 黒辺は交差を許容する辺であり、白辺は交差を許容しない辺として理解し、交差は黒辺の間でのみ生じるとする。 このような頂点および辺に対する彩色において、黒辺の数が $2k$ 以下であるとき、その彩色を D に対する妥当な彩色と呼ぶ。 描画においては黒辺でのみ交差を許容するため、任意の交差数 k 以下の描画は妥当な彩色を持つ。

妥当な彩色をされた描画 D が有効であるとは、 X_t に含まれない任意の白頂点が D において連鎖を成すときである。 $G[V_t]$ の描画 D を拡張して G の描画を構成するとき、 D が有効でなければならないことは以下のように確認できる。 もし白頂点 $v \in V_t \setminus X_t$ が D において連鎖でないとき、その後どのように $V(G) \setminus V_t$ の頂点を D に追加しても、その拡張において v は連鎖になれない。 これは X_t が $V_t \setminus X_t$ と $V(G_t) \setminus V_t$ の分離集合である事実より導かれる。 G の 2 連結性と補題 5 より、 D の拡張であるような G の描画は存在しないため、 D は有効でなければならない。 よって、動的計画法においては有効な描画のみを考慮すれば十分である。

妥当な彩色をされた有効な描画 D において、 X_t に含まれないふたつの白頂点が D において接続するとき、それらを D の縮約可能対と呼び、それらの頂点の間の辺を縮約し、多重辺を取り除いた上で、新しくできた頂点を白で彩色する操作を縮約と呼ぶ。 縮約操作においては、交差数や各辺の色およびその妥当性を保存することに注意する。 D が含む全ての縮約可能対をすべて縮約することで得られる描画を D の t における簡約表現と呼ぶ (図 2)。 t が文脈より明らかなきには、単に簡約表現と呼ぶ。 D において簡約表現 R はユニークに定まり、さらに $X_t \subseteq V(R)$ であることに注意する。

簡約表現を用いることの直感的な正当性は以下のようにある。 $G[V_t]$ の有効な描画 D を拡張して G の描画を構成することを考える。 このとき、 D の縮約可能対 (u, v) の間に新たに頂点 w を追加して得られる拡張 D' は有効ではない。 このことは、 D の有効性の議論と同様の理由により直ちに分かる。 そのため、 D を拡張する際には縮約可能対の間に頂点が追加されることはないため、それらの頂点が縮約されても D の拡張可能性に影響を与えないことがわかる。 また、 D の簡約表現 R を拡張して G の描画の簡約表現 R_G を得たとき、 R_G から交差数を増やすことなく G の描画を得ることができる。 これは単純に縮約された頂点对を元に戻すことによって得られる。 つまり、 $G[V_t]$ の描画 D に頂点を追加して描画を拡張するとき、 D が G の交差数 k 以下の描画に拡張可能であることと、 D の簡約表現 R を G の描画の簡約表現 R_G に拡張可能であることが等価である。

定義 3. $G[V_t]$ のふたつの有効な描画 D と D' において、それぞれの簡約表現を R と R' とする。 R と R' の頂点集合をそれぞれ $V(R)$ と $V(R')$ 、辺集合をそれぞれ $E(R)$ と $E(R')$ とする。 このとき R と R' が等価であるとは、以下の条件を満たす全単射 $f: V(R) \rightarrow V(R')$ が存在するときである。

- 任意の $v \in X_t$ において $f(v) = v$,
- 任意の $v \in V(R)$ において v と $f(v)$ の色は等しく、

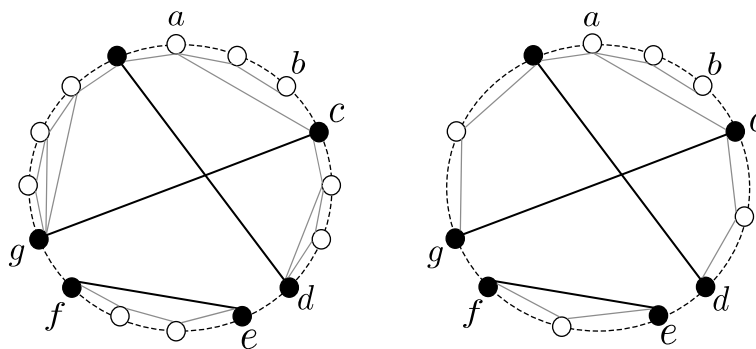


図 2 $G[V_t]$ の描画 D (左図) とその簡約表現 R (右図). $X_t = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ とし, 黒色円が黒頂点, 白抜き円が白頂点を表し, 黒色線が黒辺, 灰色線が白辺を表す. D は4つの簡約可能対を持ち, すべてを簡約した結果として簡約表現 R が得られる.

- $\{u, v\} \in E(R)$ と $\{f(u), f(v)\} \in E(R')$ が等価であり, さらにその色は等しく,
- R を構成する円順列 π と R' を構成する円順列 π' が f を通して等価である: ある $v_0 \in V(R)$ を基点として, $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_{|V(R)|})$ としたとき, $\pi' = (f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_{|V(R)|}))$ である.

定義 4. $t \in V(T)$ において,

- $X_t \subseteq V(R)$,
- R は妥当な彩色をされている,
- X_t に含まれない R の白頂点は連鎖を成し, さらにその接続する頂点は黒頂点か X_t の頂点のいずれか,
- $|V(R)| \leq f(k)$,
- $|E(R)| \leq g(k)$

のすべてを満たすような描画 R で互いに等価でないものの集合を \mathcal{R}_t とする. ここで, $f(k)$ と $g(k)$ は適切に選ぶことによって, $G[V_t]$ の有効な描画の簡約表現は \mathcal{R}_t の中に等価な描画を持つことが証明できる. この事実の証明および $f(k)$ と $g(k)$ の選び方は後に回す.

以下では, 提案する動的計画法について, 葉ノード, 忘却ステップ, 導入ステップ, 結合ステップに分けて説明する. $t \in V(T)$ において, $R \in \mathcal{R}_t$ を簡約表現に持つような $G[V_t]$ の有効な描画が存在するかどうかを (t, R) をインデックスとする表に YES または NO で記録する. t が葉ノードである場合は \mathcal{R}_t はただひとつの空の描画のみであるため, 以下では $t \in V(T)$ は葉ノード以外であると仮定する.

3.2 忘却ステップ

ここでは, $t \in V(T)$ を忘却ノードとし, $t' \in V(T)$ を t の唯一の子ノード, $v \in X_{t'} \setminus X_t$ を t で忘却された頂点とする. ここで, $G[V_t] = G[V_{t'}]$ であることに注意する. $R' \in \mathcal{R}_{t'}$ を (t', R') において YES であるような描画であるとする. 以下では, R' が与えられたときに, ある $R \in \mathcal{R}_t$ を構成する手続きを与える. R' において, 忘却頂点 v の色が黒である場合は単に $R := R'$ とする. 以下では v の色が

白である場合を考える. $R := R'$ としたとき, R が簡約可能対を持つことがある. これは v が t において忘却頂点である事実からわかる. よってそれらの簡約可能対を簡約して得られる描画を R とする. このとき, 簡約は最大で2度起こりうることに注意する. そのようにして得られる R において, X_t に含まれない白頂点で連鎖でないようなものが存在する場合は, そのような R を破棄する. 上のふたつの場合の操作により, R は明らかに定義 4 を満たすため, $R \in \mathcal{R}_t$ である. このようにして定義される (t, R) を YES にし, すべての $R' \in \mathcal{R}_{t'}$ から生成されなかった \mathcal{R}_t の描画 R については (t, R) を NO にする.

3.3 導入ステップ

ここでは, $t \in V(T)$ を導入ノードとし, $t' \in V(T)$ を t の唯一の子ノード, $v \in X_t \setminus X_{t'}$ を t で導入された頂点とする. $R \in \mathcal{R}_t$ をひとつ固定し, それが $R' \in \mathcal{R}_{t'}$ から v を導入することによって得られるかを考える. ここで $v \in X_t$ であるため $v \in V(R)$ であることに注意する. R において導入された頂点 v と v を端点として持つ R の辺すべてを削除して得られる描画を $R' := R|(V_t \setminus \{v\})$ とする. このとき, R において v と連続な頂点は $X_{t'}$ の頂点または黒頂点である. これは, v が X_t に含まれない白頂点 w と R において連続であるとき, 木分解の性質により, v と w は隣接しないため, これは R において w が連鎖であることに反することからわかる. R' は R から v を削除することによって得られた事実より, $X_{t'} = X_t \setminus \{v\} \subseteq V(R')$, $V(R') \subseteq V(R)$, $E(R') \subseteq E(R)$ である. また, R' における $X_{t'}$ に含まれない白頂点はすべて連鎖であるため, $R' \in \mathcal{R}_{t'}$ である. このようにして得られた (t', R') が YES であるならば, そのときに限り (t, R) を YES にする.

3.4 結合ステップ

ここでは, $t \in V(T)$ を結合ノードとし, $t_1, t_2 \in V(T)$ を t のふたつの子とする. 結合ノードの定義より, $(V_{t_1} \setminus X_t) \cap (V_{t_2} \setminus X_t) = \emptyset$ である. $R \in \mathcal{R}_t$ が与えら

れたとき、以下のようにふたつの描画 R_1, R_2 を構成できる。 (V_1, V_2) を $V(R) \setminus X_t$ の 2 分割で、その間に辺が存在しないようなものとする。ここで、 $V_1 = \emptyset$ または $V_2 = \emptyset$ を許すことに注意する。 $R_1 := R|(V_1 \cup X_t), R_2 := R|(V_2 \cup X_t)$ とする。 R_1 は R の部分描画であり、 $X_t = X_{t_1}$ であるため、 $X_{t_1} \subseteq V(R_1)$ である。また、 (V_1, V_2) の間に辺が存在しないため、 R_1 における X_{t_1} に含まれない任意の白頂点は連鎖であることがわかる。導入ステップと同じ議論により、定義 4 の他の条件も R_{t_1} において満たすため、 $R_1 \in \mathcal{R}_{t_1}$ であることが得られる。同様の議論を用いて $R_2 \in \mathcal{R}_{t_2}$ が得られる。 $V(R) \setminus X_t$ の 2 分割 (V_1, V_2) は複数存在するため、ある分割によって定義される R_1, R_2 が (t_1, R_1) と (t_2, R_2) を同時に YES にするような分割が存在するとき、そのときに限り (t, R) を YES とする。

3.5 解析

補題 4 より、交差数を求める問題は与えられたグラフ G の 2 連結成分ごとに独立に解くことができる。グラフの 2 連結成分分解は線形時間で求めることができる [14]。

G の木幅がある定数 $c > 0$ において $c\sqrt{k}$ 以上であれば、補題 3 より、交差数が k 以下の描画を持たない。よって以下では $\text{tw}(G) = O(\sqrt{k})$ であると仮定できる。幅が $O(\sqrt{k})$ であるような木分解は Bodlaender ら [6] によって与えられた近似アルゴリズムによって計算する。このアルゴリズムは $2^{O(k)}n$ 時間で実行できる。また、補題 1 によって好適な木分解を計算する。

補題 6. 定義 4 における f, g を $f(k) = O(k), g(k) = O(k)$ を満たし、 $G[V_t]$ の任意の有効な描画で交差数が k 以下であるものの簡約表現と等価な描画が \mathcal{R}_t に含まれるように関数 f, g が選べる。

証明. $G[V_t]$ の任意の有効な描画の簡約表現 R とする。 R が有効であるため、その彩色は妥当であるため、 R は高々 $2k$ の黒辺、高々 $4k$ の黒頂点を持つ。また、木幅が $O(\sqrt{k})$ であるため、 $|X_t| = O(\sqrt{k})$ である。白辺によって誘導される部分グラフは外平面グラフであるため、以下では白頂点の個数の上界を考える。 R において X_t に含まれない任意の白頂点は連鎖を成し、簡約表現の定義より、そのような白頂点は X_t の頂点または黒頂点のみに隣接する。このことは、そうでない場合にそれらが縮約可能対を成すことからわかる。よって、白頂点で X_t に含まれないものは高々 $4k + |X_t|$ しか存在できないため、 $|V(R)| = O(k)$ かつ $|E(R)| = O(k)$ である。よって適切に f, g を選ぶことにより、 \mathcal{R}_t が任意の R を含むようにできる。 \square

補題 7. $t \in V_t$ において各ステップの計算時間は $2^{O(k \log k)}$ である。

証明. 補題 6 より、 \mathcal{R}_t に含まれる任意の描画 R は

$|V(R)| = O(k)$ かつ $|E(R)| = O(k)$ である。頂点数が p で辺数が q であるようなグラフで互いの同型でないものの総数は高々 $(2q)^p$ であり、そのような各グラフにおける妥当な彩色の個数は高々 2^q 、 p 要素の円順列の総数は $(p-1)!$ であるため、 $|\mathcal{R}_t| = 2^{O(k \log k)}$ である。また、ひとつの R における各ステップの計算時間は $2^{O(k)}$ であるため、補題が得られる。 \square

以上により、全体の実行時間は $2^{O(k \log k)}n$ であり、根ノード $r \in V(T)$ において $(r, R) \in \mathcal{R}_r$ が YES であり、かつ R の交差数が k 以下であるものが存在する場合、判定問題の答えを YES とする。

4. まとめ

本稿では、与えられたグラフの 1 ページ交差数がパラメータ k 以下であるかを判定する動的計画法を与えた。この結果は Bannister と Eppstein [1] の結果を改善している。特に、彼らの結果は Courcelle の定理 [9], [10] を用いたため、木分解上の動的計画法を陽に与えていない。また、その実行時間は非常に大きく、実用的な観点からは非常に遠いと考えられる。本結果の実行時間はそれと比べると非常に小さく、幾分実用的であるといえるが、まだまだ改善の余地がある。

最後に本研究に沿った未解決問題を幾つか示して本稿を締めくくる。提案アルゴリズムの実行時間は $2^{O(k \log k)}n$ 時間を達成しているが、さらなる改善は興味深い問題である。特に、ある定数 $c > 0$ において、1 ページ交差数が k 以下であるかを判定する $c^k n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムが存在するかどうかは今後明らかにすべき課題である。本結果のボトルネックは \mathcal{R}_t の大きさの上界 (補題 7) であり、それを改善できれば直ちに実行時間の改善が可能である。また、1 ページ交差数に関する多項式カーネル化 (polynomial kernelization) の存在も興味深い問題である。Bannister ら [2] の結果は交差数の上界ではないグラフの構造的パラメータを用いることで、多項式サイズのカーネルを与えたが、それらの結果を本問題の設定に適用しても、有意義なカーネルサイズを得ることはできない。よって、この目的のためにはさらなる研究が必要である。

参考文献

- [1] M. J. Bannister, D. Eppstein: Crossing Minimization for 1-page and 2-page Drawings of Graphs with Bounded Treewidth. In Proc. of GD 2014, pages 210–221, 2014.
- [2] M. J. Bannister, D. Eppstein, J. A. Simons: Fixed Parameter Tractability of Crossing Minimization of Almost-Trees. In Proc. of GD 2013, pages 340–351, 2013.
- [3] M. Baur, U. Brandes: Crossing Reduction in Circular Layouts. In Proc. of WG 2004, pages 332–343, 2004.
- [4] F. Bernhart, P. C. Kainen: The Book Thickness of a Graph. Journal of Combinatorial Theory, Series B 27, 320–331, 1979.

- [5] G. Blin, G. Fertin, D. Hermelin, S. Vialette: Fixed-parameter algorithms for protein similarity search under mRNA structure constraints. *Journal of Discrete Algorithms* 6(4), 618–626, 2008.
- [6] H. L. Bodlaender, P. G. Drange, M. S. Dregi, F. V. Fomin, D. Lokshtanov, M. Pilipczuk: A $c^k n$ 5-Approximation Algorithm for Treewidth. *SIAM J. Comput.* 45(2), 317–378, 2016.
- [7] G. Chartrand, F. Harary: Planar Permutation Graphs. *Annales de l’Institut Henri Poincaré B* 3(4), 433–438, 1967.
- [8] F. R. K. Chung, F. Thomson Leighton, A. L. Rosenberg: Embedding Graphs in Books: A Layout Problem with Applications to VLSI Design. *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*, 8(1), 33–58, 1987.
- [9] B. Courcelle: The monadic second-order logic of graphs I: Recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 85(1), 12–75, 1990.
- [10] B. Courcelle, M. Mosbah: Monadic second-order evaluations on tree-decomposable graphs. *Theoretical Computer Science*, 109(1-2), 49–82, 1993.
- [11] V. Dujmović, M. R. Fellows, M. Kitching, G. Liotta, C. McCartin, N. Nishimura, P. Ragde, F. Rosamond, S. Whitesides, D. R. Wood: On the Parameterized Complexity of Layered Graph Drawing. *Algorithmica* 52(2), 267–292, 2008.
- [12] R. Fulek, H. He, O. Sýkora, I. Vrt’o: Outerplanar Crossing Numbers of 3-Row Meshes, Halin Graphs and Complete p -Partite Graphs. In *Proc. of SOFSEM 2005*, pages 376–379, 2005.
- [13] H. He, A. Sălăgean, E. Mäkinen: One- and two-page crossing numbers for some types of graphs. *International Journal of Computer Mathematics* 87(8), 1667–1679, 2010.
- [14] J. Hopcroft, R. Tarjan: Algorithm 447: efficient algorithms for graph manipulation. *Communications of the ACM* 16(6), 372–378, 1973.
- [15] P. C. Kainen: The book thickness of a graph II. *Congressus Numerantium* 71, 121–132, 1990.
- [16] T. Kloks: Treewidth: Computations and Approximations. *Lecture Notes in Computer Science* 852, Springer-Verlag, 1994.
- [17] E. Mäkinen: On circular layouts. *International Journal of Computer Mathematics* 24, 29–37, 1988.
- [18] S. Masuda, T. Kashiwabara, K. Nakajima, T. Fujisawa: On the NP-completeness of a computer network layout problem. In *Proc. of ISCAS 1987*, pages 292–295, 1987.
- [19] S. L. Mitchell: Linear algorithms to recognize outerplanar and maximal outerplanar graphs. *Information Processing Letters* 9(5), 229–232, 1979.
- [20] F. Shahrokhi, O. Sýkora, L. A. Székely, I. Vrt’o: Book embeddings and crossing numbers. In *Proc. of WG 1994*, pages 256–268, 1995.
- [21] J. M. Six, I. G. Tollis: Circular drawings of biconnected graphs. In *Proc. of ALNEX 1999*, pages 57–73, 1999.
- [22] M. M. Syslo: Characterizations of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics* 26(1), 47–53, 1979.
- [23] M. Yannakakis: Embedding planar graphs in four pages. *Journal of Computer and System Sciences* 38, 36–67, 1989.