 Vol.2016-MPS-111 No.16
2016/12/12

総頂点間経路長を最小にする完全２分木への２辺追加

澤田清[†1]

概要：本研究では，高さ H の完全２分木に２辺を追加するモデルを提案する．まず，総頂点間短縮経路長を最大にする深さ N^*の最適な２頂点間に１辺追加する．次に，深さ M ($M = 1, 2, ..., H$)の２頂点間に２辺目を追加する．総頂点間短縮経路長を最大にすることにより，深さ M^*の最適な２頂点間に追加する辺が得られる．

キーワード：組織構造，情報伝達，完全２分木，総頂点間経路長

Adding Two Edges to a Complete Binary Tree Minimizing Total Distance

KIYOSHI SAWADA[†1]

Abstract: This study proposes a model of adding two edges to a complete binary tree of height H. Firstly we add one edge between the optimal pair of two nodes with the optimal depth N^* maximizing a total shortening distance. Secondly we add another edge between nodes with the same depth M ($M = 1, 2, ..., H$). The optimal pair of two nodes with the optimal depth M^* is obtained by maximizing a total shortening distance.

Keywords: Organization structure, Communication of information, Complete binary tree, Total distance

1. はじめに

著者らはこれまで，組織構造[1, 2]の情報伝達の効率化を目的として，メンバー間の関係追加モデルに関する研究を行ってきた．

文献[3, 4]では，完全２分木型の組織構造に対して同じ階層の２人のメンバー間に関係を追加するモデルを提案した．そこでは，メンバーとメンバー間関係を頂点と辺に対応させ, 高さ H の完全２分木[5]の同じ深さの２頂点間に１辺を追加するとき，完全２分木の全頂点対の総経路長（総頂点間経路長）を最小にする追加辺を求めた．さらに，文献[6]では同じ深さに２辺を追加するモデルを提案した．

本研究では，２辺の深さが同じであるという文献[6]の条件を一般化し，それぞれの辺は同じ深さの２頂点間に追加するが，２辺の深さは同じでなくてもよいモデルを提案する．ここでも総頂点間経路長を最小にする追加辺を求めるが，辺追加による全頂点対の短縮経路長の総和である総頂点間短縮経路長を定式化しこれを最大にすることとする．

2. 問題設定

ここでは，高さ H ($H = 2, 3, \ldots$)の完全２分木の同じ深さの２頂点間に，次のように２辺を追加する．ただし，２辺は異なる深さでもよい．

(i) 同じ深さの２頂点間に, 総頂点間短縮経路長が最大となるように深さ N ($N = 1, 2, ..., H$)に１辺を追加する．文献[3, 4]より，$H = 2$ のとき深さ $N^* = 1$ の２頂点，$H = 3, 4, \ldots$のとき最深共通祖先の深さが 0 である深さ $N^* = 2$ の２頂点が総頂点間短縮経路長を最大にする２頂点である．ここで，最適な２頂点をそれぞれ n^X，n^Y とする．

(ii) (i)の辺追加の後, 総頂点間短縮経路長が最大となるように深さ M ($M = 1, 2, ..., H$)に２辺目を追加する．２辺目の２頂点を m^X，m^Y とする．

以下では，２頂点 u, v の最深共通祖先の深さを DDCA(u, v)と書くことにする．

3. 総頂点間短縮経路長の定式化

(I) $H = 2$ の場合

$M = 2$ のみであるので，$M^* = 2$ である．また，DDCA(m^X, m^Y) = 0 のとき総頂点間短縮経路長は 2，DDCA(m^X, m^Y) = 1 のとき総頂点間短縮経路長は 1 であるので, DDCA(m^X, m^Y) = 0 のとき総頂点間短縮経路長が最大となる．

(II) $H = 3, 4, \ldots$の場合

最深共通祖先の深さによって次のように場合分けする．

(a) DDCA(m^X, m^Y) = 0, DDCA(n^X, m^X) = 1, DDCA(n^Y, m^Y) = 1 のとき，総頂点間短縮経路長を $T_{1,H}(M)$とする．ただし，$M = 1, 2, ..., H$ である．

(b) DDCA(m^X, m^Y) = 0, DDCA(n^X, m^X) = 1, DDCA(n^Y, m^Y) = 2 または DDCA(m^X, m^Y) = 0, DDCA(n^X, m^X) = 2, DDCA(n^Y, m^Y) = 1 のとき，総頂点間短縮経路長を $T_{2,H}(M)$とする．ただし，$M = 2, 3, ..., H$ である．

(c) DDCA(m^X, m^Y) = 0, DDCA(n^X, m^X) = 2, DDCA(n^Y, m^Y) = 2 のとき，総頂点間短縮経路長を $T_{3,H}(M)$とする．ただし，$M = 3, 4, ..., H$ である．

†1 流通科学大学
University of Marketing and Distribution Sciences

(d) DDCA(m^X, m^Y) > 0の場合，任意の深さMでDDCA(m^X, m^Y) = 1 のときに総頂点間短縮経路長が最大となる．DDCA(m^X, m^Y) = 1のとき，総頂点間短縮経路長を$T_{4,H}(M)$とする．ただし，M = 2, 3, ..., Hである．

$T_{1,H}(M)$, $T_{2,H}(M)$, $T_{3,H}(M)$, $T_{4,H}(M)$は，次のように定式化される．

$T_{1,H}(M)$ は，M = 1のとき

$$T_{1,H}(M) = [W(H-2)+1]^2, \tag{1}$$

M = 2, 3, ..., H のとき

$$\begin{aligned} T_{1,H}(M) &= [W(H-M)]^2(2M-1) \\ &\quad + 2W(H-M)\sum_{i=1}^{M-2}[W(H-i-2)+1](2i+1) \\ &\quad + 2W(H-M) + \sum_{i=1}^{M-2}[W(H-i-2)+1] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{i}[W(H-M+j-1)+1](2i-2j+1) \end{aligned} \tag{2}$$

である．$T_{2,H}(M)$ は，

$$\begin{aligned} T_{2,H}(M) &= [W(H-M)]^2(2M-2) \\ &\quad + 2W(H-M)\sum_{i=1}^{M-2}[W(H-i-2)+1]2i \\ &\quad + W(H-M)[W(H-2)+1] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-3}[W(H-i-3)+1] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{i}[W(H-M+j-1)+1](2i-2j+2) \end{aligned} \tag{3}$$

である．ただし，M = 2, 3, ..., Hである．$T_{3,H}(M)$ は

$$\begin{aligned} T_{3,H}(M) &= [W(H-M)]^2(2M-4) \\ &\quad + 2W(H-M)\sum_{i=1}^{M-3}[W(H-i-3)+1]2i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-4}[W(H-i-4)+1] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{i}[W(H-M+j-1)+1](2i-2j+2) \end{aligned} \tag{4}$$

である．ただし，M = 3, 4, ..., Hである．$T_{4,H}(M)$ は

$$\begin{aligned} T_{4,H}(M) &= [W(H-M)]^2(2M-3) \\ &\quad + 2W(H-M)\sum_{i=1}^{M-2}[W(H-i-2)+1](2i-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-3}[W(H-i-3)+1] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{i}[W(H-M+j-1)+1](2i-2j+1) \end{aligned} \tag{5}$$

である．ただし，M = 2, 3, ..., Hである．

4. 最適深さ

M = 2, 3, ..., Hについて

$$T_{1,H}(M) > T_{2,H}(M), \tag{6}$$

M = 3, 4, ..., Hについて

$$T_{1,H}(M) > T_{3,H}(M), \tag{7}$$

M = 2, 3, ..., Hについて

$$T_{1,H}(M) > T_{4,H}(M) \tag{8}$$

である．以上より，H = 3, 4, ...の場合，すべてのM（M = 1, 2, ..., H）に対して，DDCA(m^X, m^Y) = 0, DDCA(n^X, m^X) = 1, DDCA(n^Y, m^Y) = 1 のとき総頂点間短縮経路長が最大となる．

また，M = 1のとき

$$T_{1,H}(M+1) - T_{1,H}(M) > 0, \tag{9}$$

M = 2, 3, ..., H - 1のとき

$$T_{1,H}(M+1) - T_{1,H}(M) < 0 \tag{10}$$

であることから，総頂点間短縮経路長が最大となる深さはM^* = 2である．

参考文献

[1] Robbins, S. P.. Essentials of Organizational Behavior. 7th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2003.
[2] Takahara, Y. and Mesarovic, M.. Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation. Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 2003.
[3] 澤田清，宇野斉．完全２分木型組織構造への関係追加モデル．日本応用数理学会論文誌. 2000, vol. 10, no. 4, p. 335-346.
[4] Sawada, K. and Wilson, R.. Models of Adding Relations to an Organization Structure of a Complete K-ary Tree. European Journal of Operational Research. 2006, vol. 174, p. 1491-1500.
[5] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. and Stein, C.. Introduction to Algorithms. 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.
[6] 澤田清．総頂点間経路長を最小にする完全２分木の同一階層内２辺追加モデル．情報処理学会研究報告. 2010, vol. 2010-MPS-78, no. 10, p.1-3.