曲率プロットの指定による曲線の生成と対話的制御

吉田典正[†1]　斎藤隆文[†2]

概要：本研究では，弧長に対する曲率を指定した曲率プロットに基づく曲線を弧長パラメータ（Arc-Length Parameterization, ALP）曲線として定式化する．曲率プロットを explicit な多項式および有理式 Bézier 曲線で指定することによって，G^m Hermite 補間の条件のもとで，曲線セグメントを対話的に生成する手法を提案する．n 次の explicit 多項式 Bézier 曲線の制御曲率は，G^m Hermite 補間の条件およびユーザによって与えられるパラメータによって決定する．有理式の場合のウェイトは，ユーザによって与えられる２つのパラメータによって決定する手法を述べる．この手法により，n 次の多項式および有理式の G^m Hermite 補間を２変数の最適化に帰着させて解く手法を述べる．本手法をプログラムとして実装し曲線の生成結果を示すとともに，リアルタイムに曲線を生成できることを確認する．

キーワード： CAD, 意匠デザイン，曲率プロット，G^1 & G^2 Hermite 補間

Interactive Control of Curves by Specifying Curvature Plots

NORIMASA YOSHIDA[†1]　TAKAFUMI SAITO[†2]

Abstract: This paper proposes Arc-Length Parameterization (ALP) curves by specifying curvature plots that are graphs of curvature versus arc length. We propose a method for interactively generating curve segments by specifying curvature plots in explicit polynomial and rational Bézier curves. "Control curvatures" of explicit Bézier curves of degree n are computed from the given G^m Hermite interpolation condition and a user-specified parameter. The weights of rational explicit Bézier curves are specified by user-specified parameters. With the use of user-specified parameters, G^m Hermite interpolation of both polynomial and rational curves of degree n can be performed by an optimization of two parameters. We show the results of generated curves by implementing the code and confirm that curve segments can be generated in real time.

Keywords: CAD, aesthetic shape design, curvature plot, G^1 & G^2 Hermite interpolation

1. はじめに

高度に美的な曲面のデザインでは，デザイナは，反射線などの曲面への映り込み形状を評価することによって曲面のデザインを行う．高度に美的な曲面をデザインするために，曲面を生成するための曲線自体も高度に美的である必要があり，曲線の曲率や曲率の変化は重要な要因の一つである．特に，曲率変化の単調性は重要であり，曲率変化の単調な曲線生成に関する様々な研究が行われてきた．

近年，斎藤らによって，方向角パラメータによる曲線（TAP 曲線）[14]が提案された．TAP 曲線は，曲率半径を方向角の関数として表すものであり，TAP 関数が多項式の場合には曲線位置を求める積分が closed-form で求まること，G^m Hermite 補間が線型方程式に帰着することなど優れた性質を持つが，変曲点を表現できない．本報告では，曲率プロット（曲率を弧長によって表したグラフ）を指定することによって，曲線を提案する弧長パラメータ (Arc-Length Parameterization, ALP)曲線を提案する．これにより変曲点や直線を表現できるようになる．曲率プロットを n 次の explicit な多項式および有理式 Bézier 曲線で表現し，2 変数の最適化によって $G^m\left(m \geq 1\right)$ Hermite 補間を行う手法を提案する． explicit 多項式 Bézier 曲線については，曲率の単調性を維持し，G^2 Hermite 補間が可能な両端点での曲率の範囲を実験的に明らかにする．

2. 関連研究

曲線の曲率を制御する研究（特に曲率変化の単調性に関する研究）は，Bézier や B-spline 曲線などの多項式および有理式曲線に基づくものと，それら以外の曲率をより直接的に指定する研究に大別することができる．

2.1 多項式および有理式曲線に関する研究

Sapidis と Frey は２次多項式 Bézier 曲線が曲率単調になる必要十分条件を示した[15]. Frey と Field は２次の有理式曲線が曲率単調になる条件を示している[6]. Diez と Piper は，事前に計算した表を用いて，3 次の多項式 Bezier 曲線[2]および 3 次の有理式 Bézier 曲線[3]の曲率を単調に変化させる手法を提案している．Wang らは n 次の多項式 Bézier 曲線の曲率変化が単調になる十分条件を示した[18]. Farin は，曲率および捩率の変化が単調になる class A Bézier 曲線を提案した[4]. Yoshida, Hiraiwa, Saito らは，class A Bézier 曲線を対話的に制御する手法[21]を示し，典型的 class A Bézier 曲線の次数を上げていくと対数螺旋に近づくことを示した．

---

†1 日本大学
Nihon University
†2 東京農工大学
Tokyo University of Agriculture and Technology

Bézier や B-spline などの多項式および有理式曲線の形式で曲率を制御しようとする試みは他にも多く存在しているが，問題の複雑さは，曲線を $\mathrm{P}(t)$ ，t による 1,2 階微分を $\dot{\mathrm{P}}(t),\ddot{\mathrm{P}}(t)$ とした時に，曲率が

$$\kappa(t)=\frac{\left|\dot{\mathbf{P}}(t)\wedge\ddot{\mathbf{P}}(t)\right|}{\left|\dot{\mathbf{P}}(t)\right|^3} \tag{1}$$

によって計算されるということに起因している．

2.2 曲率をより直接的に指定する研究

曲率プロットを指定して，曲線を生成する手法は，Nutbourne ら[10]および Pal らによる研究[11, 12]があるが，これらは曲率が弧長に対して線形に変化することを前提としており，従って曲線セグメントはクロソイド曲線に限定されていること，および曲線形状が始点における設定値に依存するなどの問題を持つ．Ali らは，クロソイド曲線および対数らせんを一般化させた generalized Cornu spiral[1] 提案している．本研究は，これらの形式をすべて含む一般的な形式として，ALP 曲線を提案している．

渡辺らは，曲率プロットを３次 Bézier 曲線で表し，曲線を生成する手法[19]を提案している．渡辺らの手法では，弧長 s や両端点での曲率や曲率の変化率などが与えられて，曲線を生成しているが，本研究では，n 次 explicit Bézier 曲線を用いてより様々な条件で曲線を生成する手法を提案している．また，本研究では，弧長 s を最適化によるパラメータとして求めないでよい点も特徴である（このことは，渡辺らの手法をより効率化できることを意味している）．

対数美的曲線[8, 9, 20]は，曲率対数グラフが直線となる曲線である．対数美的曲線は G^2 Hermite 補間に応用するには非常に曲率の変化が限定されすぎており，そのまま G^2 Hermite 補間に応用することは困難である．また，対数美的曲線は，曲率変化が単調な美しい曲線を生成できるが，自由自在に曲率を変化させることは困難である．対数美的曲線の拡張としては，一般化対数美的曲線[7]や２次対数美的曲線[22]などが提案されているが，曲率の制御可能な範囲は限定されている．

3. ALP 曲線

3.1 一般的な ALP 曲線

本節では，まず，曲率が弧長のパラメータで表される曲線(ALP 曲線)について述べる．本報告では，曲線は特に言及されていない場合を除いて，次の条件を満たす標準形で考える．

・原点を始点とし，そこでの弧長を 0 とする
・始点での接線ベクトルは x 軸の正の方向を向くとする

曲率 κ が弧長 s の関数 $\kappa(s)$ で表されるとする．このとき，弧長 s における方向角 θ は，

$$\theta(s)=\int_0^s\kappa(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

で表される．

標準形での曲線の位置 $\mathbf{P}(s)$ は，

$$\mathbf{P}(s)=\begin{bmatrix}\int_0^s\cos(\theta(t))\mathrm{d}t\\ \int_0^s\sin(\theta(t))\mathrm{d}t\end{bmatrix} \tag{3}$$

で表される．式(2),(3)は，微分幾何では標準的な式であり，$\kappa(s)$ に対数美的曲線の曲率の式(13)を代入すれば，対数美的曲線が得られる．

3.2 多項式 ALP 曲線

多項式 ALP 曲線では，曲率が弧長に関する多項式で表される曲線である．標準形の n 次多項式 Bézier-ALP 曲線セグメントの ALP 関数は，曲線の弧長を s_t，次数を n とした場合，$n+1$ 個の制御曲率 $\kappa_i(i=0,1,\ldots,n)$ を用いて，

$$\kappa(s)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(s/s_t)\kappa_i, \tag{4}$$

で表される．ここに，

$$B_i^n(\tau)=\binom{n}{i}(1-\tau)^{n-i}\tau^i \tag{5}$$

は Bernstein 関数である．式(4)において，s を s_t で割っているのは，Bernstein 関数のパラメータ範囲を 0 から 1 に正規化するためである．$G^m(m\geq 1)$ Hermite 補間を行う場合には，曲線セグメントの方向角の変化 θ_d が与えられる．θ_d は，

$$\begin{aligned}\theta_d&=\int_0^{s_t}\kappa(s)\mathrm{d}s\\&=s_t\int_0^1\mathrm{K}(\tau)\mathrm{d}\tau\qquad(\tau=s/s_t)\\&=s_t\sum_{i=0}^{n}k_i/(n+1)\end{aligned} \tag{6}$$

となる．ここに

$$\mathrm{K}(\tau)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(\tau)\kappa_i\qquad(0\leq\tau\leq 1) \tag{7}$$

である．これより，θ_d が与えられたときに，s_t は，

$$s_t=\frac{\theta_d(n+1)}{\sum_{i=0}^{n}k_i} \tag{8}$$

で求めることができる．

3.3 有理式 ALP 曲線

標準形の n 次有理式 Bézier-ALP 曲線セグメントの ALP 関数は，多項式の場合と同様なパラメータに加え，$n+1$ 個のウェイト $w_i(i=0,1,\ldots,n)$ を用いて

$$\kappa_R(s)=\frac{\sum_{i=0}^{n}B_i^n(s/s_t)w_i\kappa_i}{\sum_{i=0}^{n}B_i^n(s/s_t)w_i} \tag{9}$$

で表される．θ_d が与えられ．

$$\mathrm{K}_R(\tau)=\frac{\sum_{i=0}^{n}B_i^n(\tau)w_i\kappa_i}{\sum_{i=0}^{n}B_i^n(\tau)w_i} \tag{10}$$

とおいたとき，弧長 s_t は，

$$s_t=\frac{\theta_d}{\int_0^1\mathrm{K}_R(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{11}$$

で表される．多項式の場合と異なり， s_t の計算には数値積分が必要となる．式(10)は n 次の explicit 有理 Bézier 曲線である．式(10)は， w_i すべてをスケール倍しても曲線は変わらないので，自由度は 1 減り $2n-1$ となる．explicit でない有理式 Bézier 曲線には，再パラメータ化によって曲線形状は変更しないため $2n-2$ の自由度となるが，explicit 有理 Bézier 曲線では再パラメータ化はできないため自由度は $2n-1$ となる．

3.4 変曲点の有無と曲率単調性

TAP 曲線は，TAP 関数の符号が変わる点（ $\rho=0$ の点）において尖点が生じた．ALP 曲線では，ALP 関数の符号が変わる点（ $\kappa=0$ の点）において，変曲点が生じる（図 3(b)を参照）．多項式および有理式 ALP 曲線の変曲点の有無は， $\tau\in[0,1]$ の範囲において Bézier clipping[17]を用いて容易に調べることができる．多項式 ALP 曲線の次数が低い場合には，零点の有無を直接判定することにより変曲点の有無を調べることも可能である．

曲率単調性の有無は，ALP 関数の 1 階微分が， $\tau\in[0,1]$ の範囲で 0 にならなければよい． 1 階微分を行った式に対して（有理式の場合は， $w_i>0$ と仮定し，微分した式の分子のみに対して），変曲点の有無を調べるのと同様に，関数の零点の有無を調べるか Bézier clipping を用いての曲率単調性を調べることができる．有理式 ALP 関数は，分数式の微分になるため複雑になるが， $w_i>0$ と仮定し，微分した式の分子の零点の有無を調べればよい．式(9)を微分した式の分子は，文献[13,16]の手法を応用することにより，分子は（$2n-1$ 次ではなく） $2n-2$ 次の explicit 多項式 Bézier 曲線で表すことができる．

4. G^m Hermite 補間

本節では，n 次の多項式および有理式 ALP 曲線セグメントの $G^m(m\geq 1)$ Hermite 補間を 2 変数の最適化の問題に帰着させて行う手法を述べる． G^m Hermite 補間を行うためには，多項式 ALP 関数の次数は $n\geq 2m-1$ でなければならない． $n>2m-1$ の場合には，under-constrained となる．この際，under-constrained となる制御曲率を，１つのパラメータで制御する手法を述べる．有理式 ALP 関数については，多項式 ALP 関数の under-constrained な制御曲率を決めるパラメータに加えて，すべてのウェイトを２つのパラメータで制御する手法を述べる． $n>2m-1$ の場合に，本節で述べる制御曲率やウェイトを決める手法は 1 手法であり，その他に $\kappa_0=\kappa_1=\ldots=\kappa_{\lfloor n/2\rfloor}$， $\kappa_{\lfloor n/2\rfloor+1}=\ldots=\kappa_n$ と仮定して解く手法など様々な方法が考えられる．

4.1 多項式 ALP 曲線の G^m Hermite 補間

一般性を失うことなく，ここでは，標準形での G^m Hermite 補間を考える．標準形では，始点 $\mathbf{P}_s$ が原点，始点での接線ベクトル $\mathbf{t}_s=[1\quad 0]^{\mathrm{T}}$ ，終点 $\mathbf{P}_e$ は第 1 象限または第 2 象限内にあるとする． G^1 Hermite 補間では，さらに終点での接線ベクトル $\mathbf{t}_e$ が与えられる（図 1 参照）．標準形でない場合には，適切な合同変換を施すことによって，標準形に変換する．

次数 $n=1$ の多項式 Bézier-ALP 曲線の G^1 Hermite 補間では， κ_0,κ_1 の 2 つのパラメータを持つ． G^1 Hermite 補間 の与えられた条件 $\mathbf{P}_s,\mathbf{t}_s,\mathbf{t}_e$ は 3.2 節に述べた方法で満足するので， κ_0,κ_1 を最適化の変数として， $\left|\mathbf{P}(s_t)-\mathbf{P}_e\right|$ を最小化する（実際には非常に小さい誤差の範囲で 0 になる）ような最適化の手法を用いればよい． 次数 $n=3$ の多項式 Bézier-ALP 曲線の G^2 Hermite 補間では， G^1 Hermite 補間の条件に加えて，両端点での曲率 κ_s,κ_e が与えられる． $\kappa_1=\kappa_s,\kappa_3=\kappa_e$ とし， κ_1,κ_2 を最適化のパラメータとして， $\left|\mathbf{P}(s_t)-\mathbf{P}_e\right|$ を最小化すればよい．

$n\geq 2m-1$ の場合の G^m Hermite 補間を考える． $m>1$ の場合， $\kappa_0,\kappa_1,\ldots,\kappa_{m-2}$ および $\kappa_{n-(m-2)},\ldots,\kappa_{n-1},\kappa_n$ が G^m Hermite 補間の条件から決まるので， $\kappa_{m-1},\kappa_m,\ldots,\kappa_{n-(m-2)-1}$ の $n-2m+3$ 個の制御曲率を決定すればよい． $n=2m-1$ の場合は，上記の G^1 Hermite および G^2 Hermite 補間と同様に， κ_{m-1},κ_m の２つを最適化のパラメータとすればよい． $n>2m-1$ の場合には， $\kappa_{m-1},\kappa_{n-(m-2)-1}$ の２つのパラメータを最適化のパラメータとし， $\kappa_m,\ldots,\kappa_{n-m}$ を次に述べる手法によって求める．

２つの値 p_s,p_e および変数 p が得られたときに， l 個の

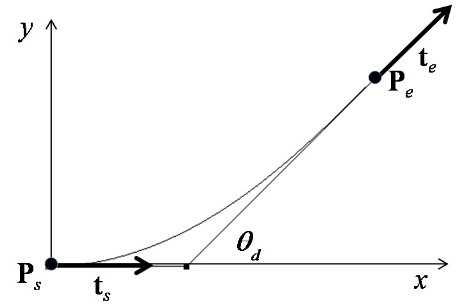


図 1 標準形での G[1] Hermite 補間

Fig.1 G[1] Hermite Interpolation in the Standard Form

点 $p_0,\ldots,p_{l-1}$ の値を決定したいとする．ここで，$p_0,\ldots,p_{l-1}$ を決定する方法は無限にあるが，$p_s,p_0,\ldots,p_{l-1},p_e$ を制御点とする explicit 多項式 Bézier 曲線が単調増加または単調減少に変化させるように決定する．l 個の点 $p_0,\ldots,p_{l-1}$ の $i\left(0\le i\le l-1\right)$ 番目の点 p_i の値は,

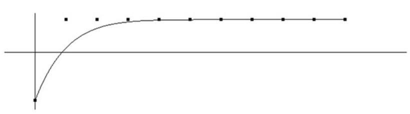
$$
\begin{aligned}
v &= \frac{i+1}{l+1}\left(p_e-p_s\right)+p_s,\\
p_i &= \begin{cases} p\cdot\left(p_e-v\right)+v & \text{if}\ p\ge 0\\ p\left(v-p_s\right)+v & \text{otherwise}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

によって求める．図 2 に $l=9$ の例と explicit 多項式 Bézier 曲線を示す．$p=0$ の場合は線形補間になり，$p\in\left[-1,1\right]$ の範囲では必ず曲線は単調減少または単調増加になる. なお, $m\ge 2$ の場合の G^m Herimite 補間では，この方法を用いても必ずしも曲率変化の単調性は保証されないが，この手法によって，曲率変化の単調性をなるべく維持させながら変曲点を除去することなどが可能である.

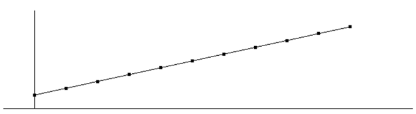
$n>2m-1$ の場合の G^m Hermite 補間では，$p_s=\kappa_{m-1}$，$p_e=\kappa_{n-(m-2)-1}$ とし，式(12)を用いて $l=n-2m+1$ 個の制御曲率 $\kappa_m,\ldots,\kappa_{n-m}$ を求める，の２つのパラメータを最適化のパラメータとする．ここで，式(12)の p は G^1 Herimite 補間の条件などと同様にユーザによって与えられる.

4.2 有理式 ALP 曲線の G^m Hermite 補間

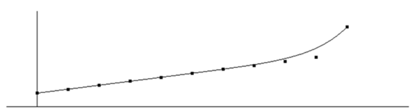
$n>2m-1$ の場合の有理式 ALP 曲線の G^m Hermite 補間は, 多項式の場合とほぼ同様であるが，ウェイトも式(12)に基づいて，次のように決める．有理式 ALP 曲線では，ウェイト w_i すべてをスケール倍しても曲線が変わらないため，



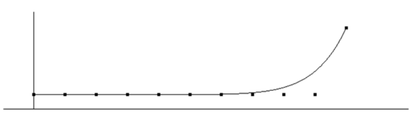
(a) $p=-1$



(b) $p=0$



(c) $p=-0.4$



(d) $p=1$

図 2　式(12)による補間

Fig.2　Interpolation by Eq.(12)

$w_0=1$ とする．w_e をユーザによって与える値とし，$w_n=w_e$ とし，ユーザによって与えられる値 p_w を用いて $p=p_w$，$p_s=w_0$，$p_e=w_n$ とし，式(12)を用いて，$l\left(=n-1\right)$ 個のウェイト $w_1,w_2,\ldots,w_{n-1}$ を求める．$w_e=1$ の場合はすべてのウェイトが 1 になるため多項式になり，$p_w=0$ の場合には $w_1,w_2,\ldots,w_{n-1}$ は w_s,w_e の線形補間となる.

制御曲率 k_i の求め方は, 多項式の場合と同様である．G^m Hermite 補間の条件から，$\kappa_0,\kappa_1,\ldots,\kappa_{m-2}$ および $\kappa_{n-(m-2)},\ldots,\kappa_{n-1},\kappa_n$ が定まるので，$\kappa_{m-1},\kappa_{n-(m-2)-1}$ の２つのパラメータを最適化のパラメータとし，$\kappa_m,\ldots,\kappa_{n-m}$ を式(12)によって求める.

5. ALP 曲線の生成結果

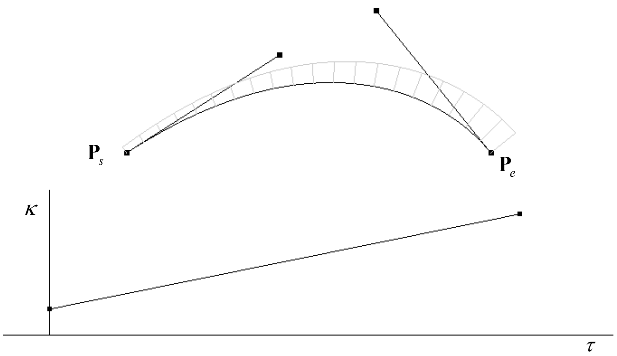
本節では，4 節までに述べた理論を C++言語で実装した結果を示す. 曲線セグメントは, Intel Core i7 2.2 GHz の CPU を用いて十分に対話的な速度で計算できている．本節の図において，曲線上の赤い丸は変曲点を，四角い点は曲率の極値を示す．また，曲線とともに curvature comb を表示させている．各図において，下のグラフは横軸が τ，縦軸が曲率 κ の曲率プロットを示している.

5.1 多項式 ALP 曲線の生成結果

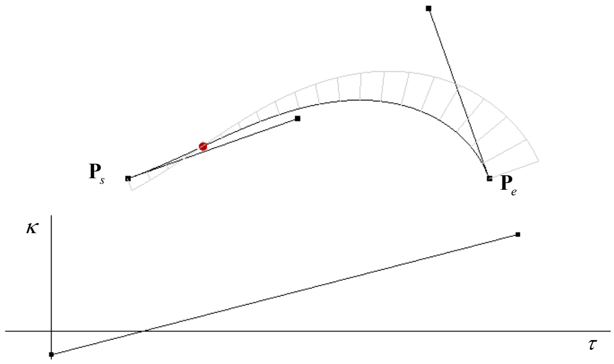
図 3 に, 様々な　多項式 Bézier-ALP 曲線の生成結果を示す. 図 3(a)は次数 $n=1$ の多項式 Bézier-ALP 曲線（G^1 Hermite 補間）である．$n=1$ の場合は，曲率は弧長に対して線形になり（従って，クロソイド曲線となり），曲率は常に単調に変化するが，(b)に示されるように変曲点が生じる場合がある．図 3(c)-(f)は，図 1(a)と同じ G^1 Hermite 条件が与えられた場合の $n=3$ の多項式 Bézier-ALP 曲線である. 式(12)の p の値を変えることによって，同じ G^1 Hermite 条件で，曲率プロットおよび曲線形状を変えることができる．$p=0$ の場合は，次数 n に依存せず，図 3(a)の場合と同じ曲線となる．図 3(g),(h)に，$n=3,\kappa_s=0.5,\kappa_e=1.5$ の G^2 Hermite 補間の結果を示す．G^2 Hermite 補間で求められた曲線は，変曲点が存在したり，曲率変化が単調でなくなったりする場合がある．図 3(h)は，曲率の極値が存在し，従って曲率変化が単調でない例である.

5.2 有理式 ALP 曲線の生成結果

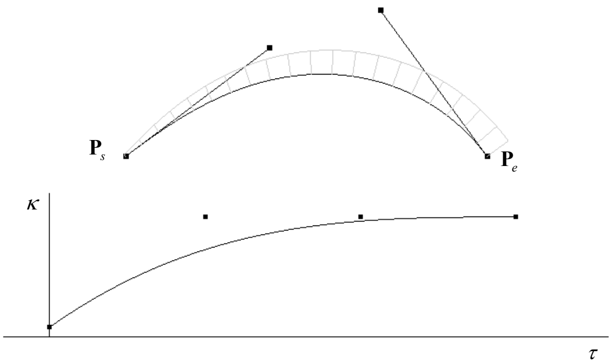
図 4 に有理式 Bézier-ALP 曲線の生成結果を示す. 図 4 (a)は，$n=3,p=0,w_e=2.8,p_w=-1.3$ の G^1 Hermite 補間を，図 4(b)は $p_w=1.3$ に変更した曲線を示す．図 4(c)は，図 3(h)と同じ次数および同じ G^2 Hermite 条件であるが，有理式を用い $p=0,w_e=3.5,p_w=-1.2$ とすることによって，変曲点を除いた例である．p,w_e,p_w の値は，変曲点が除かれるように（かつ曲率変化の単調性が維持されるように），システムのスライダーバーを対話的に操作して決定した.



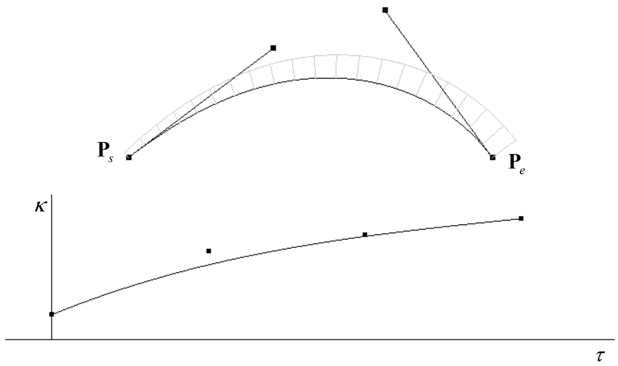
(a) G^1 Hermite Interpolation ($n=1$)



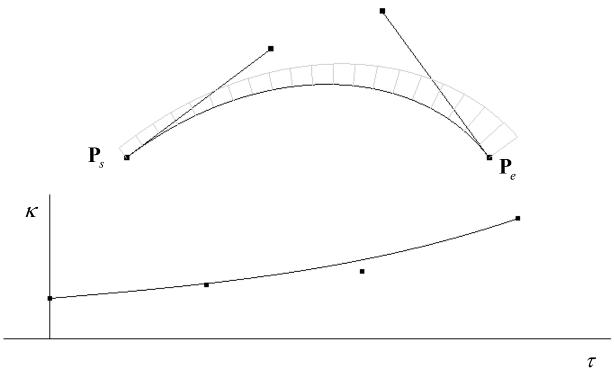
(b) G^1 Hermite Interpolation ($n=1$) with an inflection point



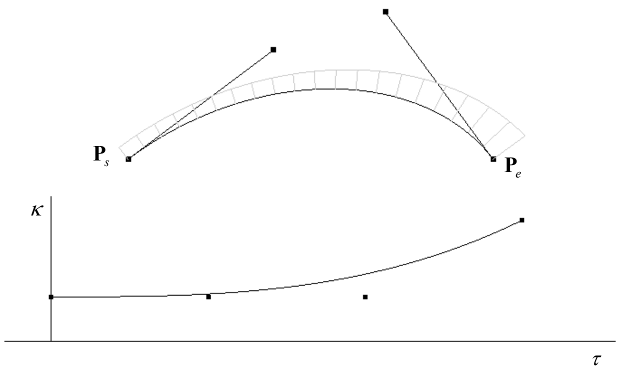
(c) G^1 Hermite Interpolation ($n=3, p=-1$)



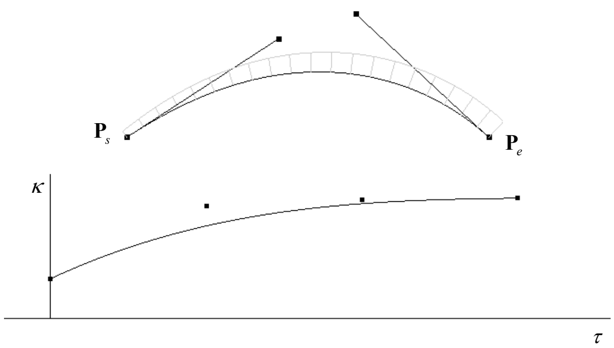
(d) G^1 Hermite Interpolation ($n=3, p=-0.5$)



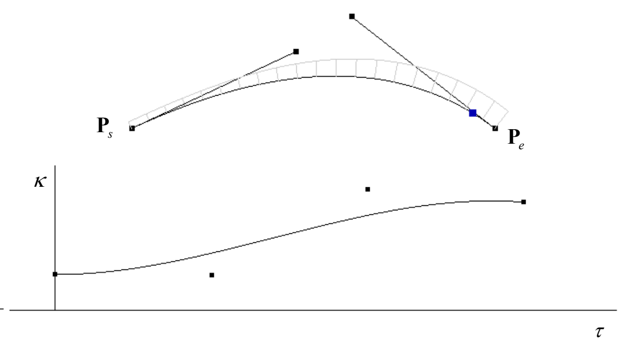
(e) G^1 Hermite Interpolation ($n=3, p=0.5$)



(f) G^1 Hermite Interpolation ($n=3, p=1$)



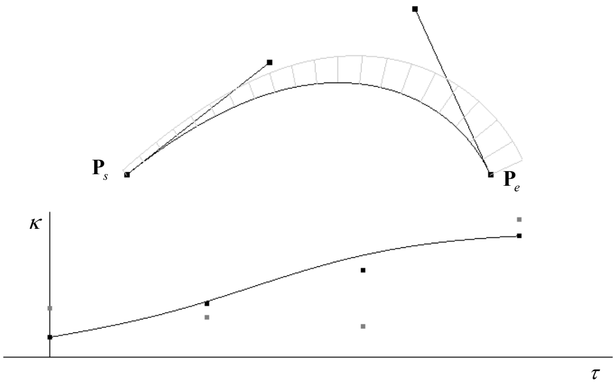
(g) G^2 Hermite Interpolation ($n=3, \kappa_s=0.5, \kappa_e=1.5$)



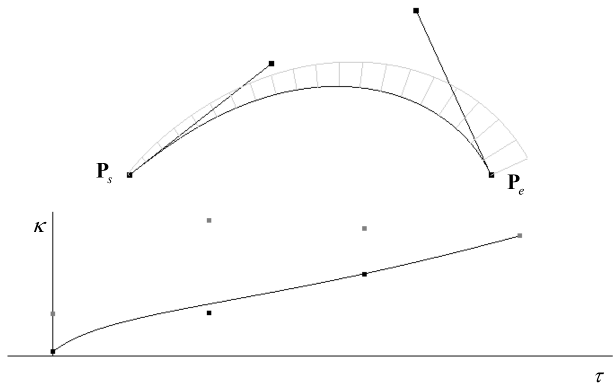
(h) G^2 Hermite Interpolation ($n=3, \kappa_s=0.5, \kappa_e=1.5$) with a curvature extrema

図 3 多項式 Bézier-ALP 曲線

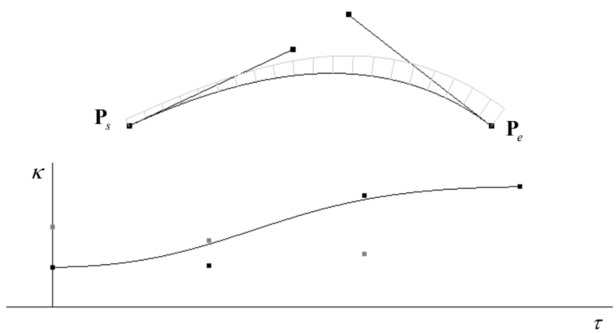
Fig. 3 Polynomial Bézier-ALP curves



(a) G^1 Hermite Interpolation ($n=3, p=0, w_e=2.8, p_w=-1.3$)



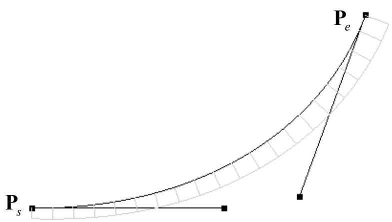
(b) G^1 Hermite Interpolation ($n=3, p=0, w_e=2.8, p_w=1.3$)



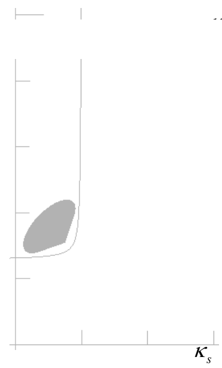
(c) G^2 Hermite Interpolation ($n=3, \kappa_s=0.5, \kappa_e=1.5, p=0, w_e=3.5, p_w=-1.2$)

図 4　有理式 Bézier-ALP 曲線

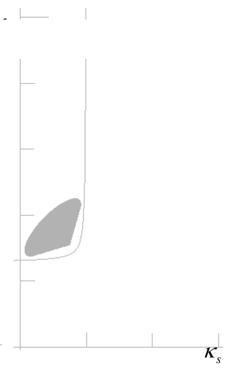
Fig. 4　Rational Bézier-ALP curves



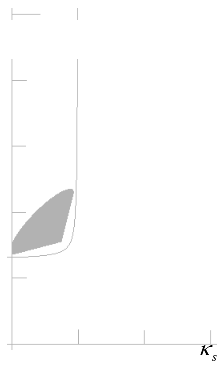
(a)　G^1 Hermite condition



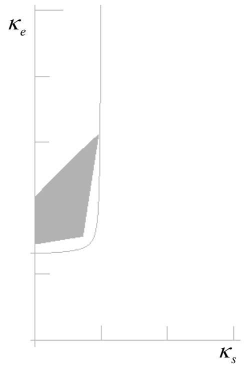
(b) $n=3$



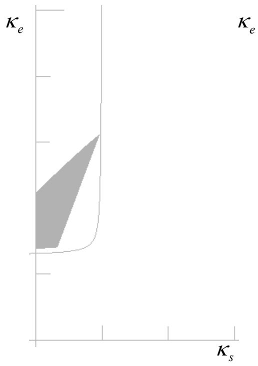
(c) $n=4$



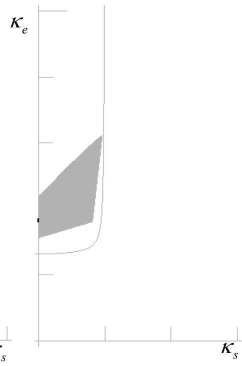
(d) $n=5$



(e) $n=10, p=0$



(f) $n=10, p=-0.8$



(g) $n=10, p=0.5$

図 5　実験による多項式 Bézier-ALP 曲線の G^2 Hermite が可能な領域

Fig.5　Experimental　G^2 Hermite region of polynomial Bézier-ALP curves

5.3 G^2 Hermite 補間が可能な領域

図 5(b)-(g)は，多項式 Bézier-ALP 曲線について，図 54(a)に示す G^1 Hermite 条件（曲線および curvature comb は無視する）が与えられたときに，変曲点が存在することなく曲率変化の単調性を保って曲線セグメントを生成することのできる始点での曲率 κ_s と終点での曲率 κ_e の範囲（グレーで塗りつぶされた領域）を実験的に示したものである．図において，双曲線は文献[3][14]と同様に G^2 Hermite 補間が可能な理論的領域を示している．図 5(b), (c), (d) は $n=3,4,5(p=0)$ の場合であり，次数が高くなると変曲点およびその近傍を含むようになり，かつ領域も広くなっていることがわかる．図 5 (e), (f), (g)は， $n=10$ であり p を 0, -0.8, 0.5 に変化させた場合であり，領域が変化している様子がわかる．

6. TAP 曲線との比較

TAP 曲線と ALP 曲線には，曲率プロファイルの制御が可能であるなど多くの共通の性質を持つが，それぞれに特徴を持つ．多項式 TAP 曲線の優れている点は， G^m Hermite 補間が線形方程式で解けてしまうこと，及びこのことから，3 次の多項式 TAP については G^2 Hermite 補間が可能な始点での曲率半径 ρ_s および終点での曲率半径 ρ_e の領域を解析的に計算することが可能である．また， G^m Hermite 補間の解が必ず存在することが保証される（ただし，尖点が生じる場合がある）．一方，ALP 曲線では，多項式の場合でも，直接解を求めることはできず，最適化を用いる必要がある（我々の実装では，十分に対話的な速度で計算できることを確認している）．ALP 曲線では変曲点や直線を表現することが可能である．ALP 曲線の G^m Hermite 補間の解は，我々が実装して調べた範囲では，常に存在しそうである（ただし，変曲点が存在する場合がある）が，必ず解が存在するという証明はない．

多項式 TAP 曲線は， $\alpha = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$ の対数美的曲線は，多項式 TAP 曲線に含まれた[14]．対数美的曲線の曲率 κ は弧長 s の関数として，次式のように表される．

$$\kappa = \begin{cases} e^{-\Lambda s} & \text{if } \alpha = 0 \\ (\Lambda \alpha s + 1)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

従って， $\alpha = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$ の対数美的曲線は，多項式 ALP 曲線に含まれる．

7. まとめと今後の展望

本報告では，曲率プロットを指定することによって曲線を生成する弧長パラメータ曲線（ALP）曲線について述べ，その例として n 次の多項式および有理式 Bézier-ALP 曲線の G^m Hermite 補間を行う手法を提案した．この手法では，少ないユーザ指定パラメータで，2 変数の最適化によって G^m Hermite 補間を行うことができる．多項式 Bézier-ALP 曲線については，与えられた条件のもとで G^2 Hermite 補間が可能な領域を実験的に示した．

今後の研究としては，ユーザ指定によるパラメータと曲線形状との関係性の解明，制御曲率やウェイトのよりよい決定法，自由曲線による近似などがあげられる．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 16H02824, 26330149 の助成を受けた．

参考文献

[1] J. M. Ali, R. M. Tookey, J V. Ball, A. A. Ball, “The generalised Cornu spiral and its application to span generation,” J. Comput. Appl. Math. 102, pp. 37-47, 1999.
[2] D. A. Dietz and B. Piper, “Interpolation with cubic spirals,” Comput. Aided Geom. Des., 21(2), pp. 165–180, 2004.
[3] D. A. Dietz, B. Piper, and E. Sebe, “Rational cubic spirals,” CAD Comput. Aided Des., 40(1), pp. 3–12, 2008.
[4] G. Farin, Class A curves, Comput. Aided Geom. Des., 23(7), 2006, 573-581.
[5] G. Farin, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, 5th ed. Morgan Kaufmann, 2001.
[6] W. H. Frey, D. A. Field, Designing Bézier conic segments with monotone curvature, Comput. Aided Geom. Des., 17(6), 2000, 457-483.
[7] R. U. Gobithaasan, L. P. Yee, K. T. Miura, Shape analysis of generalized log-aesthetic curves, Int’l J. of Mathematical Analysis, 7(33-36), pp.1751-1759, 2013.
[8] T. Harada, F. Yoshimoto, M. Moriyama, An aesthetic curve in the field of industrial design, In: Proceedings of IEEE Symposium on Visual Languages, pp. 38–47. IEEE Computer Society Press, New York, 1999.
[9] K. T. Miura, A general equation of aesthetic curves and its self-affinity, Computer Aided Design and Applications, 3(1-4), pp.457-464, 2006.
[10] A. W. Nutbourne, P. M. McLellan, and R. M. L. Kensit, “Curvature profiles for plane curves,” *Comput. Aided Des*, 4(4), pp. 176–184, 1972.
[11] T. K. Pal and A. W. Nutbourne, “Two-dimensional curve synthesis using linear curvature elements,” *Comput. Aided Des*, 9(2), pp. 121–134, 1977.
[12] T. K. Pal, “Intrinsic spline curve with local control,” *Comput. Aided Des*, 10(1) , pp. 19–29, 1978.
[13] T. Saito, G.-J. Wang, T. W. Sederberg, Hodographs and normals of rational curves and surfaces, Comput. Aided Geom. Des., 12(4), pp.417–430, 1995.
[14] 斎藤隆文, 吉田典正, 方向角パラメータ曲線の提案, Visual Computing/グラフィクスと CAD.合同シンポジウム, 2016.
[15] N. S. Sapidis, W. H. Frey, Controlling the curvature of quadratic Bézier curve, Comput. Aided Geom. Des., 9(2), pp. 85-91, 1992.
[16] T. W. Sederberg, X. Wang, Rational hodographs, Comput. Aided Geom. Des.4(4), pp.333– 335, 1987.
[17] T. W. Sederberg, T. Nishita, Curve intersection using Bézier clipping, Comput. Aided Des., 22(9), pp.538-549, 1990.
[18] Y. Wang, B. Zhao, L. Zhang, J. Xu, K. Wang, S. Wang, Designing fair curves using monotone curvature pieces. Comput. Aid. Geom. Des. 21(5), pp.515–527, 2004.
[19] 渡辺由美子，斉藤剛，黒田満．曲率パターンを指定した曲線の生成法，グラフィクスと CAD 研究会, pp.7-12, 1997.
[20] N. Yoshida and T. Saito, Interactive aesthetic curve segments, Visual Computer, 22(9–11), pp. 896–905, Aug. 2006.
[21] N. Yoshida , T. Hiraiwa, and T. Saito, Interactive Control of Planar Class A Bezier Curves using Logarithmic Curvature Graphs, Computer-Aided Design & Applications, 5(1-4), pp.121-130, 2008.
[22] N. Yoshida, T. Saito, Quadratic Log-Aesthetic Curves, Computer Aided Design and Applications, 14(2), 2017, to appear.