

カオスの縁のデジタル性について

稲垣耕作[†]

複雑適応系の分野では、カオスの縁という概念が広く知られている。カオスの縁は離散的な性質をもつ系で発見されていて、著者の知る限りでは純粋な連続系では発見されていない。本論文では Wolfram のセルラーオートマトンモデルにおいて、カオスの縁が離散性と密接な関係をもつ概念であり、セルのとり状態数およびセルの近傍サイズのいずれが増えても、カオスの縁の出現する割合が漸近的に 0 に近づくとする証明を与える。生命を情報という観点から見ると、複雑適応系の分野では、生命の自己組織化現象とカオスの縁との密接な関係を推測されることが多い。この立場の下では、本証明は生命現象の根源にデジタル性が関与していることの理論的根拠となる可能性をもつ。証明では、カオスの縁の増殖的性質よりも、成長停止性が本質的な役割を果たす。

On Discreteness at the Edge of Chaos

KOSAKU INAGAKI[†]

The edge of chaos is a well-known concept in the field of complex adaptive systems (CASs). As far as the author knows, the edge of chaos is observed in systems which have some discrete characteristics, and has not been discovered in purely continuous systems. In this paper, based on the cellular automaton model proposed by S. Wolfram, it is proved that the occurrence probability of the edge of chaos asymptotically approaches 0 with the increase of either the number of states or the neighborhood size. CAS researchers who pay attention to information aspects of biological life, suppose that the edge of chaos has some close relation to self-organizing processes in living organisms. The proof presented here would contribute to such a theory that biological life utilizes digital phenomena. The proof shows that growth termination, rather than self-reproduction, is an essential property at the edge of chaos.

1. まえがき

複雑適応系 (complex adaptive system, CAS) の分野には、いわゆるカオスの縁 (edge of chaos) と呼ばれる興味深い概念がある。Wolfram^{1),2)} がセルラーオートマトンの研究で発見し、Packard³⁾ が命名した概念である。Kauffman⁴⁾ のランダムネットワークモデルにおいてもこの言葉が使われる。

カオスの縁を特徴づけるのは、そこで起る自己組織化に類似した現象であって、Langton⁵⁾ 等これを創発 (emergence) と呼ぶ研究者が多い。創発とは高い確率での自己組織化とでもみなすのがよいと考えられるが、カオスの縁とともに、厳密に科学的定義がなされている概念ではない。ただ、著者は創発仮説の下で基本万能性 (elemental universality)^{6)~11)} の概念を導入して、Wolfram²⁾ が予想したカオスの縁に計算万能性が伴うことを証明した。

本論文では、Wolfram によるセルラーオートマトンモデルを取上げ、カオスの縁の性質を更に考察して、この概念をより精密にしていくことを試みる。著者の知る限りでは、カオスの縁は何らかの離散的な性質をもつ系に付随していて、純粋な連続系では発見されていない。Wolfram¹²⁾ もこれについて考察している。ここではカオスの縁のデジタル性に関する一つの証明を与える¹³⁾。

ここでの証明では、セルの状態数あるいは近傍サイズのいずれかが増すにつれ、Wolfram のいうクラス 3 の出現が支配的となり、クラス 1, クラス 2, およびカオスの縁と呼ばれるクラス 4 の出現確率は漸近的に 0 に近づくとする方法をとる。この証明によって、カオスの縁はデジタル性と密接な関連があると考えられる。

複雑適応系の分野では、生命の自己組織化現象とカオスの縁との密接な関係を推測されることが多い。著者も創発仮説に関連して提唱した情報物理学^{7),8),11)} において、カオスの縁のデジタル性を重視している。創発仮説は現段階ではあくまで仮説であるが、計算万能性など離散系の性質を導入することにより、生命の発生と進化

[†] 京都大学大学院情報学研究所

Graduate School of Informatics, Kyoto University

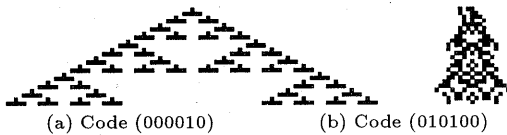


図2 発散的と非発散的の例

Fig. 2 Examples divergent or not.

1)-CA, (2, 2)-CA, (2, 3)-CA, (3, 1)-CA の4種のみだった。

カオスの縁は厳密に定義されていず、その研究は多くの問題点を含んでいる。Kauffmanによるものとの共通性も明らかでないなど、従来の研究は不完全である。ここでは、クラス4を真部分集合として含む集合に関して証明を行う方法により、間接的にカオスの縁の考察を深める。次の補題は式(2)の性質より容易にわかる。

補題1 (k, r) -CAにおいて、時刻 t の様相が $a_i^{(t)}$ を中心に左右対称ならば、それ以後の任意の時刻 $t+j$ における様相は $a_i^{(t+j)}$ に関して左右対称である。

また (k, r) -CAにおいて、時刻0における次のような初期状態の配置を考え、これを基本初期様相と呼ぶ。即ち $-r \leq i \leq r$ のとき、 $a_i^{(0)}$ の値は任意であって、それ以外の i については0とする。 $(a_{-r}^{(0)}, \dots, a_r^{(0)})$ を配列とみたとき、この配列には k^{2r+1} 通りの任意の値を割当て、それ以外のセルを0としたのが、基本初期様相である。

ある基本初期様相から始めたとき、 $a_i^{(t)} \neq 0$ である i の最小値を $m^{(t)}$ 、最大値を $M^{(t)}$ とする。 t が大きくなったときに、 $M^{(t)} - m^{(t)}$ が有界でなく、その間にある非0要素数も有界でない基本初期様相があるならば、発散的であるという。また常に有界であるならば、非発散的であるという。

図2の(2, 2)-CAにおいて、図2(a)は発散的であり、これ以後幾らでも広がる。発散的なとき、その基本初期様相に相当するパターンさえ与えられれば、比喩的に述べるならば、それ以後は白地をどんどん埋め尽くそうとする。即ちこれはクラス3の十分条件であり、従来もそのように分類されている。

補題2 発散的な (k, r) -CAは、クラス3に属する。

図2(b)は非発散的であり、これ以後は静状態のみである。図1(d)に示したクラス4である。この図は基本初期様相の中で最も長い時間にわたって非静状態を生成した場合を示している。

図1(d)に示したカオスの縁は、視察によっても、必ずしも白地を埋め尽くす性質をもっていない。その成長の先端部で発散するのではなく、しばしば成長を停止する。これがカオスの縁の一つの特徴である。ここでは、



図3 コード(00010100)の(2, 3)-CA

Fig. 3 (2, 3)-CA with code (00010100).

いかなる基本初期様相から始めても発散的でないことを、クラス4の必要条件としている。基本初期様相以外から出発した場合には、より複雑な現象も起るが、ここの証明には必要ない。

またその一見して有機的と見える形状の特徴は、図2(b)のように基本初期様相からの状態推移に現れる。元からCAの状態推移関数の中に組込まれているとみなすべきものである。

常に $m^{(t+1)} < m^{(t)}$ かつ $M^{(t)} < M^{(t+1)}$ となる基本初期様相があるとき、そのCAを単調増加的と呼ぼう。

単調増加性をもつときには、発散的であることを証明しやすい。しかしそうでない場合には、発散的であることの証明が困難なことが多い。例えば図3に示すCAは発散的であると予想されるが、その証明をここでは与えられない。個々のCAを対象としても、数理的性質を分析するのは難しく、CAは複雑である。

4. 状態数に関する漸近的性質

コード $C = (c_{(k-1)(2r+1)}, c_{(k-1)(2r+1)-1}, \dots, c_0)$ から、クラス3の (k, r) -CAを判定する十分条件の一つを与えよう。単調増加的のうち、最大単調増加的という条件である。この条件がクラス3の割合の下限を与え、ここの証明にはこれで十分である。

$a_0^{(0)}$ のみが非0である基本初期様相から始めて、任意の時刻 t において、 $a_{rt}^{(t)}$ が非0であるようにできる (k, r) -CAを最大単調増加的と呼ぶ。

なお補題1より様相は左右対称的である。また、時間と共に様相がどのように変化していくかは、図2(a)が最大単調増加的な場合の簡単な実例である。次の補題が成立つことが容易にわかる。

補題3 最大単調増加的 (k, r) -CAは、クラス3に属する。

最大単調増加的な場合を対象として、 k に関して (k, r) -CAがどのような漸近的性質をもつかを考えよう。次の補題が成立つ。証明での $1/k$ という関数形は複雑系で頻繁に現れるものである。

補題4 (k, r) -CAにおいて、最大単調増加的な状態

推移規則の割合は $(k-1)/k$ である。

(証明) $a_{r(t+1)}^{(t+1)}$ は $a_{rt}^{(t)}$ の値 $1, \dots, k-1$ のみで決まる。従ってコード C において, c_1, \dots, c_{k-1} だけに注目すればよい。その値の割当て方は k^{k-1} 通りある。また $c_0 = 0$ である。その他の c_l の値は任意である。

この部分のコードの状態推移を通常の方法で有向グラフ表現したとき, 状態 0 の頂点を含まないループが一つでもできることが, 最大単調増加的である必要十分条件となることに注意せよ。

最大単調増加的でない場合には, この有向グラフは状態 0 を根とする木になる。従って, グラフが木になる場合の数を k^{k-1} から引けば, 最大単調増加的な割合を求められる。

k 頂点の無向木の数は, Cayley¹⁴⁾ によって与えられていて, k^{k-2} である。そのそれぞれの木において, 状態 0 の頂点を根とする向きに各枝の向きを決めることによって, ここで考えている木とちょうど 1 対 1 に対応する。その割合は全体の $1/k$ である。よって, 最大単調増加的な場合の割合は $(k-1)/k$ である。(証明終)

定理 1 (k, r) -CA において, k が大きくなったとき, クラス 4 が出現する割合は漸的に 0 に近づく。

(証明) 補題 4 により, k が大きくなるとともに, 最大単調増加的な場合の割合が 1 に近づく。補題 3 により, これらはクラス 3 である。よってクラス 4 が出現する割合は漸的に 0 に近づく。(証明終)

5. 近傍サイズに関する漸近的性質

次に r が大きくなったとき, (k, r) -CA の漸近的性質を考えよう。その証明は Shannon の第 2 定理 (通信路符号化定理) にやや類似した方法で行うことができる。即ち CA のコードに典型的系列の考え方を適用するのである。

コード $C = (c_{(k-1)(2r+1)}, c_{(k-1)(2r+1)-1}, \dots, c_0)$ において, $l \neq 0$ である c_l が値 $j \in \{0, \dots, k-1\}$ をとる個数を w_j と書く。 $p=1/k$, $N=(k-1)(2r+1)$ と置き, また δ を任意に固定した正数とすると, すべての j について,

$$\left| \frac{w_j - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \right| < \delta \quad (3)$$

を満たすとき, コード C を典型的と呼ぶ。

ここでは C における c_0 以外の各 c_l には, すべての可能な値を割当てるので, この典型的系列の考え方を適用できる。情報理論でよく知られているように, 漸近的等分配律によれば, r が十分に大きくなって N が大きくなると, ほとんどすべてのコード C は典型的となる。

即ち r が十分に大きいとき, 典型的でないコードの割合は任意に小さくできて, 無視できるほど小さな割合にしかならない。また典型的系列は一樣乱数とみなすことができる。

定理 2 (k, r) -CA において, r が大きくなったとき, クラス 4 が出現する割合は漸的に 0 に近づく。

(証明) 時刻 0 における様相として, 十分長い区間のセルに $0, \dots, k-1$ という状態が一樣乱数として割当てられているとする。証明は基本初期様相から行えば十分であるし, その証明は同じであるが, 両端部以外の状況もわかりやすくするため長い区間とする。 k に関する漸近的性質の証明は既に済ませたので, r は k より十分大きいとしてよい。

時刻 0 において, $a_i^{(0)} \neq 0$ である最大の i を M とする。時刻 1 において, $M+1 \leq i \leq M+r$ である $a_i^{(1)}$ を考える。 $s_i = \sum_{j=i-r}^M a_j^{(0)}$ とするとき, その値は $f(s_i) = c_{s_i}$ である。

s_i は k 値一樣乱数の和とみなすことができる。また $s_i - s_{i+1}$ が $a_{i-r}^{(0)}$ であるので, これらの $a_i^{(1)}$ を決める過程は, コード C において, c_l を順次に, k 値乱数の値が示す間隔によって, 飛び飛びに右へ読んでいく過程に相当する。その間隔は確率 $1/k$ で 0 となるので, 時刻 1 のセルの値は一樣乱数ではないが, コード C が典型的であればそれによってランダム化され, 十分に大きな r では各状態はほぼ $1/k$ に近い確率で生起する。従って $M+1 \leq i \leq M+r$ である $a_i^{(1)}$ のすべてが 0 である割合はほぼ k^{-r} であるので, r が大きくなるとほとんど無視できる。

任意の時刻 t においては, $\log_k r$ 長のオーダで続く 0 が, 時刻 $t+1$ において再び 0 の列に写像される場合が問題である。そのとき 0 の連続列の長さは毎回 1 以上増加する。しかしこれが j 回の時刻にわたり繰返される確率は k^{-j} にすぎず, 速やかに非 0 の列に写像される。それ以後は C を飛んでいくランダム化の効果が効き, 各状態の生起確率は $1/k$ に近くなる。よって r が十分大きいとほとんど常に単調増加的であり, それ以外のコードの割合は任意に小さくなる。

では両端ではなく途中の位置のセルはどうだろうか。時刻 1 における途中の一般位置のセル $a_i^{(1)}$ を考える。その値は $S_i = \sum_{j=-r}^r a_{i+j}^{(0)}$ に依存して決まる。 S_i は平均値 $(k-1)(2r+1)/2$ であり, また右隣のセルの値 $a_{i+1}^{(1)}$ は, $a_i^{(1)}$ に比べて, $S_{i+1} - S_i = a_{i+r+1}^{(0)} - a_{i-r}^{(0)}$ によって C の上を飛び移ったものであり, その系列の性質は乱数とみなせない。

一般の時刻 t において, 途中のセルの値が乱数でなく

でも、非0でありさえすれば、 C での写像によるランダム化の効果が効く。ただ両端部よりも長い0の系列が出る可能性がある。しかしながら、ほとんどすべてのコード C は単調増加的であることを既に示した。もし途中のセルに長い白地が広がってきたとしても、ほとんどすべての場合に、そこはまた非0の値によって埋められていく。しかも非0部の長さ L は時間とともに長くなり、それらがすべて0となって停止する確率 k^{-L} は急速に減少する。よってクラス3に相当し、定理が成立つ。(証明終)

6. カオスの縁の考察

クラス4あるいはカオスの縁は、数理的に厳密に定義された概念ではない。しかしカオスの縁を真部分集合とする集合を対象としたので、その漸近的性質を求めることができた。Wolframの推測と異なり、 k あるいは r の増加とともにクラス4の出現割合が減少するとの証明となった。即ちカオスの縁はむしろ単純を好むという見方をすることもできよう。

左右対称でない規則の場合については、ここでの証明は片側ごとに行えるので、容易に拡張される。多次元への拡張も容易と思われる。全体性規則ではなく、式(1)の一般の状態推移規則を用いた場合については、コンピュータ実験を行った。傾向として式(1)を用いた方がカオスの縁が現れにくい。指定すべきパラメータが多くなるためと推測される。カオスの縁は単純を好む傾向が強いようである。

この証明は離散系に関するものだったが、 k および r が大きくなった極限は、アナログ的性質をもつ系であるといつてよいだろう。ただし不連続関数をすべて含んだ極限であるので、それを連続系と呼ぶのではなく、ここではアナログ系と呼んでおく。証明は、アナログ系にカオスの縁が存在しないという意味ではないことに注意すべきである。アナログ系では、カオスの縁は存在するが、測度0となると解釈すべきである。

ここで測度という言葉は通常定義に従うものである。離散系ではこの場合の全体集合 $K^{(k-1)(2r+1)}$ に対して、測度 $\mu(K^{(k-1)(2r+1)})=1$ としたいわゆる確率測度の考え方になる。 k と r が大きくなった極限のアナログ系では、実数体上から実数体上への写像の関数空間における測度となる。そして要するにその全空間において、カオスの縁の体積は結局0とみなせるということである。

連続関数を対象としたときには、本証明での議論を連続関数近似で置き直して適用することもできるが、更に研究をしてみるのがよいだろう。なおCML¹⁵⁾は空間を

格子点に離散化しているので、純粋な連続系ではなく、カオスの縁と類似した現象が見られる。またCastets他¹⁶⁾等の研究も興味深いと思われる。

カオスの縁は生命現象との関係が推測されることが多い。著者の創発仮説は生命と知能に関与する問題意識をもって提案している。ただ地球上の生命体には物質代謝が必須であり、また生命現象は非常に複雑であるため、この種の仮説が科学的真実と認められるにはまだ時日を要するであろう。しかし仮説の提案も科学の方法として重要であり、情報現象の観点で自然を分析する情報物理学の手法を、著者は今後有望ではと期待している。

カオスの縁が生命現象に付随する性質であるとの仮説の下では、ここで与えた証明は、生命現象の根源にはデジタル性が関与していることの理論的根拠となる可能性をもつ。即ち「生命はデジタルである」という仮説である。

またここでの証明からいえるのは、カオスの縁という一見有機的な形状は、CAの規則にその基本形が予め組込まれていることである。類推として表現すると、「生命はプログラムされている」ということである。ただしこれは浅い観察だという側面がある。理論として更に踏込むには、例えば脳の構造が遺伝子に予めプログラムされていても、いかにして多様な思考が行われるか等を説明すべきである。もしそれができるならば、カオスの縁という概念の重要性は更に高まるだろう。

また別の視点としては、カオスの縁が発散的でないとの観察から、生命に関して「成長を停止し、死に、絶滅する」という類推が浮び上がる。生命の顕著な特性は自己増殖性とされることが多いが、細胞死や個体死や種の滅亡等が、生命を説明するために重要な特性なのだろうか。東洋哲学はこの立場を堅持しているし、指摘されてみれば当然の特性だが、その役割は今後の研究課題である。

このような類比のうち、生命のデジタル性は、創発仮説における計算万能性の前提とみて意図的に証明した。しかし生命がプログラムされている点や停止性は、意図せずして浮んだものである。

カオスの縁は、生命現象との関係がまだ明らかでない指摘されることがある。しかし生命現象の特質と思われる性質を自然に抽出できるとしたら、カオスの縁が生命の比較的よいモデルだと傍証をここで強化しえたのではなかろうか。

付け加えると、生命の起源を数理的に研究しようとしても、物質の化学反応レベルでの組合せ爆発現象に直面しがちで¹³⁾、その可能性を確率論や情報学等で解明するのは容易でない。ただWolframによれば、(2,2)-CA

では 2^{-4} の割合でカオスの縁となる。かなり高い確率で起るカオスの縁という現象が、生命の起源に関与すると考えたり、情報に関する更に深い理解を得る手掛りになりうるかもしれない。

ただカオスの縁という概念はまだ原始的であつて、階層性という生命の特質はモデルに含まれていない。単細胞生物が多細胞生物へ進化し、その体内が種々の臓器に分化するといった特性を表現できる数理モデルへと拡張する必要がある。そして生命現象を情報の視点から解明し、唯物的物理学と並ぶほどの科学とするには、更に深い研究を要すると思われる。

7. あとがき

Wolframのセルラーオートマトンのモデルに基づき、いわゆるカオスの縁という概念に付随するデジタル性の証明を試みた。状態数と近傍サイズのいずれについても、それらが増加するとともに、カオスの縁の出現割合は漸近的に0に近づくことを証明した。

創発仮説では、計算万能性というデジタル概念を用いるので、この証明はその妥当性を高めたことになる。自然界の生命と知能に、カオスの縁という創発現象が関与することの妥当性は、更に研究を重ねなければならないが、カオスの縁に「成長を停止し、死に、絶滅する」という特性が潜んでいることは、哲学的にも興味深い。

なお創発仮説では、超指数法則という階層法則も重視する。生命の起源に関する確率問題、知能の問題、無秩序から秩序の生成等を今後も研究したい。

謝辞 懇切にご指導頂く上田暁亮京都大学教授、研究にご協力頂く嶋正利氏、お励まし頂く広中平祐氏に深甚の謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Wolfram, S.: Statistical mechanics of cellular automata, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 55, pp. 601-644 (1983).
- 2) Wolfram, S.: Universality and complexity in cellular automata, *Physica D*, Vol. 10, pp. 1-35 (1984).
- 3) Packard, N. H.: Adaptation toward the edge of chaos, *Complexity in Biological Modelling* (Kelso, S. and Shlesinger, M. (eds.)) (1988).
- 4) Kauffman, S. A.: *The Origins of Order*, Oxford University Press, New York (1993).
- 5) Langton, C. G.: Artificial life, *Artificial Life*

(Langton, C. G. (ed.)), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, pp. 1-47 (1989).

- 6) 稲垣耕作: 創発仮説とその考察 (1), 情処学研報, MPS-13-4 (1997).
- 7) 稲垣耕作: 創発仮説とその考察 (2), 情処学研報, MPS-15-7 (1997).
- 8) 稲垣耕作: 情報学と物理学: カオスの縁の計算万能性, 情処学人工生命とその応用シンポジウム, pp. 15-22 (1997).
- 9) Inagaki, K.: Elemental universality of sets of logic devices, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, Vol. E81-D, No. 8, pp. 767-772 (1998).
- 10) 稲垣耕作: 創発仮説とカオスの縁の計算万能性, 信学論 (A), Vol. J81-A, No. 9, pp. 1230-1237 (1998).
- 11) Inagaki, K.: Information physics based on the emergence hypothesis and a proof of computational universality of single-NOT networks, *ISPJ Trans. Mathematical Modeling and its Applications* (accepted).
- 12) Wolfram, S.: Twenty problems in the theory of cellular automata, *Physica Scripta*, Vol. T9, pp. 170-183 (1985).
- 13) 稲垣耕作: 創発仮説とその考察 (3)—カオスの縁のデジタル性について, 情処学研報, MPS-21-1 (1998).
- 14) Cayley, A.: A theorem on trees, *Quart. J. Math.*, Vol. 23, pp. 376-378 (1889).
- 15) Kaneko, K.: *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific, 1986.
- 16) Castets, V., Dulos, E., Boissonade, J., and De Kepper, P.: Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64, pp. 2953-2956 (1990).

(平成10年9月7日受付)

(平成10年10月15日再受付)

(平成10年11月5日採録)



稲垣 耕作 (正会員)

1977年京都大学大学院工学研究科電気工学第2専攻博士課程単位修得。同年、同大学情報工学科助手、現在同情報学研究科助教授。工学博士。基礎情報学、情報物理学、情報文明学を研究。1986年Pattern Recognition Society論文表彰。電子情報通信学会、情報文化学会各会員。