

GA による係数のグループ分けに基づく 誤差フィードバック回路の設計法

中本昌由[†] 雛元孝夫[†]

巡回形デジタルフィルタの量子化器に組み込まれる誤差フィードバック (FB) 回路は、丸め雑音低減化に対して有効である。本論文では、2次元誤差 FB 回路を低コストで実現するため、係数を特定の要素数のグループに分け、グループ内の係数の絶対値が同一となるような誤差 FB 回路の設計法が示されている。そして、係数がグループ分けされた条件下で回路の設計・評価を繰り返し、その中から遺伝的アルゴリズム (GA) によって最適な回路を探索している。数値実験では、グループの要素数 4 として回路設計を行っており、良好な結果が得られている。また、より低コストで誤差 FB 回路を設計するため、誤差 FB 係数を離散値で指定した場合についても検討している。本設計法を用いれば、回路のパラメータ数と係数のビット数を自由に選択でき、指定した条件下で優れた誤差 FB 回路が設計できる。

Design of Error Feedback Network Based on Groups Forming of Error Feedback Coefficients by Genetic Algorithm

MASAYOSHI NAKAMOTO[†] and TAKAO HINAMOTO[†]

Error feedback (FB) in recursive digital filters is very useful for roundoff noise reduction. In this paper, we form groups of error FB coefficients and design 2-D error FB network in which coefficients belonging in that group have the same absolute values. And using genetic algorithm (GA) we find the optimal network by repeating error FB network design and evaluation. Numerical example shows good design result when each group has 4 elements. Furthermore we also consider our proposed technique in the case of discrete error FB coefficients. By using this technique it is possible to choose parameter number and required bits of coefficients, and design good performance error FB network under these conditions.

1. ま え が き

固定小数点演算のデジタルフィルタをハードウェア上で実現する際には、フィルタの有限語長に起因した様々な特性劣化が生じる。積和演算の丸め (量子化) によって発生する誤差もその 1 つであり、この誤差信号はフィルタ内部を巡回してフィルタ出力で雑音となって現れる。この雑音の低減化技法として、フィルタの量子化器に誤差フィードバック (FB) 回路を組み込んで雑音分散を最小化する方法が提案されている^{1)~8)}。

ただし、もともとデジタルフィルタを固定小数点で実現する理由は、コストを低く抑えるためであるから、フィルタ実現のためのトータルのコストを考慮すれば、誤差 FB 回路に大きなコストをかけることはで

きない。したがって、低コストでの実現が誤差 FB 回路設計の重要な課題である。

本論文では、低コストで高性能な 2次元誤差 FB 回路の開発を目指して、誤差 FB 係数を特定の要素数のグループに分けて複数の係数グループを形成し、このグループ分けを制約として誤差 FB 回路を設計する。すなわち、同じグループ内の係数の絶対値が互いに同一となる制約を持つ誤差 FB 回路を開発する。提案する最適設計アルゴリズムは、「係数のグループ分けを探索する部分」と「グループ分けされた誤差 FB 係数を実際に設計する部分」に分かれている。前者を担当するのは遺伝的アルゴリズム⁹⁾ (GA) であり、これによって大域的に「グループの分け方」を探索する。後者に対しては、Lagrange 未定乗数法を GA の適応度計算過程に組み込むことにより、与えられた制約下 (グループ分け条件下) での最適誤差 FB 係数を設計する。また、GA の適応度計算過程に係数の丸め操作を組み込むことにより、係数のビット数を指定して設計

[†] 広島大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Hiroshima University

することも可能である．対象とするデジタルフィルタに合わせて誤差 FB 回路の次数や係数の語長（ビット数）を適切に選択すれば，効率的に固定小数点の巡回形デジタルフィルタが実現できる．

本研究の内容は以下のとおりである．次の 2 章でこれまでの関連研究を説明する．以下，3～6 章が提案手法であり，3 章で問題の定式化を行い，4 章でグループ分けされた係数を持つ誤差 FB 回路の設計アルゴリズムを示す．さらに，5 章で，GA を適用するための遺伝子コーディング・アルゴリズムと交叉・突然変異等の GA オペレータを示す．ただし，3～5 章では，係数の総数がグループの要素数の倍数としているが，6 章では，こうならない場合について補足説明を行う．そして，7 章で実験結果を示し，8 章で提案手法の設計効率について議論する．最後の 9 章がむすびである．

なお，本論文は第 14 回 回路とシステム（軽井沢）ワークショップ¹⁰⁾で発表した内容を発展・充実させたものである．

2. 関連研究

2.1 定形の制約を持つ誤差 FB 回路

文献 4)，7) では対称・奇対称といった制約を用いて誤差 FB 回路を設計している．この制約条件によって誤差 FB に必要な乗算回数を無制約の場合の約半分減じることができる．ただし，2 次元システムにおける誤差 FB 回路では，係数のパラメータ数が非常に多くなることから，より少ないパラメータ数の 4 分対称・奇対称係数の誤差 FB 回路も開発されている．これによって，パラメータ数を無制約の約 4 分の 1 に減じることができる．こういった制約を持つ誤差 FB 回路は，無制約係数の回路よりも性能では劣るものの，低コストで実現できる利点がある．

2.2 係数のペアリングに基づく設計法

文献 11) では，GA を用いて係数の制約（ペアリング）を最適化することによって誤差 FB 回路を設計する方法が示されている．この設計法により，対称・奇対称と同じ（無制約の約半分の）パラメータ数で，より高性能な誤差 FB 回路が設計できることが確認されている．ただし，ある特定の次数で誤差 FB 回路を実現する場合，係数のパラメータ数をあらかじめ指定して設計することはできない．

一方，本設計法では，係数グループの要素数をあらかじめ決めておくことによって，回路実現のためのパラメータ数を自由に指定することができる．たとえば，グループの要素数を 4 として設計を行えば，パラメー

タ数を無制約の約 4 分の 1 に減じることができる．すなわち，文献 11) よりも少ないパラメータ数（低コスト）で設計することが可能となる．

2.3 GA によるフィルタ設計法

デジタル信号処理分野における GA の応用研究は，文献 11) だけではなく，デジタルフィルタ設計問題へのいくつかの応用例がある^{12)~14)}．たとえば，文献 12) では，ビット列で表された係数値を GA によって最適化し，分母分離形 2 次元デジタルフィルタの設計を行っている．また，これを誤差 FB 係数および誤差フィードフォワード係数の離散最適化に応用し，いったん連続値で設計された係数を GA によって適切な近傍の離散値に丸める手法も提案されている⁸⁾．本論文はこれらの研究とは異なり，GA で係数値を設計するものではない．

3. 問題の定式化

3.1 フィルタ出力における雑音分散

2 次元巡回形デジタルフィルタの誤差 FB 構成について簡単に説明する．ここでは，文献 7) より得られた結果のみを用いているので，詳細は，文献 7) を参照されたい．

まず， (M_1, M_2) 次の 2 次元誤差 FB 回路の伝達関数を

$$B(z_1, z_2) = \sum_{r=0}^{M_1} \sum_{s=0}^{M_2} \beta_{rs} z_1^{-r} z_2^{-s} \quad (1)$$

とする．ただし

$$\beta_{00} = 1. \quad (2)$$

また，誤差信号の自己相関係数 q_{rs} を要素を持つ行列を

$$R_i = \begin{bmatrix} q_{0i} & q_{-1,i} & \cdots & q_{-M_1,i} \\ q_{1i} & q_{0i} & \cdots & q_{-M_1+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M_1,i} & q_{M_1-1,i} & \cdots & q_{0i} \end{bmatrix} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M_2) \quad (3)$$

とし，自己相関行列 R を

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{-M_2} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{-M_2+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M_2} & R_{M_2-1} & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

とおく．ここで， R は正定対称行列であることが知られている．

なお、誤差信号の自己相関係数は、対称性 $q_{rs} = q_{-r,-s}$ および $q_{-r,s} = q_{r,-s}$ が成立し、これらは、デジタルフィルタの構造によって決まる。

さらに、誤差 FB 係数 β_{rs} を要素に持つベクトルを

$$\mathbf{w}_i = (\beta_{0i}, \beta_{1i}, \dots, \beta_{M_1 i})^T \quad (i = 0, 1, \dots, M_2) \quad (5)$$

として、誤差 FB 係数ベクトル \mathbf{w} を

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0^T, \mathbf{w}_1^T, \dots, \mathbf{w}_{M_2}^T)^T \quad (6)$$

とおく。ただし、式 (2) より \mathbf{w} の第 1 要素は 1 とする。

このとき、フィルタ出力における正規化雑音分散（以後、単に雑音分散と呼ぶ） V は、 \mathbf{w} に関する 2 次形式で表される。

$$V = \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (7)$$

誤差 FB 回路の設計とは、 V を最小にするような誤差 FB 係数 β_{rs} ($r = 0, 1, \dots, M_1; s = 0, 1, \dots, M_2$) を決定することである。

実際にフィルタ量子化器で $2B$ ビットの積和演算結果を B ビットに丸めた場合、この量子化操作に起因して生じる雑音の分散は、 V に $2^{-2B}/12$ を乗ずれば求まる。したがって、フィルタのビット数を長くすれば雑音は小さくなる。

3.2 係数のグループ分け

誤差 FB 回路の設計において、文献 7) では実現コストの削減のため、対称

$$\beta_{rs} = \beta_{M_1-r, M_2-s} \quad (8)$$

または、奇対称

$$\beta_{rs} = -\beta_{M_1-r, M_2-s} \quad (9)$$

の条件下での設計法が開発されている。これらの設計法を用いると、無制約の場合と比較してパラメータ数を約半分に減らすことができる。

さらに、4 分対称

$$\beta_{rs} = \beta_{r, M_2-s} = \beta_{M_1-r, s} \quad (10)$$

または 4 分奇対称

$$\beta_{rs} = -\beta_{r, M_2-s} = -\beta_{M_1-r, s} \quad (11)$$

の設計法を用いると、無制約の場合と比較してパラメータ数を約 4 分の 1 に減らすことができる。たとえば $(M_1, M_2) = (3, 3)$ とすると、4 分対称条件では

$$\begin{cases} \beta_{00} = \beta_{30} = \beta_{03} = \beta_{33} \\ \beta_{10} = \beta_{20} = \beta_{13} = \beta_{23} \\ \beta_{01} = \beta_{31} = \beta_{02} = \beta_{32} \\ \beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{12} = \beta_{22} \end{cases}$$

なる制約となり、

$$\{\beta_{00}, \beta_{30}, \beta_{03}, \beta_{33}\}, \{\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{13}, \beta_{23}\}, \{\beta_{01}, \beta_{31}, \beta_{02}, \beta_{32}\}, \{\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{12}, \beta_{22}\}$$

とグループ分けされたと考えることができる。

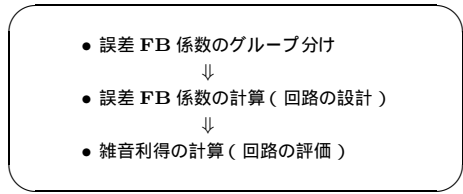


図 1 係数のグループ分けに基づく誤差 FB 回路の設計手順
Fig. 1 The process of error FB network design based on groups forming of error FB coefficients.

本論文では、このような定形の係数の制約（グループ分け）ではなく、実現可能な全グループ分けから最適な（最も雑音分散を小さくする）ものを探索する。いいかえると、あるグループ分けに対して、その条件下で誤差 FB 回路を設計し、雑音分散を指標としてその回路の評価を行う。これを 1 回の試行として回路の設計と評価を繰り返し、評価値が高い回路を探索アルゴリズムによって見つける（図 1 参照）。この問題は、次のような「係数のグループ分け問題」として定式化できる。

[係数のグループ分け問題]

N 個の係数から L 個を 1 グループとして K 個のグループを作り、グループの分け方に対して評価値が与えられる組合せ最適化問題。

本論文では、最初に N を L の倍数（すなわち、 $K = N/L$ ）として以下の議論を進める。 N が L の倍数でない場合については、6 章で補足する。なお、 $L = 1$ は無制約の場合に相当するから、 $L \geq 2$ とする。したがって、

$$N \geq L \geq 2 \quad (12)$$

および

$$K = \frac{N}{L} \geq 1 \quad (13)$$

とする。

以下では N 個の係数を x_1, x_2, \dots, x_N と記述する。まず、8 個の係数

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$$

において、1 つのグループが x_1, x_3, x_4, x_6 であり、もう 1 つのグループが x_2, x_5, x_7, x_8 である場合を考える。すなわち、要素数 4 のグループを 2 つ作る（ $N = 8, L = 4, K = 2$ ）。このとき、各グループは左から添え字の小さい順に

$$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}, \{x_2, x_5, x_7, x_8\} \quad (14)$$

と書く。これは、

$$\{x_2, x_5, x_7, x_8\}, \{x_1, x_3, x_4, x_6\} \quad (15)$$

と書いても同じ意味であるが、本論文では各グループの係数における最小の添え字を比較し、添え字が小さ

いものから順に左から書く。この例では、各グループの最小の添え字の係数は、 x_1 と x_2 であり、添え字は x_1 の方が小さいので、(14) のように x_1 が所属しているグループを先に (左に) 書く。

また、 x_3 が x_1 に対して異符号の場合 ($x_1 = -x_3 = x_4 = x_6$) は、その係数の右肩に「 $'$ 」をつけて $\{x_1, x'_3, x_4, x_6\}$ のように記述する。その他の要素が異符号の場合も同様である。ただし、この記述は x_1 に対する相対的なものであるから $x_1 = -x_3$ と $-x_1 = x_3$ は同じ意味である。このような記述を、後述する遺伝子形と区別するため、表現形と呼ぶことにする。以下、各アルゴリズムは、表現形を左から右へと読み込むものとする。

また、 x_1, x_3, x_4, x_6 が同一グループに属する場合、異符号・同符号の要素の組合せは

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_1, x_3, x_4, x_6\} : x_1 = x_3 = x_4 = x_6 \\ \{x_1, x'_3, x_4, x_6\} : x_1 = -x_3 = x_4 = x_6 \\ \{x_1, x_3, x'_4, x_6\} : x_1 = x_3 = -x_4 = x_6 \\ \{x_1, x_3, x_4, x'_6\} : x_1 = x_3 = x_4 = -x_6 \\ \{x_1, x'_3, x'_4, x_6\} : x_1 = -x_3 = -x_4 = x_6 \\ \{x_1, x'_3, x_4, x'_6\} : x_1 = -x_3 = x_4 = -x_6 \\ \{x_1, x_3, x'_4, x'_6\} : x_1 = x_3 = -x_4 = -x_6 \\ \{x_1, x'_3, x'_4, x'_6\} : x_1 = -x_3 = -x_4 = -x_6 \end{array} \right.$$

の 8 種類存在するから、これがグループの要素数が 4 のときの 1 グループあたりの異符号・同符号のすべての組合せとなる。一般的にグループの要素数が L の場合、1 グループあたりの異符号・同符号の要素の組合せは 2^{L-1} 種類存在する。

したがって、 N 個の係数から L 個の係数を 1 グループとして、同符号・異符号を考慮して K グループをつくる場合、その組合せ総数は

$$\Phi(N) = \frac{2^{(L-1)K} \binom{N}{L} \binom{N-L}{L} \cdots \binom{L}{L}}{K!} \quad (16)$$

である。ただし、

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \quad (17)$$

$$k! = k \cdot (k-1) \cdots 1. \quad (18)$$

4. 誤差 FB 回路の設計

ここでは、係数がグループ分けされた条件下での誤差 FB 回路の設計法について述べる。

4.1 制約条件下における最適誤差 FB 係数

[補題]

誤差 FB 係数が N 個の場合を考えると w のサイズは $N \times 1$ 、 R のサイズは $N \times N$ である。また、 C を $N \times ((L-1)K+1)$ 行列、 p は $((L-1)K+1) \times 1$ ベクトルとする。このとき、Lagrange の未定乗数法によると、式 (7) を制約条件

$$w^T C = p^T \quad (19)$$

のもとで最小化するベクトル w^* は

$$w^* = R^{-1} C (C^T R^{-1} C)^{-1} p \quad (20)$$

を満たす。

なお、ここでは C を制約行列と呼び、 $p = (1, 0, \dots, 0)^T$ とする。与えられた係数のグループ分け情報に基づいて C を生成すれば、式 (20) から誤差 FB 係数が設計される。

4.2 制約行列の生成手順

次に、制約行列 C の生成アルゴリズムを以下に示す。サイズ $N \times ((L-1)K+1)$ の制約行列 C の (i, j) 要素を c_{ij} とおく。ただし、初期状態では $C = 0$ とする。前処理として $j = 1$ として $x_1 = 1$ を満たすために、 $c_{11} = 1$ とおく。初期値として $j = 2$ として以下のアルゴリズムを実行する。

STEP 1: N 個の係数の中からまだ選択されていない最も若い番号の係数 x_i を選択し、 $c_{ij} = c_{i,j+1} = \dots = c_{i,j+L-2} = 1$ とおく。

STEP 2: N 個の係数の中から x_i と同一グループに所属する、まだ選択されていない係数 $x_{i'}$ を選択し、 x_i と同符号ならば $c_{i'j} = -1$ とおき、異符号ならば $c_{i'j} = 1$ とおく。

STEP 3: x_i と同じグループに所属する係数がすべて選択されていれば、STEP 4 へ。そうでなければ、 $j \leftarrow j+1$ として STEP 2 へ。

STEP 4: すべての係数がグループ分けされていれば、終了する。そうでなければ、 $j \leftarrow j+1$ として、STEP 1 へ。

[例題]

8 個の係数

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$$

から

$$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}, \{x_2, x'_5, x'_7, x_8\}$$

なるグループ分け (ただし、 $x_1 = 1$) を表す制約行列 C を生成する ($N = 8, L = 4, K = 2$)。

この行列のサイズは、 8×7 であるから

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} & c_{85} & c_{86} & c_{87} \end{bmatrix}$$

とおく。ただし、初期状態は $C = 0$ である。

- (1) $c_{11} = 1$ とおく (第1列要素の生成)。
 - (2) x_1 を選択し, $c_{12} = c_{13} = c_{14} = 1$ とする。
 - (3) x_1 と同じグループに所属している x_3 を選択し, 同符号であるから, $c_{32} = -1$ とおく。
 - (4) x_1 と同じグループに所属している x_4 を選択し, 同符号であるから, $c_{43} = -1$ とおく。
 - (5) x_1 と同じグループに所属している x_6 を選択し, 同符号であるから, $c_{64} = -1$ とおく。
 - (6) x_1 と同じグループ所属する係数はすべて選択されたので, 次のグループに移る。 x_2 を選択し, $c_{25} = c_{26} = c_{27} = 1$ とする。
 - (7) x_2 と同じグループに所属している x_5 を選択し, 異符号であるから, $c_{55} = 1$ とおく。
 - (8) x_2 と同じグループに所属している x_7 を選択し, 異符号であるから, $c_{76} = 1$ とおく。
 - (9) x_2 と同じグループに所属している x_8 を選択し, 同符号であるから, $c_{87} = -1$ とおく。
 - (10) すべての係数が選択されたので, 終了する。
- 以上により, 制約行列 C が以下のように生成された。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. GA の適用

GA は, 生物の進化モデルを模倣した最適値の確率探索アルゴリズムであり, 様々な最適化問題に対して応用されている。

GA は, 大域的探索に優れ, 勾配情報も必要としないことから様々な問題に容易に適用できるという特長を持つ。GA を対象とする問題に適用するにあたって

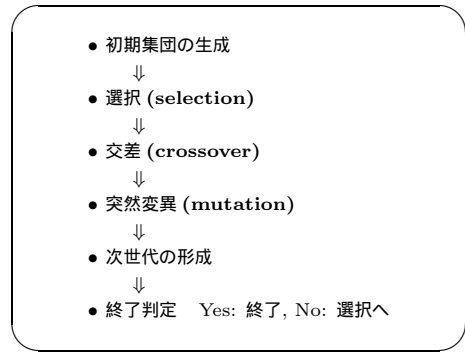


図2 単純 GA の処理手順

Fig. 2 The process of simple genetic algorithm.

は, 探索点を遺伝子形と呼ばれる文字列 (あるいはビット列) にコーディングする必要がある。また, 遺伝子形で表された探索点を個体と呼び, 各個体には適応度と呼ばれる評価値が与えられる。個体の集合を個体群と呼ぶ。さらに, それぞれの個体に対して, 選択, 交差, 突然変異といった操作を繰り返すことによって世代交代を進め, 個体群を進化させる。そして, あらかじめ設定した終了条件を満たした場合に収束したと判定し, これらの処理を終了させる。

今回用いる GA は, 図2に示されるように, 選択, 交叉, 突然変異オペレーションからなる単純 GA である。

5.1 遺伝子形へのコーディング方法

遺伝子形的设计は, GA の探索効率に大きく影響する。したがって, 実現不可能な遺伝子 (致死遺伝子) を発生させることなく, 効率的に遺伝子形を設計する必要がある。

以下に係数のグループ分け情報を遺伝子形へ変換する手順を示す。

STEP 1: N 個の係数 x_1, x_2, \dots, x_N に対して, 係数の右肩に左から小さい順に相対番号をつける。すなわち, 次のようにする。

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(N)} \quad (21)$$

STEP 2: 相対番号「1」の係数をとり除き, 残った係数に対して再番号付けを行う。

STEP 3: STEP 2 で選ばれた係数と同じグループに所属する, まだ選択されていない最も若い相対番号の係数 (相対番号 k) を選択し, 同符号ならば遺伝子「 k 」, 異符号ならば遺伝子「 $-k$ 」とする。

STEP 4: STEP 3 を $L-1$ 回 (すなわち, 1つのグループが形成されるまで) 繰り返す。

STEP 5: すべての係数がグループ分けされてい

るならば、STEP 6 へ。そうでなければ、選択された $L-1$ 個の係数を取り除き、残った係数に対して再番号付けを行ってから STEP 2 へ。

STEP 6: 得られた遺伝子を得られた順に左から並べて「遺伝子形」を生成する。

5.2 実現可能な遺伝子形

5.1 節で得られた遺伝子形において、各遺伝子は次のような値をとる。遺伝子形は、右から 1 番目から $L-1$ 番目の遺伝子、 L 番目から $2(L-1)$ 番目の遺伝子、 \dots $(K-1)(L-1)+1$ 番目から $K(L-1)$ 番目の遺伝子によってそれぞれ 1 つの集合を形成しており、これらをそれぞれ S_1, S_2, \dots, S_K とする。したがって、設計される遺伝子形 G は

$$G = \{S_K, S_{K-1}, \dots, S_1\} \quad (22)$$

となる。

ここで、集合 S_k , $k = 1, 2, \dots, K$ に属する遺伝子 $g_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, L-1$ を

$$S_k = \{g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, \dots, g_{L-1}^{(k)}\} \quad (23)$$

とするとき、

$$1 \leq |g_1^{(k)}| < |g_2^{(k)}| < \dots < |g_{L-1}^{(k)}| \leq (Lk-1) \quad (24)$$

を満たす。よって S_1 に属する遺伝子は $g_1^{(1)} = \pm 1$, $g_2^{(1)} = \pm 2$, \dots , $g_{L-1}^{(1)} = \pm(L-1)$ となる。

ここで、遺伝子形のパターン数とグループ分けの組合せ数(探索点数)が一致し、かつそれぞれが 1 対 1 に対応することを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) グループ数が 1 ($N=L$) のとき、グループ分けの総数は

$$\Phi(L) = 2^{L-1}$$

である。

L 個の係数の場合は同符号・異符号の組合せのみであり、3.2 節の議論から、 x_1 の右肩には「'」は付かない。よって $L-1$ 個の係数の右肩に「'」が付くか否かが遺伝子のパターンであるから、設計される遺伝子形のパターン総数は、 2^{L-1} である。したがってグループ数 $K=1$ のときは成り立つ。

(ii) グループ数が $K (\geq 1)$ (N 個の係数: 遺伝子の長さ $(L-1)K$) のとき、成立したと仮定して、グループが 1 つ増えた ($N+L$ 個の係数の) とき

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{N+L}^{(N+L)}$$

を考える。このとき、遺伝子形への変換手順に従って $x_1^{(1)}$ を取り除き $N+L-1$ 個の係数

$$x_2^{(1)}, x_3^{(2)}, \dots, x_{N+L}^{(N+L-1)}$$

から x_1 と同一グループに属する係数を決める。この決め方は 1 から $N+L-1$ までの $N+L-1$ 個の整数から $L-1$ 個の整数を選択し、小さい順に並べたときの並べ方に一致する。このとき、異符号・同符号を考慮して右肩の整数を並べたものが S_{K+1} に属する遺伝子形となり、その組合せ総数を $\Psi(S_{K+1})$ とすると

$$\Psi(S_{K+1}) = 2^{L-1} \binom{N+L-1}{L-1} \quad (25)$$

となる。これを

$$\Psi(S_{K+1}) = 2^{L-1} \binom{N+L}{L} \frac{L}{N+L} \quad (26)$$

と変形し、さらに $K=N/L$ に注意すると、以下のように表される。

$$\Psi(S_{K+1}) = 2^{L-1} \frac{\binom{N+L}{L}}{K+1} \quad (27)$$

さて、グループ数が $K+1$ のときの遺伝子形は

$$G = \{\overbrace{S_{K+1}}^{(*)}, \overbrace{S_K, \dots, S_1}^{(**)}\} \quad (28)$$

であり、それぞれ $(*)$, $(**)$ の部分のパターン数が $\Psi(S_{K+1})$ と $\Phi(N)$ に一致する。したがって、 $\Psi(S_{K+1})$ に $\Phi(N)$ を乗ずれば、係数が $N+L$ 個の場合の遺伝子形のパターン数となり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \Psi(S_{K+1}) \times \Phi(N) \\ &= 2^{L-1} \frac{\binom{N+L}{L}}{K+1} \times 2^{(L-1)K} \\ & \quad \frac{\binom{N}{L} \cdot \binom{N-L}{L} \dots \binom{L}{L}}{K!} \\ &= 2^{(L-1)(K+1)} \\ & \quad \frac{\binom{N+L}{L} \cdot \binom{N}{L} \dots \binom{L}{L}}{(K+1)!} \\ &= \Phi(N+L) \end{aligned} \quad (29)$$

よって、遺伝子形の全パターン数と探索点数が一致す

ることが確かめられる。\$S_{K+1}\$ が決まれば、残り \$N\$ 個の係数から要素数 \$L\$ のグループを \$K\$ 個作って長さ \$(L-1)K\$ の遺伝子形を設計し、\$S_{K+1}\$ と合わせて長さ \$(L-1)(K+1)\$ の遺伝子形が設計される。仮定より、グループ数が \$K\$ (係数の数が \$N\$) の場合の探索点(グループ分け)は、遺伝子形と 1 対 1 に対応しているから、\$N+L\$ 個の場合も探索点と遺伝子形は 1 対 1 に対応する (証明終)

[例題]

8 個の係数

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$$

から

$$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}, \{x_2, x_5, x_7, x_8\}$$

なるグループ分け (ただし、\$x_1 = 1\$) を遺伝子形にコーディングする (\$N = 8, L = 4, K = 2\$)。

(1) 最初に、次のように相対番号を付ける。

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, x_4^{(4)}, x_5^{(5)}, x_6^{(6)}, x_7^{(7)}, x_8^{(8)}$$

(2) 相対番号「1」の \$x_1\$ を取り除き、残った係数に再番号付けを行う。

$$x_2^{(1)}, x_3^{(2)}, x_4^{(3)}, x_5^{(4)}, x_6^{(5)}, x_7^{(6)}, x_8^{(7)}$$

(3) \$x_1\$ と同じグループは、\$x_3, x_4, x_6\$ なので、それぞれの相対番号「2」, 「3」, 「5」を選択し、\$S_2 = \{2, 3, 5\}\$ となる。残りの係数に再番号付けを行う。

$$x_2^{(1)}, x_5^{(2)}, x_7^{(3)}, x_8^{(4)}$$

(4) 相対番号「1」の \$x_2\$ を取り除き、残った係数に再番号付けを行う。

$$x_5^{(1)}, x_7^{(2)}, x_8^{(3)}$$

(5) \$x_2\$ と同じグループは、\$x_5, x_7, x_8\$ なので、それぞれの相対番号「1」, 「2」, 「3」を選択する。ただし、\$x_5, x_7\$ は \$x_2\$ に対して異符号なので、マイナスをつける。よって \$S_1 = \{-1, -2, 3\}\$ を得る。

(6) すべての係数が選択されたので、終了する。

以上の手順により、遺伝子形

$$G = \{S_2, S_1\} \\ = \{2, 3, 5, -1, -2, 3\} \quad (30)$$

にコーディングされた。

5.3 適応度の計算

グループ分けされた誤差 FB 係数を設計し、その雑音分散から適応度を計算する手順を示す。ここでは、実際に誤差 FB 係数の設計を行っており、Lagrange の未定乗数法に基づいて、ある与えられたグループ分け条件下での誤差 FB 係数の最適性が保証されている。

また、離散係数の場合は、適応度計算過程で得られた連続係数を特定のビット数で丸めることによって設計する。

次の STEP 1~6 により、係数のグループ分け情報 (個体に相当する) に適応度が与えられる。

STEP 1: GA ルーチンから係数のグループ分け情報を受け取る。

STEP 2: 4.2 節の手順に従って、受け取ったグループ分け情報に基づいて制約行列 \$C\$ を生成する。

STEP 3: 制約行列 \$C\$ に基づいて与えられた制約条件下での最適誤差 FB 係数を式 (20) より設計する。係数の語長が \$b\$ ビットで指定されている場合、設計された係数をすべて \$b\$ ビットで丸める。

STEP 4: 設計された誤差 FB 係数を式 (7) に代入して、雑音分散 \$V\$ を計算する。

STEP 5: 雑音分散 \$V\$ を用いて、適応度

$$F = -V + V_{max} \quad (31)$$

を計算する。ただし、\$V_{max}\$ は雑音分散の最大値である。

STEP 6: GA ルーチンへ適応度 \$F\$ を返す。

以上の操作を必要な個体数だけ繰り返す。なお、式 (31) で適応度を計算する理由は、「雑音分散の最小化問題」を「適応度の最大化問題」へと変換するためである。

5.4 GA のオペレータ

致死遺伝子の発生を抑えるため、交叉と突然変異にはいくつかの制約が必要となる。

初期集団の生成: 個体数を \$N_P\$ として、初期集団をランダムに発生させる。

選択: 個体 \$I_k\$ (\$k = 1, 2, \dots, N_P\$) の選択確率 \$P_s(I_k)\$ は

$$P_s(I_k) = \frac{F(I_k)}{N_P \sum_{l=1}^{N_P} F(I_l)} \quad (32)$$

と計算する。ただし、\$F(I_k)\$ は \$I_k\$ の適応度である。このような選択方法をルーレット選択という。

交叉: 2 つの個体において、右から \$c_k\$ 番目の遺伝子から一番右に位置する遺伝子を確率 \$P_{cross}\$ で交換する。ただし、\$c_k = k(L-1)\$, \$k = 1, 2, \dots, (K-1)\$ であり、\$c_k\$ を交叉ポイントと呼ぶ。\$k\$ の値は、等確率で決定される。なお、\$P_{cross}\$ を交叉率と呼ぶ。これは、それぞれの遺伝子を遺伝子集合 \$S_k\$, \$k = (K-1), \dots, 2, 1\$ から \$S_1\$ までを入れ換えることに相当する。ここで、2 つの個体 \$I_i, I_j\$ の遺伝子形 (親) を \$G^{(i)}, G^{(j)}\$ として、以下のように表す。

$$G^{(i)} = \{S_K^{(i)}, \dots, S_{k+1}^{(i)}, S_k^{(i)}, \dots, S_2^{(i)}, S_1^{(i)}\}$$

$$G^{(j)} = \{S_K^{(j)}, \dots, S_{k+1}^{(j)}, S_k^{(j)}, \dots, S_2^{(j)}, S_1^{(j)}\}$$

上記の下線部が交叉される遺伝子であり、交叉を実行すると新しい遺伝子形(子) $G^{(i')}$, $G^{(j')}$ が以下のように得られる。

$$G^{(i')} = \{S_K^{(i)}, \dots, S_{k+1}^{(i)}, S_k^{(j)}, \dots, S_2^{(j)}, S_1^{(j)}\}$$

$$G^{(j')} = \{S_K^{(j)}, \dots, S_{k+1}^{(j)}, S_k^{(i)}, \dots, S_2^{(i)}, S_1^{(i)}\}$$

突然変異：個体の遺伝子を確率 P_{mut} で他の実現可能な遺伝子(5.2節の式(24)を参照)へ変異させる。ここで、変異される遺伝子は、等確率で決定される。なお、 P_{mut} を突然変異率と呼ぶ。

例として、以下の遺伝子形を考える。

$$G = \{S_2, S_1\}$$

ただし、

$$S_1 = \{-1, -2, 3\}, S_2 = \{2, 3, 5\}$$

ここで、 S_2 に属する左端の遺伝子「2」について考える。この遺伝子が突然変異できる値 m は2を除く $1 \leq |m| < 3$ を満たす整数である。よって $\{m|\pm 1, -2\}$ となる。

次に、 S_2 に属する左から2番目の遺伝子「3」について考える。このとき、 m は3を除く $2 < |m| < 5$ を満たす整数である。よって $\{m|-3, \pm 4\}$ となる。

最後に、 S_2 に属する左から3番目の遺伝子「5」について考える。このとき、 m は5を除く $3 < |m| \leq 7$ を満たす整数である。よって $\{m|\pm 4, -5, \pm 6, \pm 7\}$ となる。

終了判定：本論文では、(a) 50世代解の向上がない場合、(b) 200世代まで到達した場合を終了条件(以後、終了条件(a)、(b)と呼ぶ)とし、これら2つのケースで実験を行った。なお、すべての個体が一致した場合は無条件に終了とする。

6. N が L の倍数でない場合

N が L の倍数でない場合、以下のように表すことができる。

$$N = (K-1)L + d \quad (33)$$

ただし、 $1 \leq d < L$ とする。すなわち、要素数 d のグループが1つと要素数 L のグループが $(K-1)$ 個で合計 K 個のグループができる。ただし、 x_1 が必ず要素数 d のグループに所属するように遺伝子形と制約行列を設計する。このようにすれば、残りの要素 $N-d$ はグループ数 L の倍数であるから、前章までの議論から遺伝子形・制約行列ともに設計される。

6.1 制約行列の生成

4.2節の制約行列の生成アルゴリズムは、以下のよう実行する。 $d > 1$ の場合では最初のグループだけグループの要素数を d としてアルゴリズムを実行し、その次から残り $N-d$ 個の係数に対して、グループ数を L としてアルゴリズムを実行する。 $d=1$ のときは、 x_1 を除く $N-1$ の係数に対してアルゴリズムを実行すればよい。

6.2 遺伝子形の設計

5.1節の遺伝子設計アルゴリズムは、以下のように実行する。 $d > 1$ の場合、遺伝子形は $d-1$ 個の遺伝子が集まってできた集合

$$S_K = \{g_1^{(K)}, g_2^{(K)}, \dots, g_{d-1}^{(K)}\} \quad (34)$$

をまず設計し、残りの係数 $N-d$ から要素数 L のグループ分けによって $S_{K-1} \sim S_1$ に属する遺伝子形を設計する。

$d=1$ については、 x_1 を取り除き、残りの $N-1$ 個の係数に対してグループ分けを行えばよい。

7. 実験

7.1 設計例

誤差信号の自己相関係数の値が表1のように与えられる2次元巡回形デジタルフィルタ⁶⁾を考える。

ここでは、誤差FB回路の次数を $(M_1, M_2) = (3, 3)$ として設計を行った。無制約の場合と4分対称(4分奇対称)のグループ分けの雑音分散 V が表2に示されている。回路に4分対称や4分奇対称の制約がある

表1 自己相関係数の値

Table 1 The value of autocorrelation coefficients.

(a) q_{rs} and $q_{-r,-s}$.

	$s=0$	$s=1$	$s=2$	$s=3$
$r=0$	100.1580	94.4936	80.1316	60.7896
$r=1$	94.9081	89.6575	76.1359	57.6909
$r=2$	80.9028	76.4129	64.9520	49.1618
$r=3$	61.7975	58.3034	49.6501	37.6083

(b) $q_{-r,s}$ and $q_{r,-s}$.

	$s=0$	$s=1$	$s=2$	$s=3$
$r=0$	100.1580	94.4936	80.1316	60.7896
$r=1$	94.9081	89.4680	75.8372	57.6412
$r=2$	80.9028	76.2693	64.6599	49.2631
$r=3$	61.7975	58.2742	49.4352	37.8021

表2 従来法による設計結果

Table 2 Design results using previous method.

	無制約	4分対称	4分奇対称
V	0.2457	1.2766	0.9881

場合、パラメータ数は3である。無制約の場合、最も雑音が小さくなっているが、パラメータ数は15である(係数値 ± 1 はパラメータ数としてカウントしていない)。

ここでは、定形の制約条件である4分対称・奇対称係数とパラメータ条件(回路の次数)を同じにして設計するため、グループの要素数を4として実験を行う。次数が $(M_1, M_2) = (3, 3)$ の場合、 $N = 16$ であるからグループ分け総数は、式(16)より

$$\Phi(16) = 10762752000 \simeq 10^{10}$$

である。

7.2 設計結果(連続係数の場合)

実験環境は、CPUはIntel Celeron 400MHz、主メモリは64MBである。実験は異なる初期集団で20回の試行を行った。最初に、文献11)と同じ終了条件(終了条件(a))に基づいて50世代解の向上がみられなくなるまで処理を実行した。また、GAのパラメータは、一般的に個体数 $N_P = 50 \sim 150$ 、交叉率 $P_{cross} = 0.6 \sim 0.95$ とするケースが多いようであり¹⁵⁾、また、突然変異率は遺伝子長(ここでは12)の逆数($1/12 = 0.0833 \dots$)が良いとの経験則があることから、この近傍値として $P_{mut} = 0.1$ を選ぶ。以上の理由より、本実験では、交叉率 $P_{cross} = 0.8$ とし、個体数が $N_P = 50, 100, 200$ について、突然変異がある場合 ($P_{mut} = 0.1$) とない場合 ($P_{mut} = 0$) とで比較実験を行った。表3、表4に得られた解の最良値と平均値、および処理を終了するまでの平均世代交代数と平均計算時間が示されている。ただし、表3では、ほとんどの場合ですべての個体が一致することによって処理を終了している。また、表中の太字体は、

表3 終了条件(a)に基づく設計結果 ($P_{mut} = 0$)

Table 3 Design results using proposed method for GA termination condition (a) ($P_{mut} = 0$).

N_P	平均値	最良値	平均世代交代数	平均計算時間
50	2.9289	1.4668	43.0	11 [s]
100	2.3427	1.1493	58.6	30 [s]
200	1.6947	0.8617	68.5	68 [s]

表4 終了条件(a)に基づく設計結果 ($P_{mut} = 0.1$)

Table 4 Design results using proposed method for GA termination condition (a) ($P_{mut} = 0.1$).

N_P	平均値	最良値	平均世代交代数	平均計算時間
50	1.3528	0.6057	92.0	23 [s]
100	1.1924	0.6230	90.5	45 [s]
200	0.8934	0.5332	110.6	129 [s]

全実験結果の中で最も質の良い解を表している。

表3によると、突然変異がない場合の解の質はきわめて悪い。この理由は、突然変異を用いないためにすべての個体が簡単に一致してしまい、十分な解の探索が行われないまま局所解に陥ってしまうためである。詳細については、8.2節で議論する。

また、本実験では、文献11)と比較して探索点が約20倍に増えているので、同じ終了条件では十分な探索が行えないと考えられる。そこで、終了条件(b)に従って200世代まで繰り返し処理を行った。ここでは、交叉率 $P_{cross} = 0.8$ とし、前の実験と同様、それぞれ異なる初期集団で20回の試行を行った。また、効率的な突然変異率を検討するため、突然変異率を $P_{mut} = 0.05$ (表5)、 $P_{mut} = 0.1$ (表6)、 $P_{mut} = 0.2$ (表7)として実験した。ただし、個体数は $N_P = 50, 100, 200$ としている。計算時間は、 $N_P = 50, 100, 200$ でそれぞれ約49[s]、98[s]、197[s]となって個体数にほぼ比例しており、表5~表7でほぼ同じであった。なお、予備実験として突然変異がない場合でも設計を行ったが、まったく良い結果は得られなかった。

実験結果より、突然変異率 P_{mut} が高い場合に比較的良好な結果が得られることが分かる。ただし、突然変異率を $P_{mut} = 0.2$ より高くしても、得られる解の平均値はほとんど変わらなかった。

最小雑音分散(0.5332)の誤差FB係数は

表5 終了条件(b)に基づく設計結果 ($P_{mut} = 0.05$)

Table 5 Design results using proposed method for GA termination condition (b) ($P_{mut} = 0.05$).

N_P	平均値	最良値
50	1.1307	0.5592
100	0.9440	0.5570
200	0.8307	0.5338

表6 終了条件(b)に基づく設計結果 ($P_{mut} = 0.1$)

Table 6 Design results using proposed method for GA termination condition (b) ($P_{mut} = 0.1$).

N_P	平均値	最良値
50	1.0546	0.6057
100	0.8418	0.6230
200	0.7425	0.5332

表7 終了条件(b)に基づく設計結果 ($P_{mut} = 0.2$)

Table 7 Design results using proposed method for GA termination condition (b) ($P_{mut} = 0.2$).

N_P	平均値	最良値
50	1.0077	0.6229
100	0.8061	0.5935
200	0.7212	0.5652

$$\{\beta_{00}, \beta'_{10}, \beta'_{01}, \beta_{21}\}, \{\beta_{20}, \beta_{11}, \beta'_{03}, \beta'_{23}\},$$

$$\{\beta_{30}, \beta'_{12}, \beta_{32}, \beta_{33}\}, \{\beta_{31}, \beta'_{02}, \beta_{22}, \beta'_{13}\}$$

のようにグループ分けされ、次のように設計された。

$$\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 0.3306 & -0.1379 \\ -1.0000 & 0.1379 & -0.0193 & 0.3306 \\ 0.1379 & 1.0000 & -0.3306 & -0.1379 \\ 0.0193 & -0.3306 & 0.0193 & -0.0193 \end{bmatrix}$$

この誤差FB回路は、従来の4分対称(奇対称)と同じパラメータ数であるにもかかわらず、これらよりも、かなり雑音分散を小さくできることが分かる。

7.3 設計結果(離散係数の場合)

実際に誤差FBをハードウェア上で実行する場合、係数のビット数は少ない方が有利である。よって、ここでは誤差FB係数を特定のビット数で指定して回路設計を行う。

まず、前節で得られた誤差FB係数を3ビットで丸めると、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 0.3750 & -0.1250 \\ -1.0000 & 0.1250 & 0.0000 & 0.3750 \\ 0.1250 & 1.0000 & -0.3750 & -0.1250 \\ 0.0000 & -0.3750 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

このとき、雑音分散は1.3303となって特性が劣化している。そこで、GAの適応度の計算ルーチンに「係数の丸め操作」を組み込んで、異なった初期集団で20回の試行を行う。GAのパラメータを $P_{cross} = 0.8$ 、 $P_{mut} = 0.2$ とし、係数のビット数を $b = 3$ として誤差FB回路を設計した結果を表8に示す。なお、計算時間は、連続係数の場合とほぼ同じであった。

この場合、最も雑音分散が小さい誤差FB回路(雑

表8 提案手法による設計結果(離散係数の場合)

Table 8 Design results using proposed method (discrete valued coefficients).

N_P	平均値	最良値
50	1.4548	0.9250
100	1.0875	0.7393
200	0.9540	0.6810

音分散0.6810)の係数は、次のように設計された。

$$\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.1250 \\ 0.0000 & -0.1250 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1250 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1250 \end{bmatrix}$$

ただし、この場合は0を要素とするグループが2つ存在している。

以上の結果より、係数を離散値で指定する場合、適応度に丸め処理を加える方が効率的に設計できることが分かった。さらに、本設計法では、離散値で係数を指定したにもかかわらず、連続値の4分対称や4分奇対称係数よりも優れた回路が設計されている。

8. 議論

8.1 交叉について

まず、提案アルゴリズムの交叉について議論する。例として、以下の16個の係数

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9,$$

$$x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}$$

を、以下のようにグループ分けした場合を考える。

$$\{x_1, x_3, x_5, x_{12}\}, \{x_2, x_4, x_7, x_{16}\}$$

$$\{x_6, x_8, x_{11}, x_{14}\}, \{x_9, x_{10}, x_{13}, x_{15}\}$$

$$(35)$$

これは、遺伝子形では以下のように表される。

$$G = \{S_4, S_3, S_2, S_1\}$$

ただし、

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 4, 6\},$$

$$S_3 = \{1, 3, 11\}, S_4 = \{2, 4, 11\}.$$

$$(36)$$

ここで、議論の簡略化のため、交叉ポイントを $k = 2$ とし、 $S_{4 \sim 3} = \{S_4, S_3\}$ とにおいて、これを上位遺伝子と呼び、 $S_{2 \sim 1} = \{S_2, S_1\}$ とにおいて、これを下位遺伝子と呼ぶことにする。このとき、提案した交叉アルゴリズムで交叉を実行し、親から子へ遺伝子が受け継がれた場合、上位遺伝子は、表現形

$$\{x_1, x_3, x_5, x_{12}\}, \{x_2, x_4, x_7, x_{16}\} \quad (37)$$

として発現するが、下位遺伝子は表現形

$$\{x_6, x_8, x_{11}, x_{14}\}, \{x_9, x_{10}, x_{13}, x_{15}\} \quad (38)$$

として発現するとは限らない。なぜなら、この遺伝子は、係数の相対位置を表しているにすぎないからである。

しかし、交叉する相手の上位遺伝子が、たとえば表現形

$$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_3, x_7, x_{12}, x_{16}\},$$

遺伝子形

$$S_{4\sim 3} = \{1, 3, 4, 2, 7, 11\}$$

のように、特定の係数

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_{12}, x_{16}$$

によってグループを構成していれば、交叉後、下位遺伝子は (38) の表現形として発現する。

この議論を一般化すると、遺伝子が親から子へ受け継がれた場合、比較的上位の遺伝子の表現形は発現する可能性が高いが、下位の遺伝子の表現形は発現する可能性が低いといえる。ただし、特定の上位遺伝子を持つ個体と交叉すれば、下位遺伝子の表現形も発現する。また、突然変異によって同じことが起こる可能性もある。このように、下位遺伝子情報は、たとえその世代である特定の表現形として発現しなくても、次世代または次々世代へと伝えられる。

8.2 突然変異について

突然変異の役割について議論する。本手法の交叉では、 x_1 を含むグループは変化しない。また、いったん、すべての個体の x_1 を含むグループが一致すると、同じことが次のグループにもあてはまる。このように、上位遺伝子がある遺伝子で固定されてしまうと、2つの個体を交叉させても同じ個体しか現れなくなる。これが、突然変異がない場合に解の質が悪くなる原因と考えられる。したがって、突然変異を加えることによって x_1 を含むグループの組合せに揺らぎを与えることが探索の効率化のために不可欠である。

8.3 離散係数の設計効率について

本手法において係数を比較的長いビットで設計する際には、係数を連続値で設計しておいて後で適切な離散値に丸めればよいと考えられるが、短いビットの場合は 7.3 節の結果から分かるように、適応度の計算に係数の丸め操作を加える方が効率的に設計できる。

ただし、たとえば、小数点以下 0 ビットの 0 または ± 1 のみを係数値とするような誤差 FB 係数を設計する場合は、係数をグループ分けするよりも誤差 FB 係数の値そのものを GA で決定する方が効率的と考えられる。なぜなら、係数値を 0 または ± 1 の 3 種類のパラメータで表すとき、 β_{00} を除く 15 個の係数の組合せ総数は、 $3^{15} = 14348907$ であり、係数をグループ分けするよりも探索点は少ない。また、それぞれの遺伝子に係数値を対応させるだけで遺伝子形が設計できるので、遺伝子設計アルゴリズムが簡略化される利点がある。このとき、逆行列の計算も必要とせず、計算

時間も短縮される。

9. む す び

本論文では、係数のパラメータ数やビット数をあらかじめ指定し、その条件下で特定の次数の 2 次元誤差 FB 回路を設計する方法を提案した。ここでは、GA によって係数をグループ分けし、GA の適応度計算過程に組み込まれた Lagrange の未定乗数法によって係数を設計している。また、GA を適用するために、グループ分け情報 (探索点) の遺伝子形へのコーディング方法や各 GA オペレータ (交叉・突然変異) を提案した。これらによって致死遺伝子を発生させることなく、効率的に探索が行える。数値実験では 16 個の係数に対してグループの要素数を 4 とし最適化を行い、従来の 4 分対称や 4 分奇対称の制約条件と同じパラメータ数 (無制約の約 4 分の 1) で、より優れた誤差 FB 回路が設計できることを確認した。また、係数を特定ビットで丸める操作を適用度計算ルーチンに加えることによって、離散係数を持つ誤差 FB 回路が効率的に設計されることが分かった。

なお、本設計法でグループの要素数を $L = 2$ とおくと、文献 11) のペアリング・アルゴリズムと一致する。ただし、文献 11) とは、突然変異の方法は異なる。

今後の課題として、GA 以外の最適化アルゴリズムをこの問題に適用し、その有効性を比較・検討する必要がある。また、パラメータ数が飛躍的に増大する 3 次元誤差 FB 回路の設計問題に対しても本手法を適用したいと考えている。

謝辞 本論文における GA の探索効率に関して有効なご指摘をいただきました査読者に対し深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Munson, D.C. and Liu, D.: Narrowband recursive filter with error spectrum shaping, *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, Vol.CAS-28, No.2, pp.160-163 (Feb. 1981).
- 2) Higgins, W.E. and Munson, D.C.: Noise reduction strategies for digital filters: Error spectrum shaping versus the optimal linear state-space formulation, *IEEE Trans. Acoust. Signal Process.*, Vol.ASSP-30, No.6, pp.963-973 (1982).
- 3) Higgins, W.E. and Munson, D.C.: Optimal and suboptimal error spectrum shaping for cascade-form digital filters, *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, Vol.CAS-31, No.5, pp.429-437 (1984).

- 4) Laakso, T.I. and Hartimo, I.O.: Noise reduction in recursive digital filters using high-order error feedback, *IEEE Trans. Signal Process.*, Vol.40, No.5, pp.1096–1107 (1992).
- 5) 雛元孝夫, 狩野修治: 高次誤差フィードバックを用いた状態空間デジタルフィルタの雑音低減化, 信学論(A), Vol.J77-A, No.9, pp.1214–1222 (1994).
- 6) 雛元孝夫, 黒田直喜, 隈 俊毅: 4分対称または奇対称係数の誤差フィードバックを用いた2次元巡回形デジタルフィルタの誤差スペクトル整形, 信学論(A), Vol.J81-A, No.2, pp.171–181 (1998).
- 7) Hinamoto, T., Karino, S., Kuroda, N. and Kuma, T.: Error Spectrum Shaping in Two-Dimensional Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, Vol.46, No.10, pp.1203–1215 (1999).
- 8) 雛元孝夫, 中本昌由, 東 啓介: 分母分離形2次元デジタルフィルタの誤差スペクトル整形, 信学論(A), Vol.J84-A, No.2, pp.143–151 (2001).
- 9) Goldberg, D.E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Wesley (1989).
- 10) 中本昌由, 雛元孝夫: GAによる係数のグループ分けに基づく誤差フィードバック回路の設計法, 第14回回路とシステム(軽井沢)ワークショップ, pp.83–88 (Apr. 2001).
- 11) 中本昌由, 雛元孝夫: GAによる係数のペアリングに基づく誤差フィードバック回路の設計法, 情報処理学会論文誌: 数理モデル化と応用, Vol.42, No.SIG5 (TOM4), pp.81–88 (2001).
- 12) 川又政征, 今窪 純, 樋口龍雄: 遺伝的アルゴリズムを用いた分母分離形2次元デジタルフィルタの最適設計法, 信学論(A), Vol.J78-A, No.2, pp.132–140 (1995).
- 13) 明田吉浩, 長谷山美紀, 北島秀夫, 永井信夫: 遺伝的アルゴリズムを用いたフィルタ係数の量子化法, 信学論(A), Vol.J78-A, No.12, pp.1542–1549 (1995).
- 14) 佐藤 孝, 吉川敏則: 遺伝的アルゴリズムを用いた縦続形FIRデジタルフィルタの低感度構成について, 信学論(A), Vol.J80-A, No.7, pp.1113–1121 (1997).
- 15) 伊庭齊志: 遺伝的アルゴリズムの基礎—GAの謎を解く, オーム社 (1994).

(平成13年4月12日受付)

(平成13年6月11日再受付)

(平成13年8月26日採録)



中本 昌由 (学生会員)

平成9年岡山理科大学工学部情報工学科卒業。平成11年同大学大学院修士課程修了。現在、広島大学大学院工学研究科博士課程後期在学中。平成12年4月より呉高専非常勤講師。確率過程の解析、デジタル信号処理、遺伝的アルゴリズムの応用に関する研究に従事。電子情報通信学会、IEEE各会員。



雛元 孝夫 (正会員)

昭和44年岡山大学工学部電気工学科卒業。昭和46年神戸大学大学院修士課程修了。同年シャープ(株)入社。昭和47年神戸大学工学部助手。昭和54~56年カナダ国クィーンズ大学客員研究員。昭和59年4~8月カナダ国クィーンズ大学、トロント大学各客員研究員。神戸大学工学部講師を経て昭和63年鳥取大学工学部教授。平成4年広島大学工学部第二類(電気系)教授。平成13年広島大学大学院工学研究科教授。平成5~7年IEEE Trans. on Circuits & Systems IIのAssociate Editor。工学博士。デジタル信号・画像処理、システム理論の研究に従事。電子情報通信学会、計測自動制御学会、システム制御情報学会、電気学会各会員。IEEE Fellow。編著「2次元信号と画像処理」(計測自動制御学会, コロナ社)。