確率過程のピーク値分布における重み関数の線形結合モデル ——非ガウス過程の新しいピーク値分布評価法

中 本 昌 由† 南 原 英 生††
荒木 勇一朗††,☆ 雛 元 孝 夫†

本論文では，非ガウス性の確率過程におけるピーク値分布評価法について論じている．ここでは，まず，ガウス過程のピーク値分布評価式により２つの重み関数を定義し，重み関数の線形結合に基づいてピーク値分布をモデル化している．提案モデルは，帯域情報から求められるパラメータ（帯域パラメータ）に基づいて２つ重み関数を調節することにより，確率過程のピーク値分布を表現するものである．そして，これを非ガウス過程に適用することにより，非ガウス過程における新しいピーク値分布評価式を導出している．さらに，我々がすでに提案している非ガウス過程に対応した拡張帯域パラメータを使用した場合のピーク値分布評価式も提案している．これらの評価式は，ガウス過程や狭帯域過程のようなスペシャルケースでは，近似をともなわないピーク値分布評価式と一致する．計算機シミュレーションでは，非常に良好な結果が得られており，提案手法の有効性が確認されている．

A Model for the Peak Values Distribution in a Stochastic Process Based on a Linear Combination of Weighting Functions ——A Novel Approximate Evaluation Method of the Peak Values Distribution for a Non-Gaussian Random Process

Masayoshi Nakamoto,† Hideo Minamihara,††
Yuichiro Araki††,☆ and Takao Hinamoto†

In this paper, we consider an approximate evaluation of the peak values distribution (PVD) for a non-Gaussian random process. We define two weighting functions from the PVD evaluation formula for a Gaussian random process, and model the PVD by a linear combination of weighting functions. The weighting functions are adjusted by a parameter which is related to frequency band information (band-parameter). Furthermore, we derive a novel formula for the PVD approximation of a non-Gaussian random process by applying the proposed model. We also propose a formula with an expanded band-parameter in which a non-Gaussian random process is assumed. This formula agrees with formulas derived without the approximation in the cases of a narrow-band random process and normal Gaussian random process. Results of computer simulations show this method has a good performance on the PVD evaluation of non-Gaussian random signal, and confirms the effectiveness of the proposed model.

1. まえがき

時間 t に関して不確定な現象（不規則変動波形）は，理想化された数学モデルによって記述され，確率・統計的性質に基づいて解析されることから，一般に確率過程と呼ばれる．確率過程論は，さまざまな分野で生じる不規則雑音の分析に利用されるだけでなく，通信・情報・制御理論等の工学分野に浸透しており，その応用範囲は非常に幅広い[1]．

確率過程（不規則変動波形）において，その微分値が 0 となり，かつ上に凸な値はピーク値と呼ばれており，その研究成果は，地震動に対する構造物の安全性評価[2]，地震波の分析[3]，交通騒音・振動の評価[4),5]等に応用されている．たとえば，騒音・振動に対する人間の心理的影響，衝撃波が構造物に及ぼす影響等は，継続的な成分の平均値よりも突発的な極大値に重要性があると思われる．こういった突発的な値（ピーク値）が重要な意味を持つ場合，その分布情報を把握するこ

† 広島大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Hiroshima University
†† 岡山理科大学工学部情報工学科
Faculty of Engineering, Okayama University of Science
☆ 現在，ソニー LSI デザイン株式会社
Presently with Sony LSI Design Inc.

とが必要となる．

確率過程におけるピーク値分布を理論的に評価（近似）するためには，信号の瞬時値，1 階微分に加えて 2 階微分の結合分布情報を必要とし，その厳密な理論的評価は非常に困難である．Cartwright らは，対象とする不規則変動波形の振幅がガウス分布に従うとの仮定（ガウス過程）のもとでピーク値分布の確率密度関数を導出した[6)]．この場合，対象となる確率過程の瞬時値・1 階微分・2 階微分に関する 3 次元結合確率密度関数が比較的簡単な形となることから，ピーク値分布の確率密度関数は，その定義式（後述する式 (1)）に基づいて導出されている．ところが，一般的な不規則変動波形が必ずしも典型的なガウス過程とは限らないことから，振幅の非ガウス性（ガウス分布とのずれ）を理論の導出過程で考慮に入れる必要がある．ただし，複雑な形状を示す非ガウス分布（非ガウス過程）の場合，先に述べた 3 次元結合確率密度関数が非常に煩雑になり，理論評価式の導出がきわめて困難となる問題点がある．このような研究背景から，非ガウス過程におけるピーク値分布の評価理論が，3 次元結合分布情報を必要としない形で提案されている[4),7),8)]．ただし，これらは理論を展開する際になんらかの仮定・近似を用いており，いずれも完全な（近似を用いない）形で導出されているわけではない．したがって，こういった近似問題を扱う場合，さまざまな側面からアプローチを行うことが重要であり，いくつかの研究成果の積み重ねがより高精度な手法を発見する手がかりとなる．

そこで本論文では，確率過程のピーク値分布に対して従来とは異なった側面からのアプローチを行う．確率過程のピーク値分布は，対象とする不規則現象の振幅特性および周波数特性に依存すると考えれるが，その対応関係は依然として不明のままである．そこで本研究では，振幅特性および周波数特性がピーク値分布に与える影響を考察すべく，1 つの仮説を提案する．すなわち，振幅確率分布と狭帯域過程のピーク値分布に重み関数によって重みが加わり，それらの線形結合によってピーク値分布が形成されると仮定する．また，周波数情報は帯域パラメータによって重み関数を調節することによってピーク値分布に反映されると仮定する．ここで，非ガウス過程を対象とした場合，振幅確率分布と狭帯域過程のピーク値分布に関しては近似を用いない評価式を使用するが，重み関数はガウス過程を仮定して導出されたものを用いて近似する．これによって，瞬時値・1 階微分・2 階微分の 3 次元結合分布情報を必要としない新しい近似的ピーク値分布評価式が導出される．また，文献 7) で提案された非ガウス過程に対応した拡張帯域パラメータを適用した評価式も提案する[9)]．

この評価式は，従来と同様，ガウス分布を初項とする Hermite 展開に基づいて表されており，高次の展開係数を用いて理論評価式は表される．これは，一種の近似手法であるが，良好な評価精度を得ることができることを実験的に確認している．また，この評価式は，ガウス過程や狭帯域過程のようなスペシャルケースの場合，近似をともなわない理論評価式[4),6)]と一致するという特長を持つ．

以下，2 章でガウス過程のピーク値分布について簡単に説明する．3 章では，ガウス過程のピーク値分布評価式から重み関数の線形結合モデルを提案し，2 つの重み関数を導出する．そして，4 章で提案モデルを非ガウス過程のピーク値分布に適用し，新しいピーク値分布評価式を導出する．5 章で計算機シミュレーションの結果を示し，提案手法の有効性，帯域パラメータに関する考察，従来法との比較を行う．最後の 6 章で，まとめと今後の課題を示す．

なお，本論文では一般性を失うことなく，対象とする確率過程の平均を 0，分散を 1 に規格化している．

2. ガウス過程におけるピーク値分布

2.1 ピーク値分布評価式

確率過程 $x(t)$ のピーク値確率分布 $p(x)$ は，信号の瞬時値 $x(t)$，1 階微分値 $\dot{x}(t)$，2 階微分値 $\ddot{x}(t)$ の結合分布情報 $P(x,\dot{x},\ddot{x})$ を用いて以下のように表される[6)]．

$$p(x)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{0}|\ddot{x}|P(x,0,\ddot{x})d\ddot{x}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}|\ddot{x}|P(x,0,\ddot{x})d\ddot{x}dx} \tag{1}$$

ここで，平均 0 のガウス過程の場合，$P(x,\dot{x},\ddot{x})$ は以下のように表すことができる．

$$P(x,\dot{x},\ddot{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{m_0m_2m_4-m_2^3}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{x}^2}{m_2}+\left(\frac{m_4x^2+2m_2x\ddot{x}+m_0\ddot{x}^2}{m_0m_4-m_2^2}\right)\right\}\right] \tag{2}$$

ただし，m_n は角周波数 ω に関するパワースペクトル密度関数 $S_x(\omega)$ の n 次モーメントであり，以下のように定義されている．

$$m_n=\int_0^{\infty}\omega^nS_x(\omega)d\omega \tag{3}$$

式 (2) を式 (1) に代入し，分散 1 に正規化すると，ガウス過程におけるピーク値分布評価式が次のように得

られる．

$$p_G(x;\varepsilon_0)=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_0^2}+\sqrt{1-\varepsilon_0^2}xe^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot\Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) \quad (4)$$

ただし，

$$\Phi(*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_*^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \quad (5)$$

ここで，第 2 引数 ε_0 は

$$\varepsilon_0=\sqrt{\frac{m_0m_4-m_2^2}{m_0m_4}} \quad (6)$$

と定義されており，以後，帯域パラメータと呼ぶ．

なお，m_0，m_2，m_4 は，それぞれ瞬時値，1 階微分値，2 階微分値の分散 σ_x^2，$\sigma_{\dot{x}}^2$，$\sigma_{\ddot{x}}^2$ と以下のような関係がある[2]．

$$m_0=\int_0^\infty S_x(\omega)d\omega=\frac{\sigma_x^2}{2} \quad (7)$$

$$m_2=\int_0^\infty \omega^2 S_x(\omega)d\omega=\frac{\sigma_{\dot{x}}^2}{2} \quad (8)$$

$$m_4=\int_0^\infty \omega^4 S_x(\omega)d\omega=\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{2} \quad (9)$$

2.2 帯域パラメータの性質

ここでは，式 (6) で定義された帯域パラメータの性質について考察する．まず，式 (6) を

$$\varepsilon_0=\sqrt{1-\left(\frac{N_0}{M_0}\right)^2} \quad (10)$$

と変形する．ただし，N_0 はガウス過程におけるゼロ・クロッシング（瞬時値が平均レベル 0 を通過する期待回数），M_0 はピーク値総数であり，それぞれ

$$N_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (11)$$

$$M_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (12)$$

と表される[6),10)]．

一般に，波形の性質から

$$0<N_0<M_0 \quad (13)$$

が成り立ち，帯域パラメータは

$$0<\varepsilon_0<1 \quad (14)$$

を満たす．ここで，狭帯域☆では $\varepsilon_0\to 0$ となり，この場合，ゼロ・クロッシング N_0 とピーク値総数 M_0 がほぼ一致する．$\varepsilon_0\to 1$ となるのは，ゼロ・クロッシング N_0 に対するピーク値総数 M_0 の比率がきわめて高い場合であり，いたるところでピーク値が生起する不規則過程である．

☆ 帯域幅と帯域パラメータの関係については付録にまとめる．

3. 重み関数の線形結合モデル

3.1 重み関数の導出

次に，式 (4) を

$$p_G(x;\varepsilon_0)=\varepsilon_0P\left(\frac{x}{\varepsilon_0}\right)+\sqrt{1-\varepsilon_0^2} \cdot\Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right)p_N(x) \quad (15)$$

と書きかえる．ただし，

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (16)$$

$$p_N(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (17)$$

このとき，$P(x)$，$p_N(x)$ に対する重み関数をそれぞれ $w_1(P(x);\varepsilon_0)$, $w_2(p_N(x);\varepsilon_0)$ とし，

$$\begin{cases} w_1(P(x);\varepsilon_0)=\varepsilon_0P\left(\dfrac{x}{\varepsilon_0}\right) \\ w_2(p_N(x);\varepsilon_0)=\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\Phi\left(-x\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) \cdot p_N(x) \\ \qquad \varepsilon_0\in(0,1),\ x\in(-\infty,\infty) \end{cases}$$

と定義すれば，式 (4) は

$$p_G(x;\varepsilon_0)=w_1(P(x);\varepsilon_0)+w_2(p_N(x);\varepsilon_0) \quad (18)$$

と表すことができる．式 (18) は，ガウス過程のピーク値分布が 2 つの重み関数の線形結合によってモデル化できることを表している．本論文では，これを重み関数の線形結合モデルと呼ぶ．

3.2 重み関数の性質

図 1，**図 2** に ε_0 をいろいろ変化させた $w_1(P(x);\varepsilon_0)$, $w_2(p_N(x);\varepsilon_0)$ の曲線を示す．図 1 より，ε_0 が小さくなるにつれて，$w_1(P(x);\varepsilon_0)$ の成分（x 軸と囲まれた面積）は，徐々に減衰している様子が分かる．逆に，図 2 では ε_0 が大きくなるにつれて $w_2(p_N(x);\varepsilon_0)$ の成分は徐々に減衰している．したがって，提案モデルでは，確率過程のピーク値分布は帯域パラメータ ε_0 によって $P(x)$ と $p_N(x)$ に対する重みが調節されていると考えられる．ここで，$P(x)$ は振幅分布（ガウス分布），$p_N(x)$ は狭帯域ガウス過程におけるピーク値分布であるから，この部分に振幅情報が含まれていると仮定すれば，非ガウス過程に関して瞬時値・1 階微分・2 階微分に関する 3 次元結合分布情報を必要としないピーク値分布の近似評価が行える．

特に $\varepsilon_0\to 0$（狭帯域過程）では

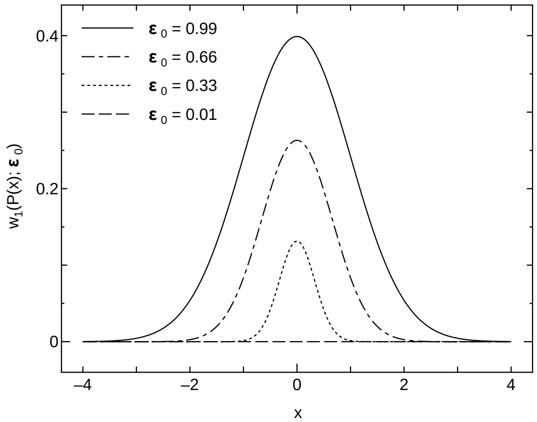


図 1 重み関数 $w_1(P(x), \varepsilon_0)$
Fig. 1 Weighting function $w_1(P(x), \varepsilon_0)$.

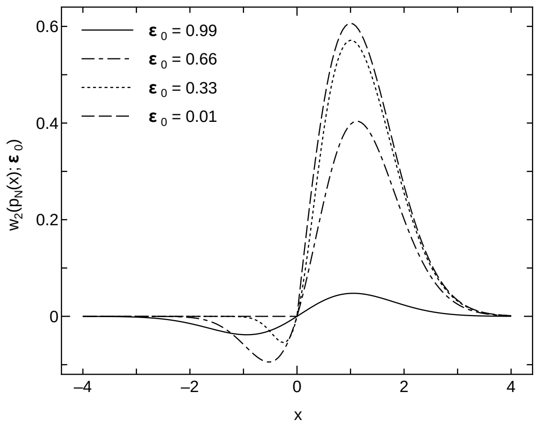


図 2 重み関数 $w_2(p_N(x), \varepsilon_0)$
Fig. 2 Weighting function $w_2(p_N(x), \varepsilon_0)$.

$$\lim_{\varepsilon_0 \to 0} p_G(x; \varepsilon_0) = \begin{cases} p_N(x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (19)$$

となる．これは，$p_N(x)$ に対する重みが 1，$P(x)$ に対する重みが 0 となっていることを示している．式 (19) は，$p_N(x)$ が狭帯域過程におけるピーク値分布であること表しており，$x < 0$ には，ピーク値が存在しないことも示している．

また，1 回のゼロ・クロシッングに対して無限数のピーク値が存在するような極限領域（すなわち，$N_0/M_0 \to 0$）では，式 (10) から $\varepsilon_0 \to 1$ であり

$$\lim_{\varepsilon_0 \to 1} p_G(x; \varepsilon_0) = P(x) \quad (20)$$

となって，振幅確率密度関数（ガウス分布）と一致する．これは，$p_N(x)$ に対する重みが 0，$P(x)$ に対する重みが 1 となっていることを表している．なお，$N_0/M_0 \to 0$ の意味は，瞬時値とピーク値の分布がほぼ一致するような波形であり，低周波の波形に高周波の成分が重畳した場合等にこのような特性を示す．ガウス過程において $\varepsilon_0 \to 1$ となる場合，ピーク値分布と確率密度分布が一致するという事実は，非ガウス過程のピーク値評価においても重要であると考えられる．

4. 非ガウス過程におけるピーク値分布評価法

4.1 重み関数の線形結合モデルの適用

3 章の議論から，ガウス過程のピーク値分布は重み関数の線形結合モデルで表せることが分かった．本論文では，このモデルは，振幅確率分布と狭帯域のピーク値分布が既知ならば，非ガウス過程においても近似的にピーク値分布を表すと仮定する．

よって，ここでは新しく提案した重み関数の線形結合モデルを非ガウス過程に適用することを考える．$P(x)$ と $p_N(x)$ は，それぞれガウス過程における「振幅確率密度分布」と「狭帯域過程のピーク値分布」の評価式であるが，これらは，非ガウス過程における評価式もすでに導出されており，それぞれ $\tilde{P}(x)$，$\tilde{p}_N(x)$ と表す．

つまり，非ガウス過程では Hermite 展開により

$$\tilde{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 0) H_n(x) \quad (21)$$

と表すことができ，また，狭帯域過程のピーク値分布は，瞬時値とその微分に関する結合分布情報に基づいて

$$\tilde{p}_N(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{F_1(x)}{F_0(0)} \quad (22)$$

と表される[4)]．ただし

$$\begin{aligned} F_k(x) = &\sum_{m=2}^{\infty} H_{m-2}(0) \sum_{n=0}^{\infty} A(n, m) H_{n+k}(x) \\ &+ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 1) H_{n+k}(x) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 0) H_{n+k}(x). \end{aligned} \quad (23)$$

なお，$A(n, m)$ は瞬時値とその微分に関する展開係数であり，

$$A(n, m) = \left\langle \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} H_n\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) H_m\left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}}\right) \right\rangle$$

と定義されている．また，$H_n(x)$ $(n, m = 0, 1, 2 \cdots)$ は Hermite 多項式を表しており，記号 <> は平均操作を表している．ガウス過程では，展開係数は

$$A(n,m)=\begin{cases}1 & (n=m=0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{24}$$

を満たすことから，$\tilde{P}(x)$ と $\tilde{p}_N(x)$ は，それぞれ $P(x)$ と $p_N(x)$ に一致する．

なお，ここで対象とする現象は，平均レベルを中心に振動する定常な不規則現象なので，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\tilde{P}(x)=0 \tag{25}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\tilde{p}_N(x)=0 \tag{26}$$

を満たす．

よって，非ガウス過程（$\tilde{P}(x)$ と $\tilde{p}_N(x)$）に対し，重み関数の線形モデルを用いると，ピーク値分布は以下のように表すことができる．

$$p_W(x;\varepsilon_0)=w_1(\tilde{P}(x);\varepsilon_0)+w_2(\tilde{p}_N(x);\varepsilon_0) \tag{27}$$

すなわち，帯域情報に応じて ε_0 が決定され，$\tilde{P}(x)$，$\tilde{p}_N(x)$ に対する重みが調節される．本手法はガウス過程における確率分布モデルを非ガウス過程に適用するという新しい試みである．ただし，重み関数はガウス過程において導出されたものを利用しているため，式(27) は近似式であることに注意する必要がある．

4.2 ピーク値分布評価式の導出

式 (27) に式 (21)，(22) を代入すると

$$p_W(x;\varepsilon_0)=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}A(n,0)H_n\left(\frac{x}{\varepsilon_0}\right)+\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\,\Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{F_1(x)}{F_0(0)} \tag{28}$$

となって，非ガウス過程における新たなピーク値分布評価式が導出される．

ここで，スペシャルケースとしてガウス過程を考えると，式 (24) より

$$p_W(x;\varepsilon_0)=p_G(x;\varepsilon_0)$$

となる．

次に狭帯域過程では，$\varepsilon_0\to 0$ であるから

$$\lim_{\varepsilon_0\to 0}p_W(x;\varepsilon_0)=\begin{cases}\tilde{p}_N(x) & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{29}$$

となる．これは，ガウス過程における式 (19) の関係に対応している．

このように 2 つのスペシャルケース（ガウス過程・狭帯域過程）では近似をともなわない従来手法と完全に一致する．

4.3 拡張帯域パラメータによる評価式

ガウス過程では，振幅確率分布とピーク値分布が一致する不規則過程では $\varepsilon_0\to 1$ となることが分かっているが，非ガウス過程では断言できない．そこで，このような（振幅確率分布とピーク値分布が一致する）場合に非ガウス過程でも値が 1 に近づく性質を持つ帯域パラメータ（拡張帯域パラメータ[7)]）を示し，これを用いたピーク値分布評価式を導出する．拡張帯域パラメータは，

$$\varepsilon_1=\sqrt{1-\left(\frac{N_1}{M_1}\right)^2} \tag{30}$$

と定義されている．ただし，N_1 は非ガウス過程におけるゼロ・クロッシング[4)]，M_1 はピーク値総数[7)]であり，それぞれ以下のように表される．

$$N_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{m_0}}F_0(0) \tag{31}$$

$$M_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_4}{m_2}}\left\{\sum_{m=2}^{\infty}H_{m-2}(0)\sum_{n=0}^{\infty}B(n,m)H_n(0)+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}B(n,1)H_n(0)+\sum_{n=0}^{\infty}B(n,0)H_n(0)\right\} \tag{32}$$

ただし，$B(n,m)$ は瞬時値の 1 階微分および 2 階微分に関する展開係数であり，次式で定義される．

$$B(n,m)=\left\langle\frac{1}{n!}\frac{1}{m!}H_n\left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}}\right)H_m\left(\frac{\ddot{x}}{\sigma_{\ddot{x}}}\right)\right\rangle$$

式 (30) のように帯域パラメータを定義すれば，先の議論より，狭帯域では M_1 と N_1 はほぼ同数であるから，$\varepsilon_1\to 0$ となり，また，$N_1/M_1\to 0$ では $\varepsilon_1\to 1$ となる．これは，ε_0 と同様な振舞いである．

ε_1 を式 (28) に用いると，以下のように表される．

$$p_W(x;\varepsilon_1)=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_1^2}\sum_{n=0}^{\infty}A(n,0)H_n\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right)+\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\Phi\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{F_1(x)}{F_0(0)} \tag{33}$$

ここで，$\varepsilon_1\to 1$ $(N_1/M_1\to 0)$ では，

$$\lim_{\varepsilon_1\to 1}p_W(x;\varepsilon_1)=$$

表 1 ε_0，ε_1 の値
Table 1 Values of ε_0 and ε_1.

	ε_0	ε_1
信号 A	0.58	0.46
信号 B	0.62	0.54
信号 C	0.70	0.67

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\sum_{n=0}^{\infty}A(n,0)H_n(x) \tag{34}$$

となる．$\varepsilon_1 \to 1$ となる過程は，有限のゼロ・クロッシングに対し，無限数に近い（きわめて多数の）ピーク値が存在する非常に複雑な不規則過程である．こういった過程では，3 章の議論から分かるようにピーク値分布と振幅確率分布が一致すると考えられる．この現象はガウス過程に限らず，一般の非ガウス過程においても生じると思われる．式 (34) はこの現象を表現しており，ガウス過程における式 (20) の関係に対応している．このように，本手法と従来法（文献 8) 等）の相違点は $\varepsilon_1 \to 1$ におけるピーク値分布が振幅確率密度分布に一致すると推測し，これを表現するようなピーク値確率分布モデルを提案した点である．また，式 (33) は，$\varepsilon_1 \to 0$ の場合も式 (29) と同様な性質があることが容易に分かる．ただし，2 つの帯域パラメータのどちらが有効かは理論的に不明確であるから，計算機シミュレーションによって試行錯誤的に決定しなければならない．

5. 計算機シミュレーション

ここでは，計算機シミュレーションによって理論の妥当性を確認する．シミュレーションで用いる非ガウス過程の不規則信号は，三角級数モデル[2)]によって発生させたガウス過程の信号に対し，非線形変換を施すことによって生成した信号 A，信号 B，信号 C である．これらは，文献 7)，8) の計算機シミュレーションにも使用されている．ε_0 と ε_1 の値が**表 1** に示されている．ただし，ε_1 を計算するために，次数 $m+n=8$ までの展開係数を用いた．

5.1 提案手法によるピーク値分布評価

図 3 は，実際に標本したピーク値データに基づく実験値と式 (28) による理論曲線 ($p_W(x;\varepsilon_0)$) を比較したものである．同様に，**図 4** は実験値と式 (33) による理論曲線 ($p_W(x;\varepsilon_1)$) を比較したものである．それぞれの図は，展開係数の次数を初項から $m+n=4$，8 と増やした曲線が描かれている．これらの実験結果から，提案手法の有効性が確認できる．なお，各曲線における初項は，ガウス過程におけるピーク値分布評価式（式 (4)）であることに注意する必要がある．

表 2 提案手法と文献 8) の手法の比較（MSE×10^3）
Table 2 Comparison between proposed method and Ref. 8) method (MSE×10^3).

	提案手法	文献 8)
信号 A	0.260	0.200
信号 B	0.234	0.235
信号 C	0.198	0.312

5.2 帯域パラメータに関する考察

また，提案モデルに対する 2 つ帯域パラメータの特性を比較するため，それぞれのケースでピーク値分布の評価を行った．図 3 と図 4 より，すべての信号において，帯域パラメータは ε_0 を用いた場合（$p_W(x;\varepsilon_0)$）よりも，ε_1 を用いた場合（$p_W(x;\varepsilon_1)$）の方が実験値に近づいていることが分かる．これらの結果より，文献 7) で提案された拡張帯域パラメータによって重み関数を調節する方が，非ガウス過程のピーク値分布評価にとって有効であることが分かる．

5.3 従来法との比較

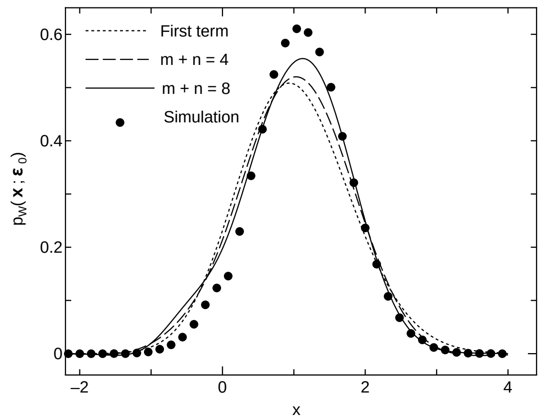
表 2 は，式 (33) と文献 8) による手法（従来法）の MSE（実験値と理論曲線の平均二乗誤差）を比較したものである．表 2 より，信号 A，信号 B では従来法が若干良いか，ほぼ同等である．しかしながら，信号 C では，提案手法が有効であることが分かる．表 1 より，信号 C の ε_1 の値は他の信号よりも大きい．提案手法は，このような ε_1 の値が比較的大きい信号に対して従来法よりも有効であると考えられる．

対象とする不規則現象が高周波雑音を含む場合，ε_0 や ε_1 は比較的大きな値になる．本手法を用いれば，こういった不規則過程に対しても高精度なピーク値分布評価が期待できる．

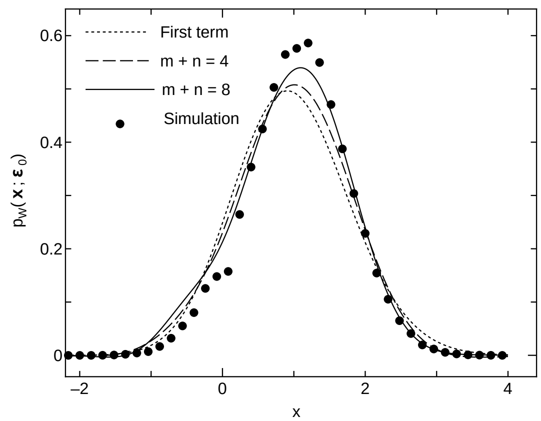
6. まとめと今後の課題

本論文では，ガウス過程のピーク値分布評価式に基づいて 2 つ重み関数を導出し，これらの線形結合による新たな確率分布モデルを提案した．そして，提案モデルを非ガウス過程のピーク値分布評価に適用し，新たなピーク値分布評価式を導出した．計算機シミュレーションでは，良好な結果が得られ，非ガウス過程のピーク値分布における提案手法の有効性が確認できた．また，2 次的成果として，実験的考察から拡張帯域パラメータを利用することによって評価精度がさらに改善されることが分かった．

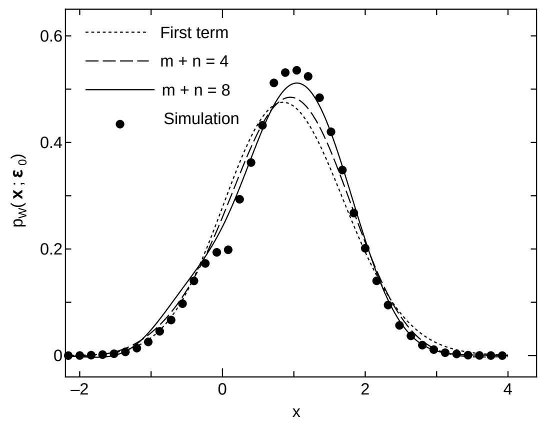
本論文ではいくつかの仮定や近似を用いているが，「非ガウス過程のピーク値分布は非ガウス情報を含んだ 2 つの分布成分から形成される」との一解釈が成り



(a) Signal A



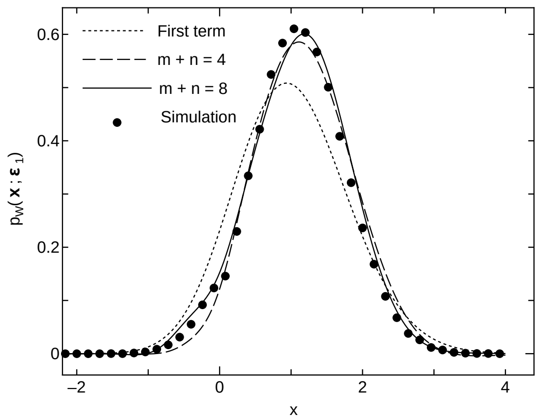
(b) Signal B



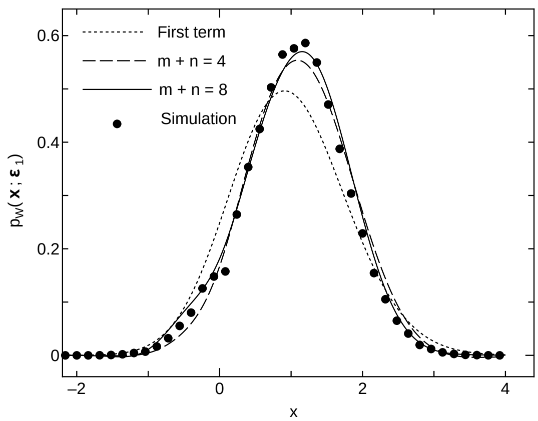
(c) Signal C

図 3 ピーク値分布評価における理論値と実験値の比較（$p_W(x;\varepsilon_0)$ の場合）

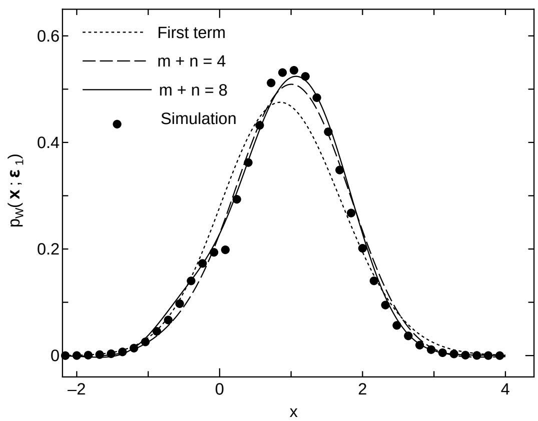
Fig. 3 Comparison between theoretical curves and experimental values in approximation of peak values distribution ($p_W(x;\varepsilon_0)$ cases).



(a) Signal A



(b) Signal B



(c) Signal C

図 4 ピーク値分布評価における理論値と実験値の比較（$p_W(x;\varepsilon_1)$ の場合）

Fig. 4 Comparison between theoretical curves and experimental values in approximation of peak values distribution ($p_W(x;\varepsilon_1)$ cases).

立つ．これは，計算機シミュレーションによる実験的考察から妥当なものと考えられ，また，帯域パラメータが 1 または 0 となるスペシャルケースでは，それぞれ，狭帯域のピーク値分布，振幅確率分布に一致する（ガウス過程のピーク値分布と同様な振舞いを示す）ことから，理論的妥当性の一端は確認できる．

今後の課題は，高次の展開係数を必要としない（たとえば，$n+m=4$ で高精度に評価できる）手法を開発することや，提案手法の有効範囲を明確化すること等である．

なお，文献 5) で対象となっている正領域内変動波形も本論文で取りあげた問題と同様，振幅確率密度関数と狭帯域過程のピーク値分布が既知である．したがって，この分野に対しても提案モデルが適用できる可能性があり，これも今後の課題としたい．

謝辞 本論文に対して，多くの有益なコメントをいただきました査読者に感謝いたします．

参 考 文 献

1) 小倉久直：物理・工学のための確率過程論，コロナ社，東京都 (1978).
2) 星谷 勝：確率論手法による構造解析，鹿島出版会，東京都 (1973).
3) Gusev, A.A.: Peak factors of Mexican accelerograms: Evidence of a non-Gaussian amplitude distribution, *J. Geophys. Res.*, Vol.101, No.B9, pp.20083–20090 (1996).
4) 南原英生，西村正文，太田光雄：任意不規則騒音・振動波形のピーク値分布に関する一評価理論と実験，音響学会誌，Vol.37, No.3, pp.116–122 (1981).
5) 南原英生，西村正文，太田光雄：正領域内確率変動波の交差・ピーク値に関する簡易信号処理法と環境騒音・振動への適用，電気学会論文誌，Vol.109-C, No.8, pp.601–606 (1989).
6) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: The statistical distribution of the maxima of a random function, *Proc. Soc.*, Vol.A237, No.212, pp.212–232 (1956).
7) 中本昌由，南原英生，太田光雄：レベル交差情報を用いた広帯域非ガウス形不規則信号のピーク値分布評価法，電子情報通信学会論文誌（A），Vol.J82-A, No.3, pp.471–481 (1999).
8) 中本昌由，荒木勇一朗，南原英生，雛元孝夫：広帯域非ガウス性不規則信号のピーク値分布に関する簡易評価理論，情報処理学会論文誌，Vol.42, No.5, pp.1272–1281 (2001).
9) 中本昌由，南原英生，荒木勇一朗，雛元孝夫：重み関数に基づく任意不規則変動波形のピーク値分布評価法，第 9 回計測自動制御学会中国支部学術講演会，pp.150–151 (2000).
10) Rice, S.O.: Mathematical analysis of random noise, *Bell System Tech. J.*, Vol.23, pp.282–332 (1944).

付 録

A.1 帯域パラメータと帯域幅の関係

パワースペクトル密度関数が以下のように与えられた場合を考える．

$$S_x(\omega) = \begin{cases} a & (\omega_0 < \omega < \omega_0 + B) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{35}$$

ただし，$a > 0$，$\omega_0 > 0$，$B > 0$ とする．まず，1 次モーメント m_0 を計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = a \int_{\omega_0}^{\omega_0+B} d\omega \\ &= aB \end{aligned} \tag{36}$$

次に 2 次モーメント m_2 を計算する．

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_0^\infty \omega^2 S_x(\omega) d\omega = a \int_{\omega_0}^{\omega_0+B} \omega^2 d\omega \\ &= \frac{a}{3}\left\{(\omega_0+B)^3 - \omega_0^3\right\} \\ &= \frac{a}{3}\left(3\omega_0^2 B + 3\omega_0 B^2 + B^3\right) \end{aligned} \tag{37}$$

最後に，4 次モーメント m_4 を計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} m_4 &= \int_0^\infty \omega^4 S_x(\omega) d\omega = a \int_{\omega_0}^{\omega_0+B} \omega^4 d\omega \\ &= \frac{a}{5}\left\{(\omega_0+B)^5 - \omega_0^5\right\} \\ &= \frac{a}{5}\left(5\omega_0^4 B + 10\omega_0^3 B^2 + 10\omega_0^2 B^3 \right. \\ &\quad \left. +5\omega_0 B^4 + B^5\right) \end{aligned} \tag{38}$$

ここで，

$$f(B) = \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \tag{39}$$

とおくと，式 (6) は

$$\varepsilon_0 = \sqrt{1 - f(B)} \tag{40}$$

のように変形される．式 (39) に式 (36)，(37)，(38) を代入すると

$$\begin{aligned} f(B) &= \frac{\frac{a^2}{9}\left(3\omega_0^2 B + 3\omega_0 B^2 + B^3\right)^2}{\left\{\begin{array}{l} \frac{a^2}{5} B\left(5\omega_0^4 B + 10\omega_0^3 B^2 \right. \\ \left. +10\omega_0^2 B^3 + 5\omega_0 B^4 + B^5\right) \end{array}\right\}} \\ &= \frac{5\left(3\omega_0^2 + 3\omega_0 B + B^2\right)^2}{\left\{\begin{array}{l} 9\left(5\omega_0^4 + 10\omega_0^3 B + 10\omega_0^2 B^2 \right. \\ \left. +5\omega_0 B^3 + B^4\right) \end{array}\right\}} \end{aligned} \tag{41}$$

ここで，狭帯域過程 $(B \to 0)$ では

$$
\begin{aligned}
&\lim_{B\to 0} f(B)\\
&= \lim_{B\to 0} \frac{5\left(3\omega_0^2 + 3\omega_0 B + B^2\right)^2}{\left\{\begin{array}{l} 9\left(5\omega_0^4 + 10\omega_0^3 B + 10\omega_0^2 B^2\right.\\ \left. +5\omega_0 B^3 + B^4\right)\end{array}\right\}}\\
&= 1 \qquad (42)
\end{aligned}
$$

であるから，式 (40) より，$\varepsilon_0 \to 0$ となる．すなわち，対象とする不規則信号の中心スペクトルが中心周波数に対して十分狭い場合，$\varepsilon_0 \to 0$ となる．

(平成 13 年 2 月 7 日受付)
(平成 13 年 4 月 5 日再受付)
(平成 13 年 5 月 16 日採録)

中本　昌由（学生会員）
平成 9 年岡山理科大学工学部情報工学科卒業．平成 11 年同大学大学院修士課程修了．現在，広島大学大学院工学研究科博士課程後期在学中．平成 12 年 4 月より呉高専非常勤講師．確率過程の解析，ディジタル信号処理，遺伝的アルゴリズムの応用に関する研究に従事．電子情報通信学会，IEEE 各会員．

南原　英生（正会員）
昭和 45 年立命館大学理工学部電気工学科卒業．昭和 47 年同大学大学院修士課程修了．同年，広島電機大学工学部助手，同講師，同助教授，同教授を経て，現在岡山理科大学工学部教授．工学博士．主として，不規則信号解析，環境評価（騒音・振動）の研究に従事．電子情報通信学会，計測自動制御学会，日本音響学会，応用統計学会，電気学会各会員．共著「コンピュータによる数値計算」（朝倉書店）．

荒木勇一朗（学生会員）
平成 11 年岡山理科大学工学部情報工学科卒業．平成 13 年同大学大学院修士課程修了．同年，ソニー LSI デザイン株式会社入社．在学中，確率過程の解析に関する研究に従事．

雛元　孝夫（正会員）
昭和 44 年岡山大学工学部電気工学科卒業．昭和 46 年神戸大学大学院修士課程修了．同年シャープ株式会社入社．昭和 47 年神戸大学工学部助手．昭和 54～56 年カナダ国クィーンズ大学客員研究員．昭和 59 年 4～8 月カナダ国クィーンズ大学，トロント大学各客員研究員．神戸大学工学部講師を経て昭和 63 年鳥取大学工学部教授．平成 4 年広島大学工学部第二類（電気系）教授．平成 13 年広島大学大学院工学研究科教授．平成 5～7 年 IEEE Trans. on Circuits & Systems II の Associate Editor．工学博士．ディジタル信号・画像処理，システム理論の研究に従事．電子情報通信学会，計測自動制御学会，システム制御情報学会，電気学会各会員．IEEE Fellow．編著「2 次元信号と画像処理」（計測自動制御学会，コロナ社）．