Vol. 46 No. SIG 2(TOM 11) 情報処理学会論文誌：数理モデル化と応用 Jan. 2005

エージェントの相互信念を扱う拡張BDI logicの演繹体系

新 出 尚 之[†] 高 田 司 郎[††] 櫟 粛 之[†††]

BDI logic は，合理的エージェントの記述に用いられる時相論理体系で，CTL*にエージェントの心的状態を記述する様相オペレータを導入し，述語論理に拡張したものである．我々は，CTL ベースの命題論理に限定した BDI logic に対し，sequent calculus による完全な演繹体系を与えた．しかし，もともとの BDI logic は，単独のエージェントの心的状態に対応する様相オペレータしか持たず，マルチエージェント環境でのエージェントの相互心的環境の記述はできない．本論文では，我々の演繹体系に対し，マルチエージェント環境におけるエージェントごとの心的状態様相オペレータ，および相互心的状態の記述を許すように拡張したものを与え，またその体系によるいくつかの証明の例を示す．

A Deduction System of Extended BDI logic to Handle Mutual Belief

Naoyuki Nide,[†] Shiro Takata[††] and Tadashi Araragi[†††]

BDI logics are extensions of the predicate variant of CTL* to represent the behavior of rational agents by introducing mental state operators. We previously presented deduction systems for CTL-based propositional BDI logics using sequent calculus. However, since the original BDI logics have only operators to represent the mental states of individual agents, they cannot handle mutual mental states for multiple agents. In this paper, we extend our deduction systems so that we can handle individual and mutual mental states for multiple agents in multi-agent environments. We also show some examples of proof in our system.

1. はじめに

BDI logic[8] は，合理的エージェントの形式的な記述のために Rao らによって提案された様相論理であり，時相論理体系 CTL*[3] に，信念（BEL）·願望（DESIRE）·意図（INTEND）といった心的状態を表す様相オペレータを導入して拡張し，さらに述語論理に拡張したものである．エージェントの信念·願望·意図やそれらの時間変化·持続などを陽に記述できる利点を持つため，合理的エージェントの仕様記述[8] や，さらに合理的エージェントの実装手法である BDI アーキテクチャ[10),11),13] の基礎概念などに用いられている．

BDI logic の演繹体系を与えることは，合理的エージェントの仕様に関する自動証明や，その実装の改良などに有用と考えられる．そのようなものとしては，CTL ベースの命題論理に限定された BDI logic の subset に対して，Rao らが与えたもの[9] があるが，これは Hilbert style であるため，自動証明などの応用には適さない弱点を持つ．そこで我々は，自動証明や実行系の構築などにより適した体系として，同じ subset に，sequent calculus を用いた演繹体系を与えた[14]．

一方，マルチエージェント環境における知的エージェントの社会的·合理的な振舞いに関する形式的な記述や推論を行うには，team formation，joint ability，joint commitment[12] など，エージェント間のコミュニケーションや協調に関わる諸概念を記述できることが必要となる．そのためには少なくとも，あるエージェントが他のエージェントの心的状態を明示的に推論に用いたり，相互信念などの相互心的状態（mutual mental state）について扱ったりする能力が必要である．しかし，もともとの BDI logic は，心的状態様相オペレータを BEL，DESIRE，INTEND の 1 つずつしか持たず，複数エージェントに対する心的状態オペレータを持たないため，マルチエージェント環境での単独エージェントの振舞いは記述できても，エージェ

† 奈良女子大学理学部情報科学科
Faculty of Science, Nara Women's University
†† 近畿大学理工学部情報学科
School of Science and Engineering, Kinki University
††† NTT コミュニケーション科学基礎研究所
NTT Communication Science Laboratories

ント相互間の心的状態や相互心的状態を明示的に扱うことはできなかった．エージェントの信念·願望·意図やその時間変化を，複数エージェントに対して扱えるように拡張した体系としては，文献 1)，12) などがあるが，演繹体系は扱われていない．

本論文では，我々の BDI logic の演繹体系を，複数エージェントのそれぞれの心的状態，および相互心的状態を表すオペレータを持つような体系に拡張し，また，この体系を実際に用いた証明の例を示す．これによって，マルチエージェント環境における，複数エージェントの心的状態や相互心的状態，あるいはその時間変化を明示的に扱う必要のある概念を扱ったり，それに関する推論を行ったりすることが可能になる．マルチエージェントの信念を扱える公理体系は文献 5) などすでに知られるが，我々の体系は，合理的エージェントの記述に有用となる，願望や意図といった信念以外の心的状態や相互心的状態，またそれらの時間変化まで含めてマルチエージェントを対象に扱え，しかも sequent calculus に対するよく知られた Wang のアルゴリズムの拡張による決定アルゴリズムを持つ点が利点である．

2. 論理体系

2.1 論理式の定義

命題記号の集合 P, およびエージェントの集合 Gr をあらかじめ選んで固定しておく．以後，Gr の有限部分集合を「エージェント群」と呼ぶ．論理式を以下のように定義する．

(1) $p \in P$ ならば p は論理式（原子命題）

(2) ϕ と ψ が論理式，かつ $i \in Gr$ ならば，$\phi \vee \psi$，$\neg\phi$，$\mathsf{AX}\,\phi$，$\phi\,\mathsf{AU}\,\psi$，$\phi\,\mathsf{EU}\,\psi$，$\mathsf{BEL}_i(\phi)$，$\mathsf{DESIRE}_i(\phi)$，$\mathsf{INTEND}_i(\phi)$ もそれぞれ論理式

(3) ϕ が論理式，かつ g がエージェント群ならば，$\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)$，$\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi)$，$\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi)$ もそれぞれ論理式

CTL および CTL*の一般的な記法に合わせるため，以後，ϕ AU ψ，ϕ EU ψ をそれぞれ，$\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$，$\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ と書く．

このほか，通常使われる記号（$\wedge$, $\supset$ など）を略記として導入する．具体的には，*true*, *false*, $\phi\wedge\psi$, $\phi \supset \psi$, $\phi \Leftrightarrow \psi$ はそれぞれ $q\vee\neg q$（ここで q は適当に選んで固定した P の要素），$\neg true$，$\neg((\neg\phi)\vee(\neg\psi))$，$(\neg\phi)\vee\psi$，$(\phi\supset\psi)\wedge(\psi\supset\phi)$ の略記，$\mathsf{EX}\,\phi$，$\mathsf{AF}\,\phi$，$\mathsf{EF}\,\phi$，$\mathsf{AG}\,\phi$，$\mathsf{EG}\,\phi$ はそれぞれ $\neg\,\mathsf{AX}\,\neg\phi$，$\mathsf{A}(true\ \mathsf{U}\ \phi)$，$\mathsf{E}(true\ \mathsf{U}\ \phi)$，$\neg\,\mathsf{EF}\,\neg\phi$，$\neg\,\mathsf{AF}\,\neg\phi$ の略記とする．

意味論は 3 章で述べるが，直感的には，X は一般的な点時刻時相論理の「次の時刻（neXt time），F は「将来のいつか」（Future），G は「今後ずっと」（Globally），U は strong until を表し，A は分岐時相論理における「すべての未来で」（All future），E は「ある未来で」（Existent future）を表す．したがって，たとえば $\mathsf{AX}\,\phi$ は「すべての未来で次の時刻に ϕ が成り立つ」，$\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ は「ある未来で，将来のいつか ψ が成り立ち，かつそのときまでずっと ϕ が成り立つ」を意味する．我々の体系はベースが CTL のため，A, E は必ず X，F，G，U のうち 1 つとペアで用いられる（たとえば $\mathsf{A}(\mathsf{X}\phi\vee\mathsf{X}\psi)$ は論理式ではない）．

加えて，g がエージェント群のとき，$\mathsf{E}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)$，$\mathsf{E}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi)$，$\mathsf{E}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi)$ は各々 $\bigwedge_{i\in g}\mathsf{BEL}_i(\phi)$，$\bigwedge_{i\in g}\mathsf{DESIRE}_i(\phi)$，$\bigwedge_{i\in g}\mathsf{INTEND}_i(\phi)$ の略記（たとえば $\mathsf{E}\text{-}\mathsf{BEL}_{\{i_1,i_2\}}(\phi)$ は $\mathsf{BEL}_{i_1}(\phi)\wedge\mathsf{BEL}_{i_2}(\phi)$ の略記）とし，$\mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)$，$\mathsf{M}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi)$，$\mathsf{M}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi)$ はそれぞれ $\mathsf{E}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi))$，$\mathsf{E}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi))$，$\mathsf{E}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi))$ の略記とする（M-BEL と $\hat{\mathsf{M}}$-BEL は別のオペレータであり，違いについては 2.2 節で述べる）．直感的には，$\mathsf{BEL}_i(\phi)$ は「エージェント i が ϕ を信じる」，$\mathsf{E}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)$ は「エージェント群 g に属する各エージェントが ϕ を信じる」（Everyone's belief），$\mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)$ は「エージェント群 g が ϕ という相互信念を持つ」（Mutual belief）を表す．DESIRE や INTEND についても同様である．なお，エージェントやエージェントの集合を表す変数，およびそれらの quantifier は現時点では導入していない．

必要に応じて括弧で曖昧さを除去する．括弧がない場合の演算子の結合順位は，単項論理記号（$\neg$, AX など），$\wedge$，$\vee$，$\supset$ の順に先に結合するものとし，さらに，$\wedge$，$\vee$ は左結合とする．

2.2 相互心的状態

BEL，DESIRE，INTEND はそれぞれ，エージェントの信念·願望·意図を表すオペレータである．しかし，相互心的状態を表現するには，これらの心的状態オペレータの「無限のネスト」に相当するものを扱える必要がある．

たとえば，剛が明と 14 時に駅で落ち合う約束をしていたが，待合せ時刻を 15 時に変更したい場合を考えよう．剛は携帯で「15 時に変更しよう」と明にメールする．しかし，（メールの事故など何らかの理由で）明がそれを読み損なう可能性があるので，これでは剛は待合せ時刻が変わったという信念を持つことはできない．

では，明からの「了解」の返事を剛が受け取った場

合はどうか．しかし，明は「私からの了解の返事を剛は読み損なっているかもしれない」と考えて 14 時に駅へ行くかもしれない，と剛が考えると，やはり剛は待合せ時刻の変更が成立したという信念を持てない．さらに,「了解」の返事が両者間で何回往復しても，それが有限回である限り，結局同様のことが起こる．すなわち，変更成立の相互信念を持つには,「相手が了解した」という信念の無限のネストが必要となる．

M-BEL ほかのオペレータは，そのような相互心的状態を表現するために導入されたものである．たとえば $\text{M-BEL}_{\{i_1,i_2\}}(\phi)$ は，エージェント i_1 と i_2 がともに ϕ を信じ，さらに両エージェントは，それら信念を相互に信じ，さらに両エージェントは $\cdots$ という相互信念を表す．

3 章で導入する意味論では，M-BEL，M^-BEL などのオペレータは以下のような性質を持つ☆．

$$\text{M-BEL}_g(\phi) \Leftrightarrow \text{E-BEL}_g(\phi \wedge \text{M-BEL}_g(\phi)) \quad (1)$$
$$\text{M-BEL}_g(\phi) \Leftrightarrow \text{E-BEL}_g(\hat{\text{M}}\text{-BEL}_g(\phi)) \quad (2)$$
$$\hat{\text{M}}\text{-BEL}_g(\phi) \Leftrightarrow \phi \wedge \text{M-BEL}_g(\phi) \quad (3)$$

特に，通常「相互信念」とは式 (1) で特徴付けられる M-BEL の方を指す[4)]．しかし本体系では，M^-BEL ほかを primitive なオペレータとして導入し，M-BEL ほかを略記として導入している．

これは以下の理由による．3 章で導入する $\mathcal{MA}$ $(\text{B}^{KD45}\text{D}^{KD}\text{I}^{KD})_{CTL}$-structure において，AG（これは EU を用いた略記で導入される）は，AX に対応する可視関係 R_w の閉包に対応しており，文献 14) ではこれを用いて，AU/EU を持つ論理式の証明に導出のループを導入することによって演繹体系を構築している．一方，M^-BEL と BEL にも同様の関係があり，このことを用いれば，文献 14) と同様の手法で M^-BEL などに関する推論規則を導入したり，健全･完全性の証明を行ったりできる利点がある．このために本論文では M^-BEL の方を primitive として導入している．

3. 意　味　論

本章では，2.1 節で与えた logic の意味論を与える．

3.1 $\mathcal{MA}(\text{B}^{KD45}\text{D}^{KD}\text{I}^{KD})_{CTL}$-structure

以下のものを定めておく．

- 可能世界の集合 $W (\neq \emptyset)$
- W の各要素 w に対して，state の集合 $St_w (\neq \emptyset)$ と，その上の serial な関係 $R_w \subset St_w \times St_w$
- W の各要素 w と St_w の要素 t の組に対し，命題記号への真偽値割当て $L(w,t) \subseteq P$
- Gr の各要素 i に対し，W，$\bigcup_{w \in W} St_w$，W 上の 3 項関係 $\mathcal{B}_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{I}_i \subset W \times \bigcup_{w\in W} St_w \times W$ で，以下の条件を満たすもの
  - $(w,t,w') \in \mathcal{B}_i$ かつ $t \in St_w$ ならば $t \in St_{w'}$
  - $(w,t,w') \in \mathcal{D}_i$ かつ $t \in St_w$ ならば $t \in St_{w'}$
  - $(w,t,w') \in \mathcal{I}_i$ かつ $t \in St_w$ ならば $t \in St_{w'}$

このとき，tuple $M = \langle W, \{St_w \mid w \in W\}, \{R_w \mid w \in W\}, L, \mathcal{B}_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{I}_i \rangle$ を $\mathcal{MA}\text{BDI}^K_{CTL}$-*structure*（Multi-Agent BDI structure）と呼ぶ．

また，それがさらに以下の条件を満たすとき $\mathcal{MA}$ $(\text{B}^{KD45}\text{D}^{KD}\text{I}^{KD})_{CTL}$-*structure* と呼ぶ．以後，本論文では簡単のため $\mathcal{MA}(\text{B}^{KD45}\text{D}^{KD}\text{I}^{KD})_{CTL}$-structure のみ扱う．

- (**B-*D***)$\cdots$ 各 $\mathcal{B}_i$ は serial （すなわち，各 $w, t \in St_w$ に対し，$(w,t,w') \in \mathcal{B}_i$ となる w' が存在する）
- (**D-*D***)$\cdots$ 各 $\mathcal{D}_i$ は serial
- (**I-*D***)$\cdots$ 各 $\mathcal{I}_i$ は serial
- (**B-*4***)$\cdots$ 各 $\mathcal{B}_i$ は transitive （すなわち，$(w,t,w') \in \mathcal{B}_i$ かつ $(w',t,w'') \in \mathcal{B}_i$ ならば $(w,t,w'') \in \mathcal{B}_i$）
- (**B-*5***)$\cdots$ 各 $\mathcal{B}_i$ は Euclidean （すなわち，$(w,t,w') \in \mathcal{B}_i$ かつ $(w,t,w'') \in \mathcal{B}_i$ ならば $(w',t,w'') \in \mathcal{B}_i$）

大まかには，state は一般的な時相論理の「点時刻」に相当し，1 つの可能世界は時刻の集合からなる．$\mathcal{B}_i$，$\mathcal{D}_i$，$\mathcal{I}_i$ は，時刻ごとに定まる可能世界間の可視関係で，それぞれ信念･願望･意図を表す．

各 $\mathcal{B}_i$ が reflective であることは要請しない．これを要請すると，$\text{BEL}_i(\phi) \supset \phi$ が恒真となってしまうが，これは信念に関して我々が直感的に考える性質に合わないし，また，2 つのエージェントの信念が互いに矛盾するような状況（たとえばエージェント i が ϕ を，j が $\neg\phi$ を信ずる）を記述できなくなるといった弊害も起きるためである．

3.2 BDI logic の論理式の解釈と恒真性

$w \in W$ に対し，St_w に属する state の無限列 $(t_0, t_1, \cdots)$ であって，条件 $t_0\, R_w\, t_1$，$t_1\, R_w\, t_2, \cdots$ を満たすものを，t_0 から始まる w 上の *path* という．

また，$w_0 \in W$，$t \in St_{w_0}$ とエージェント群 g に対し，W に属する世界の無限列 $(w_0, w_1, \cdots)$ が条件

　ある $i_1, i_2, \cdots \in g$ が存在して，すべての非負整数 n に対して $(w_n, t, w_{n+1}) \in \mathcal{B}_{i_{n+1}}$

を満たすとき，この無限列を，w_0 から始まる t 上の

☆ ただし，式 (3) は M^-BEL の定義ではないことに注意．一方，式 (2) の右辺は本論文での M-BEL の（略記としての）定義であることは 2.1 節で述べたとおりである．

$\mathcal{B}_g$-*path* と呼ぶ☆．$\mathcal{D}_g$-path，$\mathcal{I}_g$-path も同様に定義する．

$\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure $M = \langle W, \{St_w \mid w \in W\}, \{R_w \mid w \in W\}, L, \{(\mathcal{B}_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{I}_i) \mid i \in Gr\}\rangle$ と世界 $w \in W$, state $t \in St_w$ に対し，論理式 ϕ が真である (($M, w, t) \models \phi$ と書く) ための条件を，以下のように定義する．

- ϕ が原子命題である ($\phi \in P$) 場合，$(M, w, t) \models \phi$ iff $\phi \in L(w, t)$
- $(M, w, t) \models \neg\phi$ iff $(M, w, t) \not\models \phi$
- $(M, w, t) \models \phi \vee \psi$ iff $(M, w, t) \models \phi$ または $(M, w, t) \models \psi$
- $(M, w, t) \models \mathsf{AX}\phi$ iff $t\,R_w\,t'$ なるすべての t' に対し $(M, w, t') \models \phi$
- $(M, w, t_0) \models \mathsf{A}(\phi \,\mathsf{U}\, \psi)$ iff
  t_0 から始まる w 上の任意の path $(t_0, t_1, \cdots)$ に対し，その中のある state t_i があって以下の条件を満たす：$(M, w, t_i) \models \psi$, かつ $0 \leq j < i$ なるすべての j に対し $(M, w, t_j) \models \phi$
- $(M, w, t_0) \models \mathsf{E}(\phi \,\mathsf{U}\, \psi)$ iff
  t_0 から始まる w 上のある path $(t_0, t_1, \cdots)$ とその中のある state t_i があって以下の条件を満たす：$(M, w, t_i) \models \psi$, かつ $0 \leq j < i$ なるすべての j に対し $(M, w, t_j) \models \phi$
- $(M, w, t) \models \mathsf{BEL}_i(\phi)$ iff $(w, t, w') \in \mathcal{B}_i$ なるすべての w' に対し $(M, w', t) \models \phi$
- $(M, w, t) \models \mathsf{DESIRE}_i(\phi)$ iff $(w, t, w') \in \mathcal{D}_i$ なるすべての w' に対し $(M, w', t) \models \phi$
- $(M, w, t) \models \mathsf{INTEND}_i(\phi)$ iff $(w, t, w') \in \mathcal{I}_i$ なるすべての w' に対し $(M, w', t) \models \phi$
- $(M, w_0, t) \models$ Mˆ-BEL$_g(\phi)$ iff
  w_0 から始まる t 上の任意の $\mathcal{B}_g$-path $(w_0, w_1, \cdots)$ と任意の $n \geq 0$ に対し $(M, w_n, t) \models \phi$
- $(M, w_0, t) \models$ Mˆ-DESIRE$_g(\phi)$ iff
  w_0 から始まる t 上の任意の $\mathcal{D}_g$-path $(w_0, w_1, \cdots)$ と任意の $n \geq 0$ に対し $(M, w_n, t) \models \phi$
- $(M, w_0, t) \models$ Mˆ-INTEND$_g(\phi)$ iff
  w_0 から始まる t 上の任意の $\mathcal{I}_g$-path $(w_0, w_1, \cdots)$ と任意の $n \geq 0$ に対し $(M, w_n, t) \models \phi$

たとえば $g = \{a, b\}$ のとき，**図 1** では w_0 および t で Mˆ-BEL$_g(\phi \vee \psi)$ が成り立っている．w_0 や，w_0 から B_a，B_b の任意の組合せで到達可能な世界のすべてにおいて，t で $\phi \vee \psi$ が成り立つためである．

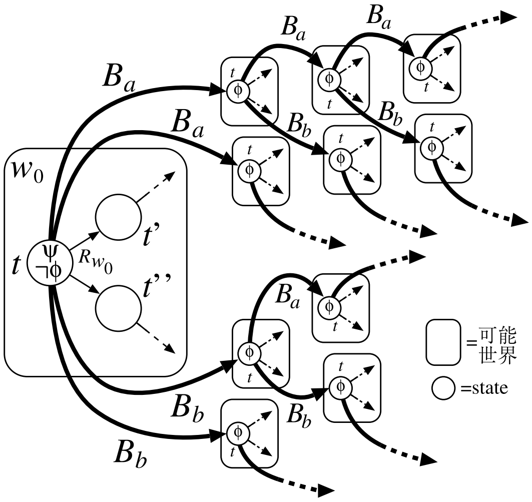

図 1 Mˆ-BEL の解釈
Fig. 1 Interpretation of Mˆ-BEL.

また，同図では w_0，t において M-BEL$_g(\phi)$ も成り立つ．w_0 から B_a あるいは B_b で 1 段階で到達可能な世界のすべてにおいて，t で Mˆ-BEL$_g(\phi)$ が成り立つためである．これはいい替えると，w_0 から B_a あるいは B_b で 1 段階で到達可能なすべての世界，またそれらからさらに 1 段階で到達可能なすべての世界，$\cdots$ のすべてにおいて，t で ϕ が成り立つということでもある．これは，文献 12) で M-BEL$_g(\phi)$ が E-BEL$_g(\phi)$, E-BEL$_g$(E-BEL$_g(\phi)$), $\cdots$ の無限の連言として導入されていることとも一致する．

なお，w_0，t において Mˆ-BEL$_g(\phi)$ は成り立たない．

論理式 ϕ が，すべての $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure M のすべての世界 w, state t に対し $(M, w, t) \models \phi$ を満たすとき，ϕ は $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-*valid* であるといい，$\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL} \models \phi$ と書く．誤解のおそれがない場合は，単に valid であるといい，$\models \phi$ と書く場合がある．

4. 演繹体系

本章では sequent calculus による演繹体系 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ を導入する．本体系では，sequent の $\rightarrow$ の両側は論理式の multi set である．以下，ギリシア大文字は論理式の multi set，ギリシア小文字は単一の論理式とし，また，論理式の multi set Γ と単項論理演算子 K に対し，$K(\Gamma)$ は Γ の各論理式に K を付加して得られる multi set を表す（K が Mˆ-BEL$_g$ などである場合も含む）．なお，文中で sequent の範囲を明示するために，sequent 全体を [ ] でくく

☆ $i_1, i_2, \cdots$ は g の要素をとりつくしているとは限らない点に注意．しかし，Mˆ-BEL$_g(\phi)$ の解釈の定義で，任意の $\mathcal{B}_g$-*path* 上の任意の世界で ϕ が成り立つことを要求しているので，これで支障はない．

$$\frac{\Gamma \to \phi, \Delta}{\neg\phi, \Gamma \to \Delta}\ (\neg\ 左) \qquad \frac{\phi, \Gamma \to \Delta \quad \psi, \Gamma \to \Delta}{\phi \vee \psi, \Gamma \to \Delta}\ (\vee\ 左) \qquad \frac{\phi, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \neg\phi, \Delta}\ (\neg\ 右) \qquad \frac{\Gamma \to \phi, \psi, \Delta}{\Gamma \to \phi \vee \psi, \Delta}\ (\vee\ 右)$$

$$\frac{\psi, \Gamma \to \Delta \quad \phi, \mathsf{AX\,A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}{\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}\ (\mathsf{AU}\ 左) \qquad \frac{\Gamma \to \psi, \phi, \Delta \quad \Gamma \to \psi, \mathsf{AX\,A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}{\Gamma \to \mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}\ (\mathsf{AU}\ 右)$$

$$\frac{\psi, \Gamma \to \Delta \quad \phi, \mathsf{EX\,E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}{\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Gamma \to \Delta}\ (\mathsf{EU}\ 左) \qquad \frac{\Gamma \to \psi, \phi, \Delta \quad \Gamma \to \psi, \mathsf{EX\,E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}{\Gamma \to \mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi), \Delta}\ (\mathsf{EU}\ 右)$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathsf{AX}(\Gamma) \to \mathsf{AX}(\Theta)}\ (\mathsf{AX}\text{–KD}) \qquad \frac{\Gamma, \mathsf{BEL}_i(\Gamma) \to \mathsf{BEL}_i(\Delta), \Theta, \mathsf{BEL}_i(\Theta)}{\mathsf{BEL}_i(\Gamma) \to \mathsf{BEL}_i(\Delta), \mathsf{BEL}_i(\Theta)}\ (\mathsf{BEL}\text{–KD45})$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathsf{DESIRE}_i(\Gamma) \to \mathsf{DESIRE}_i(\Theta)}\ (\mathsf{DESIRE}\text{–KD}) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\mathsf{INTEND}_i(\Gamma) \to \mathsf{INTEND}_i(\Theta)}\ (\mathsf{INTEND}\text{–KD})$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma, \Gamma' \to \Delta, \Delta'}\ (\text{Weak}) \qquad \frac{\phi, \mathsf{BEL}_{i_1}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)), \cdots, \mathsf{BEL}_{i_n}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)), \Gamma \to \Delta}{\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi), \Gamma \to \Delta}\ (\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}\ 左)$$

$$\frac{\Gamma \to \phi, \Delta \quad \Gamma \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)), \Delta \quad \cdots \quad \Gamma \to \mathsf{BEL}_{i_n}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi)), \Delta}{\Gamma \to \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\phi), \Delta}\ (\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}\ 右)$$

$$\frac{\phi, \mathsf{DESIRE}_{i_1}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi)), \cdots, \mathsf{DESIRE}_{i_n}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi)), \Gamma \to \Delta}{\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi), \Gamma \to \Delta}\ (\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}\ 左)$$

$$\frac{\Gamma \to \phi, \Delta \quad \Gamma \to \mathsf{DESIRE}_{i_1}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi)), \Delta \quad \cdots \quad \Gamma \to \mathsf{DESIRE}_{i_n}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi)), \Delta}{\Gamma \to \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\phi), \Delta}\ (\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}\ 右)$$

$$\frac{\phi, \mathsf{INTEND}_{i_1}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi)), \cdots, \mathsf{INTEND}_{i_n}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi)), \Gamma \to \Delta}{\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi), \Gamma \to \Delta}\ (\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}\ 左)$$

$$\frac{\Gamma \to \phi, \Delta \quad \Gamma \to \mathsf{INTEND}_{i_1}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi)), \Delta \quad \cdots \quad \Gamma \to \mathsf{INTEND}_{i_n}(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi)), \Delta}{\Gamma \to \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\phi), \Delta}\ (\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}\ 右)$$

（ただし，Θ はたかだか 1 つの論理式，$i \in Gr$, $g = \{i_1, \cdots, i_n\} \subset Gr$ とする）

図 2 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ の推論規則
Fig. 2 Inference rules for $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$.

ることがある．

4.1 推 論 規 則

推論規則は **図 2** にあげられたものである．この体系には cut はない．なお，簡単のため，本論文では文献 7) で導入した心的状態の整合性公理は扱わない．

名前に「左」「右」がつく規則は，逆向き（結論から前提へ）に見ると，→ のそれぞれ左か右のどれかの論理式 ϕ のトップレベルのオペレータを除去する役割を果たしている．これを，その規則の ϕ **に対する適用**と呼ぶ．また，以後，sequent に対する規則の「適用」も，特記のない限り逆向きの適用を意味する．

文献 14) と同様，結論より前提が大きい規則が存在するため，決定アルゴリズムとして Wang のアルゴリズムをそのまま用いることはできない．しかし，5.3 節に述べるように，ループが生じた時点で Wang のアルゴリズムの適用を打ち切り，かつ，一定の条件を満たすループを証明として認めることにより，AU，EU，M̂-BEL などのオペレータを持つ論理式の証明を行うことができ，かつ，証明可能性の判定を有限時間で行うことが可能になる．

4.2 証明可能性の定義

ここでは，演繹体系 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ における，sequent の証明可能性の定義を与える．以下，木のノードの「子孫」「祖先」にはそのノード自身も含むものとする．

定義 4.1 S を sequent とする．ある木の各ノードが 1 つの sequent をラベルとして持ち，根のラベルが S で，かつ葉以外の任意のノードが条件

N の子ノードが $N_1, \cdots, N_i$ であり，$N, N_1, \cdots, N_i$ のラベルがそれぞれ $S', S_1, \cdots, S_i$ であるなら，$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_i}{S'}$という推論規則が存在する

を満たすとき，この木を S の推論木と呼ぶ．

定義 4.2 S の推論木 T の葉でないノード N_0 から，その子孫の葉ノード L までの経路 $N_0, N_1, \cdots, N_n$ $(= L)$ が以下の条件

(1) N_0 と L は等しいラベルを持つ
(2) $N_1, \cdots, N_{n-1}$ のいずれも L と等しいラベルを持たない

をすべて満たすとき，この経路を**導出のループ**と呼ぶ．

定義 4.3 導出のループ $N_0, N_1, \cdots, N_n$ (N_n が葉) を，$(N_0, N_1, \cdots, N_n, N_0, \cdots)$ という輪と見たとき，これ

$$\dfrac{\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p\supset q),\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p)\to\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q)}{\mathsf{INTEND}_{i_1}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p\supset q)),\mathsf{INTEND}_{i_1}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p))\to\mathsf{INTEND}_{i_1}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q))}\ (\mathsf{INTEND}\text{–KD})$$

$$\uparrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma,\Gamma'\to q}\quad\dfrac{}{\Gamma,\Gamma'\to\mathsf{INTEND}_{i_1}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q))}\ (\text{Weak})\quad\dfrac{\vdots}{\Gamma,\Gamma'\to\mathsf{INTEND}_{i_2}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q))}}{\Gamma,\Gamma'\to\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q)}\ (\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}\text{右})}{\Gamma,\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p)\to\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q)}\ (\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}\text{左})}{▲\ \mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p\supset q),\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p)\to\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q)}\ (\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}\text{左})}{\dfrac{\vdots}{\to\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p\supset q)\wedge\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p)\supset\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q)}}$$

（ここで $\Gamma=\{p\supset q,\mathsf{INTEND}_{i_1}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p\supset q)),\mathsf{INTEND}_{i_2}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p\supset q))\}$,
$\Gamma'=\{p,\mathsf{INTEND}_{i_1}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p)),\mathsf{INTEND}_{i_2}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(p))\}$）

図 3 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ での証明例
Fig. 3 Example of proof in $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$.

が次のいずれかの条件を満たしていれば，このループを，**終局性論理式 ρ を持つ導出のループ**と呼ぶ．

- $\to$ の左のある論理式 $\rho=\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ が，AU 左の適用で $\mathsf{AX}\,\rho$ になっては AX–KD の適用で ρ に戻ることを繰り返している（ただし，$\to$ の左に ρ が k 個ある場合に，そのうちの k' 個 $(k>k')$ を Weak で消すことはかまわない．$\mathsf{AX}\,\rho$ についても同様．また以降の項目についても同様）
- $\to$ の左のある論理式 $\rho=\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$ が，EU 左の適用で $\mathsf{EX}\,\rho$ に，$\neg$ 左の適用で $\to$ の右の $\mathsf{AX}\,\neg\rho$ に，次いで AX–KD の適用で $\to$ の右の $\neg\rho$ になり，$\neg$ 右の適用で $\to$ の左の ρ に戻ることを繰り返している
- $\to$ の右のある論理式 $\rho=\mathsf{M\hat{}\text{-}BEL}_g(\phi)$ が，Mˆ-BEL 右の適用で $\mathsf{BEL}_i(\rho)$ になっては BEL–KD45 の適用で ρ に戻ることを繰り返している（$i\in g$，i は毎回異なってもよい）
- $\to$ の右のある論理式 $\rho=\mathsf{M\hat{}\text{-}DESIRE}_g(\phi)$ あるいは $\rho=\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)$ が，同様の条件を満たしている

たとえば 4.3 節の**図 3** において，▲で示されるノードから，真ん中の分岐の葉までの経路は，終局性論理式 $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q)$ を持つ導出のループになっている．

定義 4.4 sequent S が**証明可能**であるとは，以下の条件をすべて満たす S の推論木 T が存在することである．

（1） T のすべての葉は，導出のループの終点であるか，あるいは initial sequent（$\Gamma,\phi\to\Delta,\phi$ の形の sequent）をラベルとして持つ．

（2） T' のすべての導出のループを合わせたグラフ（導出のループに含まれるノードと枝すべてからなるグラフ）の各連結成分 T'（これは T の部分木でもある）に対し，ある論理式 ρ があって，T' に含まれる T の導出のループはすべて，終局性論理式 ρ を持つ．

演繹体系 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ において，sequent $[\to\ \phi]$ が証明可能なとき，論理式 ϕ が証明可能であるといい，$\vdash\phi$ と書く．

4.3 証明の例

図 3（$g=\{i_1,i_2\}$ とする）は，ループを持つような証明の例である．本質的な部分を見やすくするため，およびスペースの都合で，枝の一部を持ち上げ，また一部の過程を略した．図中には，共通の終局性論理式 $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(q)$ を持つ 2 つの導出のループがある．1 つは▲で示されるノードから真ん中の分岐の葉まで，もう 1 つは同ノードから右の分岐（略されているが，真ん中の分岐と同様）の葉までである．

5. 健全性・完全性

2.2 節で述べた，AX と AG の間の関係と，BEL と Mˆ-BEL の間の関係の類似性に着目すれば，$\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure に対する本体系の健全性や完全性は，ほぼ文献 14) と同じ方法で示せる．

5.1 健 全 性

sequent $S=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\to\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m]$ $(n\geq 0\leq m)$ に対し，論理式 $\neg\phi_1\vee\cdots\vee\neg\phi_n\vee\psi_1\vee\cdots\vee\psi_m$ （ただし $n=m=0$ のときは *false*）を，S に対応する論理式と呼ぶ．S に対応する論理式が (M,w,t) で真のとき，(M,w,t) で S が真であるといい，$(M,w,t)\models S$ と書く．特に，sequent S が valid であるとは，S に対応する論理式が valid であることと定義する．

空 sequent $[\to]$ をラベルに持つ 2 つのノード N_0，N_1 からなる導出のループを *trivial* **なループ**と呼ぶ．

補題 5.1 trivial でない導出のループの中では，推論規則 AX–KD，BEL–KD45，DESIRE–KD，INTEND–KD のいずれかが少なくとも 1 回適用されており，かつ，これらのうちたかだか 1 種類しか使われていない (ex. AX–KD と BEL–KD45 の両方が使われているようなことはない)☆．また，空 sequent は現れない．

証明 ある sequent に対し，AX–KD，BEL–KD45，DESIRE–KD，INTEND–KD 以外の規則のみを適用していくと，いつかは原子命題かトップレベルが AX，BEL，DESIRE，INTEND の論理式ばかりの sequent になって行き詰まり，trivial でないループは作れない．

また，ループ中に AX–KD と BEL–KD45 の両方があるとする．AX–KD の結論の sequent（これは空でない）中の論理式であって，サイズ（原始命題とオペレータの個数の合計）が最大のものを 1 つとり，それを AX ϕ とすると，以後各規則の順向きの適用で，この論理式は AX ϕ あるいは ϕ を部分論理式に持つ論理式に変化し（消されることはない），BEL–KD45 の順向き適用で，BEL の内部に AX ϕ あるいは ϕ を持つ論理式に変化する．ループを一周して，元の AX–KD を再度順向き適用すると，それらをさらに AX の中に持つ論理式が結論の sequent 内にできることになるが，これは AX ϕ のとり方に反する．よって，ループ中に AX–KD と BEL–KD45 の両方があることはない．ほかの組合せについても同様． □

定理 5.2 体系 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ は健全である．

証明 sequent S の推論木 T に含まれるすべての導出のループを合わせたグラフ G の連結成分の個数 j に関する帰納法で示す．$j = 0$ の場合は trivial なので，$j < k\,(k > 0)$ の場合を仮定して $j = k$ の場合を示す．

S が valid でないとする．すべての推論規則は，結論が valid でないなら前提のどれかが valid でない．したがって T の根から子へ，ラベルが valid でないノードを選んでたどっていくことができる．するといつかは，G のある連結成分 T' の根 R に着く．なぜなら，そうでないと導出のループの終点でない葉に着いてしまい，矛盾するからである．

T' に含まれる T の導出のループが共通に持つ終局性論理式を ρ とする．ρ は $\mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$，$\mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$，M^-BEL$_g(\phi)$，M^-DESIRE$_g(\phi)$，M^-INTEND$_g(\phi)$ のいずれかの形である．

$\rho =$ M^-INTEND$_g(\phi)$ とする．R からさらに子へ，ラベルが valid でないノードを選んでたどっていく．このとき T' の外に出ることはない．なぜなら，R の子孫のうち T' に属さないノードのラベルは，帰納法の仮定から valid だからである．

するといつかは，あるノード N' とその子ノードの間で，ρ に対する M^-INTEND 右が適用されている箇所に着く．

N' のラベルを $S' = [\Gamma \rightarrow$ M^-INTEND$_g(\phi), \Delta]$ とし，それを結論とする M^-INTEND 右の前提のうち valid でないものを $S_1 = [\Gamma \rightarrow$ INTEND$_{i_1}$ (M^-INTEND$_g(\phi)), \Delta]$，$\cdots$，$S_k = [\Gamma \rightarrow$ INTEND$_{i_k}$ (M^-INTEND$_g(\phi)), \Delta]$ とする．$\Gamma \rightarrow \phi, \Delta$ は定義 4.3 からループの外であり，したがって valid であるのでこの中には入らない．また，ある (M, w, t) が存在して $(M, w, t) \not\models S'$，$(M, w, t) \not\models \rho$，$(M, w, t) \models \phi$，$(M, w, t) \not\models S_1$，$\cdots$，$(M, w, t) \not\models S_k$ である．

S_1 をラベルに持つ N' の子ノードを N_1 とする．補題 5.1 より，N_1 からその子ノードへの過程で使われている推論規則は AX–KD，BEL–KD45，DESIRE–KD 以外のいずれかである．それが INTEND–KD 以外であれば，$(M, w, t) \not\models S'_1$ を満たすラベル S'_1 を持つ N_1 の子ノード N'_1 が存在する．また，INTEND–KD であれば，N_1 の唯一の子ノード N'_1 のラベル S'_1 に対して，$w\,\mathcal{I}_{i_1}\,w'$ かつ $(M, w', t) \not\models S'_1$ となる w' が存在し，かつ，$w\,\mathcal{I}_{i_1}\,w'$ を満たす任意の w' に対し，$(M, w', t) \not\models S'_1$ iff $(M, w', t) \not\models \rho$ となる．いずれの場合も N_1 は T' の中にある．

以下，N_1 から N'_1 への過程と同様にして，N'_1 からそのある子ノード N''_1 へ，さらにその子ノードへ $\cdots$ とたどることを繰り返し，T の葉（T' の葉でもある）にたどり着いたら，それと同じラベルを持つ T' の（葉でない）ノードに戻ってさらに続けていく．このとき，S_1 の $\rightarrow$ の右の INTEND$_{i_1}(\rho)$ は，INTEND–KD を適用されて ρ に戻っては，M^-INTEND 右の適用で INTEND$_{some}(\rho)$ に変わることを繰り返す．

$S_2, \cdots, S_k$ に対しても同様の議論が可能である．したがって，t 上のどの $\mathcal{I}_g$-path $w, w', \cdots$ においても，ずっと ρ が偽かつ ϕ が真であるか，あるいはどこかで ρ が真になる．これは $(M, w, t) \not\models \rho$ に反する．

$\rho = \mathsf{A}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$，$\rho = \mathsf{E}(\phi\ \mathsf{U}\ \psi)$，$\rho =$ M^-BEL$_g(\phi)$ あるいは $\rho =$ M^-DESIRE$_g(\phi)$ の場合も同様である．特に，前 2 者の場合は文献 14) と同じである．以上から，S は valid である． □

5.2 完 全 性

本章では体系 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ の完全性を示す．これは，証明可能でない sequent に対し，それを偽とする $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure を構築

☆ ただし，DESIRE$_i$ に対する DESIRE–KD と DESIRE$_j$ に対する DESIRE–KD の両方が使われる $(i \neq j)$ ような可能性はあることに注意．

できることを示すことで行う．

以後，ある sequent S に対し，以下の操作を行うことを「手順 A」と呼ぶ．

S に，$\neg$/$\vee$/AU/EU/M^-BEL/M^-DESIRE/M^-INTEND 左·右を可能な限り適用する．次いで，得られた各 sequent の $\rightarrow$ の左どうしあるいは右どうしに同じ論理式が複数回現れていれば，Weak でそれを 1 つに減らす．

また，ある sequent S に対し，以下のいずれかの操作を行うことを「手順 B」と呼ぶ．

(1) Weak を用いて，$\rightarrow$ の左ではトップレベルが AX の論理式以外をすべて消す．$\rightarrow$ の右では，トップレベルが AX の論理式があれば，そのうち 1 つを残して他を消し，そうでなければすべて消す．
次いで AX–KD を適用する．

(2) ある $i \in Gr$ に対し，Weak を用いて，$\rightarrow$ の左右それぞれについて，トップレベルが BEL_i の論理式すべてを残し，他を消す．
続いて BEL–KD45 を適用する．その際，$\rightarrow$ の右が空なら Δ, Θ を空とし，そうでなければ $\rightarrow$ の右のうち 1 つを Θ，それ以外を Δ と置く．

(3) ある $i \in Gr$ に対し，Weak を用いて，$\rightarrow$ の左ではトップレベルが DESIRE_i の論理式以外をすべて消す．$\rightarrow$ の右では，トップレベルが DESIRE_i の論理式があれば，そのうち 1 つを残して他を消し，そうでなければすべて消す．
次いで DESIRE–KD を適用する．

(4) INTEND について (3) と同様のことを行う．

さらに，論理式 ϕ' が ϕ の準部分論理式であるとは，ϕ' が，以下を満たす最小の集合 Q の要素であることと定義する（Q が有限集合であることに注意）．

- $Q \ni \phi$
- $Q \ni \psi$ かつ ψ' が ψ の部分論理式ならば $Q \ni \psi'$
- $Q \ni \mathsf{A}(\psi \,\mathsf{U}\, \xi)$ ならば $Q \ni \mathsf{AX}\,\mathsf{A}(\psi \,\mathsf{U}\, \xi)$
- $Q \ni \mathsf{E}(\psi \,\mathsf{U}\, \xi)$ ならば $Q \ni \mathsf{EX}\,\mathsf{E}(\psi \,\mathsf{U}\, \xi)$
- $Q \ni \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\xi)$ かつ $i \in g$ ならば $Q \ni \mathsf{BEL}_i(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\xi))$
- $Q \ni \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\xi)$ かつ $i \in g$ ならば $Q \ni \mathsf{DESIRE}_i(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{DESIRE}_g(\xi))$
- $Q \ni \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\xi)$ かつ $i \in g$ ならば $Q \ni \mathsf{INTEND}_i(\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{INTEND}_g(\xi))$

5.2.1 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure の構築

S を，証明可能でない sequent とする．なお，Gr を S に現れるエージェントの集合に限定しても，以降の議論に悪影響はないので，本章では以降そうする．

まず，S に対し，以下の条件 A を満たすような有限木 T を作る．

[条件 A]

(1) 各ノードは第 1·第 2 ラベルを持つ．ラベルはいずれも 1 つの sequent．

(2) 根の第 1 ラベルは S．根以外のノード（N とする）の第 1 ラベルは，N の親（M とする）の第 2 ラベルに対し手順 B を適用して得られたもののうち 1 つ（このとき，Weak によってトップレベルが BEL_i の論理式を残しているなら，N を M の BEL_i 子と呼ぶ．AX 子，DESIRE_i 子なども同様に定義する）．

(3) 各ノードの第 2 ラベルは，第 1 ラベルに手順 A を適用して得られる sequent で，証明可能でないもののうち 1 つ．

(4) 各枝には 1 つのタグが付く．あるノードからその BEL_i 子への枝には BEL_i というタグが付き，AX 子などの場合も同様．

(5) あるノード N の子 M，M' で，第 2 ラベルが等しく，かつ N から M，M' への枝のタグが等しいようなものは存在しない．

(6) あるノード N が葉であるなら，N のある祖先 $M\,(\neq N)$ で，第 2 ラベルが N と等しいものが存在する（この場合，M を N の**ループ源**，M から N までの経路を**ループ経路**という）．

(7) 葉でないどのノードにも，以上の条件を満たす範囲で可能な限り多くの子ノードが存在する．

補題 5.3 S を与えたとき，条件 A を満たす木のノードの第 2 ラベルとして可能な sequent は有限個しか存在しない．

証明 S' がそのような木のあるノードの第 2 ラベルであるならば，S' に含まれうる論理式は，S に含まれる論理式の準部分論理式のみであり，かつ，S' の ‘$\rightarrow$’ の左どうしや右どうしに同じ論理式はない． □

補題 5.4 有限木 T は有限の手間で必ず作ることができる．

証明 条件 A を満たすようになるべく多くの枝を根から伸ばしていき，祖先（自分以外の）と同じ第 2 ノードを持つノードについては，それ以上枝を伸ばすのをやめればよい（第 2 ラベルとして可能な sequent は補題 5.3 より有限個であること，どのノードの子も有限個しか存在しえないこと，および，ループ源でないノードに対しては，AX 子や BEL_i 子などを必ず 1 つ以上作れることに注意）． □

以上の過程は，文献 14) の 6 章で有限木を構築する過程とほぼ同じであるが，あるノードの AX 子以外に

ついても，第 1 ラベルから項目 3 の過程で得られる証明可能でないすべての sequent について，それを第 2 ラベルとする子ノードを作る（項目 7）点が異なる．

なお，明らかに以下の補題が成り立つ．

補題 5.5 $\mathcal{T}$ の任意のノード N の第 1 ラベル S と第 2 ラベル S'，および任意の $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure M とその世界 w，state t に対し，もし $(M, w, t) \not\models S'$ ならば $(M, w, t) \not\models S$ である． □

以上のようにして作った $\mathcal{T}$ に対し，以下の性質 B を満たす $\mathcal{T}'$ が必ず存在する（証明は文献 14) の 6 章中の「AX ループの融合」の箇所と同じ）．ただし，$\mathcal{T}'$ においては，ある葉 N のループ源とは，N と同じ第 2 ラベルを持つ N の祖先ノードのうち，最も根に近いものをいう．

[性質 B]

(1) 条件 A のうち項目 7 以外はすべて満たす．また，AX 子以外の子については項目 7 も満たす．

(2) あるノード N が葉でないなら，N の第 2 ラベルに手順 B の項目 1 を適用して得られる各 sequent に対して，それを第 1 ラベルに持つ N の AX 子が 1 つ以上存在する．

(3) タグ AX の枝のみからなる任意のループ経路 r に対し，以下の条件を満たす $\mathcal{T}$ の部分木 ℓ が存在する．

- ℓ は，$\mathcal{T}$ のタグ AX の枝のみからなるループ経路 1 つ以上を合わせてできる木である．
- ℓ に属する兄弟ノードどうしの第 1 ラベルは等しい．
- ℓ は以上を満たす木の中で（包含関係で）極大である．
- ℓ の各ノードに対し，それと第 1·2 ラベルの等しい r のノードが存在する．

以下，この $\mathcal{T}'$ を改めて $\mathcal{T}$ とおく．また，この置き換え操作を「AX ループの融合」と呼ぶ．

次に，$\mathcal{T}$ に次の条件

- N'，N'' は N の子であり，$N' \neq N''$ で，N' と N'' の第 1 ラベルは等しく，N から N' への枝と N'' への枝のタグは等しい．
- N から N' への枝はどのループ経路にも含まれない．

を満たすノード N，N'，N'' がある限り，N''（とその子孫）を $\mathcal{T}$ から削除する．この操作は性質 B を崩さない．この操作を「modal 枝の枝刈り」と呼ぶ（文献 14) の 6 章中の「AX 枝の枝刈り」に相当するが，AX 以外にも行うところが異なる）．

ここで，各 $i \in Gr$ に対し，ノード M からタグ BEL_i の枝のみを 0 回以上たどって（葉に着いたらそのループ源に移って続行できるとする）ノード N に行けるとき，$M \overset{i}{\rightsquigarrow} N$ と書くことにする．すると，任意の $i \in Gr$ と任意のノード M に対し，ノードの集合 Ns があって，以下を満たす．

- ある $N \in Ns$ があって $M \overset{i}{\rightsquigarrow} N$．
- $N \in Ns$, $N' \in Ns$ かつ $N \overset{i}{\rightsquigarrow} N'$ ならば $N' \overset{i}{\rightsquigarrow} N$．

また，そのような Ns に属する各ノードの，第 2 ラベルの $\rightarrow$ の左右にあるトップレベルが BEL_i の論理式の集合は，すべて等しい．これは，タグ BEL_i の枝をたどる過程では，トップレベルが BEL_i の論理式の集合は，単調非減少であることによる．

そこで，各 $i \in Gr$ と $\mathcal{T}$ の各ノード M とに対し，上を満たす Ns を 1 つとり，M からのタグ BEL_i の枝をすべて削除して，代わりに Ns のすべての要素へ M からタグ BEL_i の枝を新設する．この作業は，各 $i \in Gr$ および各 M に対して同時並行で行う．この過程を「BEL 枝の再構築」と呼ぶ．文献 14) の 6 章中の同名の過程にほぼ相当するが，各 i に対して行うこと，またこのため $\mathcal{T}$ は必ずしも木でなくなる点などが異なる．また，この操作によって，あるノードには入る枝がなくなる場合があるが，そのようなノードの削除は後に行う．

次いで，BEL 枝の再構築の直前の段階で葉であったようなノード N に対し，N への枝をすべて，N のループ源であったノードに向けて付け替える．また，各 $i \in Gr$ について，タグ BEL_i の枝が推移性および Euclidean 性（3.1 節の (**B-*4***), (**B-*5***) に相当）を満たすのに必要なだけ，それらの枝を増やす．これらが完全性の証明に悪影響を与えないことは，補題 5.5, および，BEL 枝の再構築を行っておいたことによって保証される．その後，入る枝がもはやないノードをすべて削除する．

以上が済めば，$\mathcal{T}$ の各ノードに対して，それに対応する世界と state のペア (w, t) を作り，タグ AX の枝で結ばれるノードどうしは同じ世界の異なる state, その他の枝で結ばれるノードどうしは異なる世界の同じ state に対応するようにする（これが可能なことは補題 5.1 で保証される）．さらに，タグ AX の枝に応じて関係 R_w，タグ BEL_i などの枝に応じて関係 $\mathcal{B}_i$ などを定め，また，各ノードの第 2 ラベルの $\rightarrow$ の左にある原始命題が，そのノードに対応する世界と state で真（それ以外の原始命題は偽）になるように，$\mathcal{MA}$ $(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure を作る．

5.2.2 完全性の証明

定理 5.6 体系 $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$ は完全である．

証明 以下，$\mathcal{T}$ の各ノードを，それに対応する世界と state のペア (w,t) と同一視する．5.2.1 項の手順で作られた $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure M とグラフ $\mathcal{T}$ が以下の性質を持つことを示せば十分である．

> $St_w \ni t$ を満たす任意の w，t に対し，$\mathcal{T}$ のノード (w,t) の第 1・第 2 ラベルの sequent の → の左の論理式は (M,w,t) で真，→ の右の論理式は (M,w,t) で偽である．

これを示すには，sequent の → の左右に現れる論理式の構造に関する帰納法を，M のすべての state に対して同時並行で適用すればよい．特に，$\mathsf{A}(\phi\,\mathsf{U}\,\psi)$，$\mathsf{E}(\phi\,\mathsf{U}\,\psi)$ に関しては文献 14) と同じである（この部分は，AX ループの融合が行われていることに依存する）．$\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)$ については以下のように示せる．

- → の左の $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)\cdots$ この論理式に対し，$\mathcal{T}$ の作成過程で (w,t) の第 1 ラベルから第 2 ラベルに至るまでのどこかで M^-INTEND 左が適用されている．その前提のうち ϕ は帰納法の仮定から (M,w,t) で真．また，$w\mathcal{I}_i w'$ を満たす任意の $i\in g$ と w' に対し，$\mathcal{T}$ のノード (w',t) の作成過程で → の左に再度 $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)$ が現れるので，これに同様の議論を適用して，ϕ は (M,w',t) でも真，さらに $w'\mathcal{I}_{i'}w''$ を満たす任意の i' と (w'',t) に対して以下同様の議論を繰り返すことにより，結局 w_0 から始まる t 上のすべての $\mathcal{I}_g$-path でずっと ϕ が真となる．したがって (M,w,t) で $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)$ は真.
- → の右の $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)\cdots$ いま，これが真だと仮定する．この論理式に対し，$\mathcal{T}$ の作成過程で (w,t) の第 1 ラベルから第 2 ラベルに至るまでのどこかで M^-INTEND 右が適用されている．その次の sequent が M^-INTEND 右の前提の一番左だとすると，帰納法の仮定から ϕ が (M,w,t) で偽となり矛盾するので，次の sequent は，ある i_1 があって $[\Gamma\to\mathsf{INTEND}_{i_1}(\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)),\Delta]$ の形である．したがって，→ の右に $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)$ を持つある sequent S' と，$w\mathcal{I}_{i_1}w'$ を満たすある w' があって，w' の第 1 ラベルが S' である．また，そのような任意の w' に対し，(w',t) で $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)$ は真である．
  そこで，そのような w' のそれぞれについて，同様の議論を繰り返すことにより，S' には，終局性論理式 $\mathsf{M\hat{}\text{-}INTEND}_g(\phi)$ を持つ導出のループからなる連結成分 T' を持つ推論木が存在する．しかも，その推論木のうち，T' の外へ行く部分は，それに相当する部分が $\mathcal{T}$ になかった（さもなければ，modal 枝の枝刈りによって，ループの方が切られているはずである）ので，証明可能であることになる．すると，定義 4.4 から S' は証明可能であったことになり，矛盾する．

また，$\mathsf{M\hat{}\text{-}BEL}_g(\phi)$, $\mathsf{M\hat{}\text{-}DESIRE}_g(\phi)$ についても同様である（→ の右の $\mathsf{M\hat{}\text{-}BEL}_g(\phi)$ については，BEL 枝の再構築が行われているため，$\mathcal{T}$ において BEL_i でない枝が入るノードから BEL_i のみでたどる過程を，推論木中の手順 B の項目 (2) および手順 A のみの適用からなる過程に対応させることができることに注意）． □

5.3 判定アルゴリズムと処理系

判定アルゴリズムは，5.2.1 項での $\mathcal{MA}(\mathrm{B}^{KD45}\mathrm{D}^{KD}\mathrm{I}^{KD})_{CTL}$-structure の構築手順とほぼ同様のものを，証明可能かどうかまだ分からない sequent にも適用することで得られる．

まず，与えられた sequent S に 5.2 節の手順 A を適用する．この結果得られる sequent のうち，様相オペレータを持たないか，S からの過程ですでに現れている sequent と同じものについては何もしない．そうでないもののそれぞれに対しては，手順 B を適用し，次いで，得られた各 sequent に対し，同様の操作を繰り返す．

こうして，定義 4.4 の条件を満たす推論木が作れれば S は証明可能である．また，できなければ，有限の手間でこの操作は行き詰まり，証明可能でないと分かる．現在，このアルゴリズムを Prolog でインプリメントした処理系が動作している☆．

CTL の充足可能性の決定問題が，論理式の大きさに対して決定性指数時間完全であることはすでに知られているので[2]，本アルゴリズムをはじめ，BDI logic あるいはその拡張の決定アルゴリズムの複雑さもそれを下回ることはない[15]．しかし，実際的な例において十分短い時間で本アルゴリズムが実行できる処理系が作成できれば，有用性はあると考えられる．ただし，実際の処理系の動作効率の改善については，現在，検討を継続中である．

6. 例

6.1 Joint Commitment と Joint Ability

本章では，エージェント間のコミュニケーションや

☆ ftp://ftp.ics.nara-wu.ac.jp/~nide/research/mbdi-1.01.tgz に置かれている．

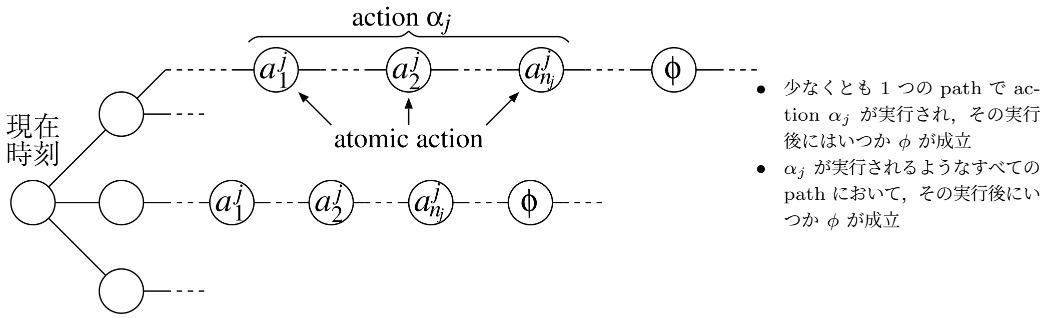

図 4　(Achvs α_j ϕ) の単純化
Fig. 4　Simplifying (Achvs α_j ϕ).

協調などに関する性質の記述や証明の例を示す．

文献 12) の 6 章では，本論文の M-BEL などと同じものを用いて，joint commitment や social convention など合理的エージェントの間の協調行為にかかわる様々な概念を記述している．たとえば，エージェント群 g が ϕ に対して blind social commitment を持つことを表す論理式 (Team_{blind} g ϕ) ☆を同書では

$$\bigwedge_{i\in g}(\neg\,\text{BEL}_i(\phi)\wedge$$
$$\text{A}(\text{INTEND}_i(\phi)\wedge(\text{BEL}_i(\phi)\supset\text{A}(\text{INTEND}_i(\chi_1)\ \text{U}\ \chi_1))\ \text{U}\ \chi_1))$$
$$\text{ここで}\ \chi_1=\text{M-BEL}_g(\phi)$$

と定義している．この式を ψ とおき，$i_1, i_2 \in g$ としたとき，$\psi \supset \text{A}(\text{INTEND}_{i_1}(\phi)\ \text{U}\ \text{BEL}_{i_2}(\phi))$ は本体系で証明可能な論理式の 1 つである．これは「g が ϕ に対する blind commitment を持つなら，i_1 は少なくとも i_2 が ϕ を信じるまでは ϕ を意図する」を表す．このような例を扱うには，個別エージェントの意図や信念，エージェント群の相互信念や，その時間変化を扱える能力が必要となる．

Pentium IV 2.4 GHz，メモリ 256 MB の PC 上の Linux 2.4.20 上で稼働する SWI-Prolog 5.0.0 で，5.3 節で述べた処理系を用いて，$g = \{i_1, i_2\}$ の場合のこの式の証明に 7.78 秒を要した．実際の証明は略する．

もう 1 つの例として，joint ability に関する推論の例をあげる．この概念は，文献 12) の 8 章で，協調が起こる可能性の記述のために導入されている．

同書ではまず,「g は action α を行うエージェント群である」を表す論理式 (Agts α g) と,「α は ϕ に適した plan である」を表す論理式 (Achvs α ϕ) を導入する．前者は primitive に近いが，後者は「少なくとも 1 つの未来で，action α が実行され，その後いつか ϕ が成り立つ」と「action α が実行されるようなすべての未来において，その後にはいつか ϕ が成り立つ」の and として定義される（詳細略）．次いで 0 階の joint ability（エージェント群 g は何らかの action によって直接に ϕ を達成できる）を表す論理式 (J-Can^0 g ϕ) を

$$\exists\alpha\ \text{M}\hat{}\text{-BEL}_g((\text{Agts}\ \alpha\ g)\wedge(\text{Achvs}\ \alpha\ \phi))$$

で☆☆，また k 階の joint ability ($k > 0$) を (J-Can^k g ϕ) ≡ (J-Can^{k-1} g (J-Can^0 g ϕ)) で定義している．

これらの定義やその意味論には，action の構造（連接･選択･反復）に関する帰納法や，action に関する quantifier が使われている．同書では action の扱いに関して，ほぼ dynamic logic [6] 相当の記述力を導入していることが，それを可能にしている．しかし，残念ながら現在のところ我々の体系にはそのようなものが導入されていないため，任意の action expression に関する表現を行うことがまだできない．そこで，若干の単純化のための仮定を置く．

まず，エージェントが実行可能なすべてのプランは α_1, α_2, $\cdots$, α_ℓ と列挙可能であり，各 α_j は atomic action a_1^j, a_2^j, $\cdots$, $a_{n_j}^j$ を単にこの順に実行するものであるとする．また，atomic action a を，その action の実行直後の時間に原子命題 a が成り立つことと同一視する．すると，(Achvs α_j ϕ) を以下のものの略記ととらえることができる（**図 4**）☆☆☆.

☆ 同書では (Team_{blind} g ϕ ψ) と表記されているが，定義に ψ は使われていない．

☆☆ 同書には M^-BEL はないので，正確には同書では $\exists\alpha(\text{M-BEL}_g((\text{Agts}\ \alpha\ g)\wedge(\text{Achvs}\ \alpha\ \phi))\wedge(\text{Agts}\ \alpha\ g)\wedge(\text{Achvs}\ \alpha\ \phi))$ で定義されている．なお，本論文にもあるが同書と表記が異なるオペレータについては，本論文での表記を用いた．

☆☆☆ EX や AX があるのは，ここでは action を atomic action の単純な連接（ただし連続する 2 つの atomic action の間に時間が空いてもよい）に単純化していることと，atomic action を，その action の実行直後の時間に成り立つ原始命題と同一視していることによる．複数の atomic action の同時実行も考慮するのであれば，EX や AX を適宜取り去ればよいが，そうしても以下の議論に本質的影響はない．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathsf{BEL}_{i_1}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)), \text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi), (\text{J-Can}^k\ g\ \phi)} \qquad \dfrac{\mathsf{BEL}_{i_1}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)), \text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi), \psi}{\mathsf{BEL}_{i_1}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)), \text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi), \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi)}\ (\text{BEL–KD45, Weak, M\^{}-BEL 左}) \quad \cdots}{\mathsf{BEL}_{i_1}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)), \text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi), \psi}\ (\text{M\^{}-BEL 右})$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{BEL}_{i_1}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)), \text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi), \psi}{\xi_1, \mathsf{BEL}_{i_1}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)), \mathsf{BEL}_{i_2}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi)}\ (\text{BEL–KD45, Weak})}{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi)}\ (\text{M\^{}-BEL 左})$$

$$\dfrac{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi) \qquad \dfrac{\vdots}{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{BEL}_{i_2}(\psi)}}{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \text{M-BEL}_g(\text{J-Can}^k\ g\ \phi)}\ (\text{M\^{}-BEL 右})$$

$$\dfrac{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \text{M-BEL}_g(\text{J-Can}^k\ g\ \phi) \qquad \dfrac{\vdots}{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_2) \to \text{M-BEL}_g(\text{J-Can}^k\ g\ \phi)} \quad \cdots}{\to (\text{J-Can}^k\ g\ \phi) \supset \text{M-BEL}_g(\text{J-Can}^k\ g\ \phi)}\ (\text{Classical})$$

$$(\text{ここで } \psi \equiv \text{M\^{}-BEL}_g(\text{J-Can}^k\ g\ \phi),\ \xi_j \equiv (\text{Agts}\ \alpha_j\ g) \wedge (\text{Achvs}\ \alpha_j\ (\text{J-Can}^{k-1}\ g\ \phi)))$$

図 5 joint ability に関する証明例（1）
Fig. 5 Proof of a property regarding joint ability (1).

$$\mathsf{EX\,EF}(a_1^j \wedge \mathsf{EX\,EF}(a_2^j \wedge \cdots (\cdots \wedge \mathsf{EX\,EF}(a_{n_j}^j \wedge \mathsf{EF}\,\phi)\cdots)\cdots)) \wedge$$
$$\mathsf{AX\,AG}(a_1^j \supset \mathsf{AX\,AG}(a_2^j \supset \cdots (\cdots \supset \mathsf{AX\,AG}(a_{n_j}^j \supset \mathsf{AF}\,\phi)\cdots)\cdots))$$

さらに，各 $(\mathsf{Agts}\ \alpha\ g)$ を原子命題として扱う．

以上の仮定を行うと，$(\text{J-Can}^0\ g\ \phi)$ は

$$\bigvee_{j=1}^{\ell} \text{M\^{}-BEL}_g((\mathsf{Agts}\ \alpha_j\ g) \wedge (\mathsf{Achvs}\ \alpha_j\ \phi))$$

の略記として導入できる（$k > 0$ の場合の $(\text{J-Can}^k\ g\ \phi)$ は上記のとおり）．するとたとえば，任意の特定の $k \geq 0$ とエージェント群 g に対する $(\text{J-Can}^k\ g\ \phi) \supset \text{M-BEL}_g(\text{J-Can}^k\ g\ \phi)$ や $(\text{J-Can}^k\ g\ \phi) \supset \mathsf{EF}\,\phi \wedge \text{M-BEL}_g(\mathsf{EF}\,\phi)$ などが証明可能である．これらは「エージェント群 g が，ϕ に関する k 階の joint ability を持つなら，① g はそのことを相互信念として持つ ② ϕ はある未来で達成可能であり，またそのことを g は相互信念として持つ」を意味する．このように，(単純化が必要という制限はあるものの）文献 12) で示されている，joint ability に関するいくつかの性質（同書では公理系は導入されていないので，恒真性のみ示している）の本質部分を証明することができている．**図 5**，**図 6** に $k > 0$, $g = \{i_1, i_2\}$ の場合のこれらの証明を示す．4.3 節で行ったような証明図の省略を，同様の理由でここでも行うほか，複数の推論規則の適用を適宜 1 つにまとめて示す．

さらに，$\text{M-BEL}_g(\text{J-Can}^k\ g\ \phi) \wedge \text{M-INTEND}_g(\phi)$ を $(\text{PreTeam}^k\ g\ \phi)$ と略記すると，これは「g は何らかの action によって $k+1$ 段階で ϕ を達成できるという相互信念を持ち，しかも ϕ を相互意図として持つ」を意味し，同書の PreTeam（team formation が起こるための条件）に近いことを表現できる．このとき，($i \in g$ として）たとえば $(\text{PreTeam}^k\ g\ \phi) \supset \text{M-BEL}_g(\mathsf{EF}\,\phi)$，あるいは $(\text{PreTeam}^k\ g\ \phi) \supset \mathsf{BEL}_i(\mathsf{EF}\,\phi) \wedge \mathsf{INTEND}_i(\phi)$ などが証明可能である．これらは「team formation が起きるならば，① g は ϕ が将来達成可能と信じている ② g 中のエージェント i は，ϕ が将来達成可能と信じており，かつ ϕ を意図している」を表す．これらの証明には，相互信念や相互意図を扱う能力を必要とする．

$$\dfrac{\vdots}{(\text{J-Can}^0\ g\ \phi) \to \mathsf{EF}\,\phi} \quad \dfrac{\vdots}{(\text{J-Can}^{k-2}\ g\ \phi) \to \mathsf{EF}\,\phi} \quad \dfrac{\vdots}{(\text{J-Can}^{k-1}\ g\ \phi) \to \mathsf{EF}\,\phi} \quad \dfrac{\vdots}{(\mathsf{Achvs}\ \alpha_1\ (\text{J-Can}^{k-1}\ g\ \phi)) \to \mathsf{EF}\,\phi}$$

$$\dfrac{(\mathsf{Achvs}\ \alpha_1\ (\text{J-Can}^{k-1}\ g\ \phi)) \to \mathsf{EF}\,\phi \qquad \dfrac{\vdots}{\mathsf{BEL}_{i_1}(\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1)) \to \mathsf{BEL}_{i_1}(\psi)} \quad \cdots}{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{EF}\,\phi \wedge \text{M-BEL}_g(\mathsf{EF}\,\phi)}\ (\text{Classical, M\^{}-BEL 左, Weak})$$

$$\dfrac{\text{M\^{}-BEL}_g(\xi_1) \to \mathsf{EF}\,\phi \wedge \text{M-BEL}_g(\mathsf{EF}\,\phi) \qquad \cdots}{\to (\text{J-Can}^k\ g\ \phi) \supset \mathsf{EF}\,\phi \wedge \text{M-BEL}_g(\mathsf{EF}\,\phi)}\ (\text{Classical})$$

$$(\text{ここで } \psi \equiv \text{M\^{}-BEL}_g(\mathsf{EF}\,\phi),\ \xi_j \equiv (\mathsf{Agts}\ \alpha_j\ g) \wedge (\mathsf{Achvs}\ \alpha_j\ (\text{J-Can}^{k-1}\ g\ \phi)))$$

図 6 joint ability に関する証明例（2）
Fig. 6 Proof of a property regarding joint ability (2).

6.2 Nested Belief

相互信念のオペレータを，信念のネストを記述するために用いる例として，よく知られた muddy children 問題を取り上げる．この問題には，エージェント（子供）同士の協調のような現象は明示的には現れないが，他のエージェントの信念（に関する自分の信念）を推論のために使わなければならない点で，マルチエージェント環境における推論に本質的な性質のうちの重

$$
\begin{array}{cl}
\vdots & \\
\hline
\bigvee_{j=1}^{4} m_j, \neg m_2, \neg m_3, \neg m_4 \to m_1 & \\
\hline
\rho, \neg m_2, \neg m_3, \neg m_4 \to m_1 & (\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}\ 左) \\
\hline
\mathsf{BEL}_{c_1}(\rho), \mathsf{BEL}_{c_1}(\neg m_2), \mathsf{BEL}_{c_1}(\neg m_3), \mathsf{BEL}_{c_1}(\neg m_4) \to \mathsf{BEL}_{c_1}(m_1) & (\mathsf{BEL}\text{–KD45}) \\
\hline
\mathsf{BEL}_{c_1}(\rho), \xi_{1,2}, \xi_{1,3}, \xi_{1,4}, \neg m_3, \neg m_4, \neg \mathsf{BEL}_{c_1}(m_1) \to m_2 & (\text{Classical}) \\
\hline
\rho, \Delta, \neg m_3, \neg m_4, \omega_1 \to m_2 & (\text{multiple } \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}\ 左) \blacktriangle \\
\hline
\mathsf{BEL}_{c_2}(\rho), \mathsf{BEL}_{c_2}(\Delta), \mathsf{BEL}_{c_2}(\neg m_3), \mathsf{BEL}_{c_2}(\neg m_4), \mathsf{BEL}_{c_2}(\omega_1) \to \mathsf{BEL}_{c_2}(m_2) & (\mathsf{BEL}\text{–KD45}) \\
\hline
\mathsf{BEL}_{c_2}(\rho), \mathsf{BEL}_{c_2}(\Delta), \xi_{2,3}, \xi_{2,4}, \neg m_4, \mathsf{BEL}_{c_2}(\omega_1), \neg \mathsf{BEL}_{c_2}(m_2) \to m_3 & (\text{Classical}) \\
\hline
\rho, \Delta, \neg m_4, \omega_1, \omega_2 \to m_3 & (\text{multiple } \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}\ 左) \\
\hline
\mathsf{BEL}_{c_3}(\rho), \mathsf{BEL}_{c_3}(\Delta), \mathsf{BEL}_{c_3}(\neg m_4), \mathsf{BEL}_{c_3}(\omega_1), \mathsf{BEL}_{c_3}(\omega_2) \to \mathsf{BEL}_{c_3}(m_3) & (\mathsf{BEL}\text{–KD45}) \\
\hline
\mathsf{BEL}_{c_3}(\rho), \mathsf{BEL}_{c_3}(\Delta), \xi_{3,4}, \mathsf{BEL}_{c_3}(\omega_1), \mathsf{BEL}_{c_3}(\omega_2), \neg \mathsf{BEL}_{c_3}(m_3) \to m_4 & (\text{Classical}) \\
\hline
\rho, \Delta, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \to m_4 & (\text{multiple } \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}\ 左) \\
\hline
\mathsf{BEL}_{c_4}(\rho), \mathsf{BEL}_{c_4}(\Delta), \mathsf{BEL}_{c_4}(\omega_1), \mathsf{BEL}_{c_4}(\omega_2), \mathsf{BEL}_{c_4}(\omega_3) \to \mathsf{BEL}_{c_4}(m_4) & (\mathsf{BEL}\text{–KD45}) \\
\hline
\phi, \Gamma, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \to \mathsf{BEL}_{c_4}(m_4) & (\text{Classical}) \\
\hline
\to \phi \wedge \bigwedge \Gamma \wedge \bigwedge_{j=1}^{3} \psi_j \supset \mathsf{BEL}_{c_4}(m_4) & (\text{Classical})
\end{array}
$$

（ここで $\rho \equiv \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\bigvee_{j=1}^{4} m_j)$, $\omega_j \equiv \hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\neg \mathsf{BEL}_{c_j}(m_j))$,
$\Delta \equiv \{\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\xi_{j,j'}) \mid 1 \le j \le 4, 1 \le j' \le 4, j \ne j'\}$, その他は本文中の記号を使用）

図 7 muddy children の例の証明

Fig. 7 Proof regarding the muddy children.

要な 1 つを持つ．

ここでは，n 人の子供 $c_1, \cdots, c_n$ とその父親がおり，子供は全員泥んこ，という状況を考える．以後 $g = \{c_1, \cdots, c_n\}$ とし，「c_i は泥んこ」を原子命題 m_i で表す．

いま，少なくとも 1 人の子が泥んこだという相互信念があるとする．これは $\mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\bigvee_{j=1}^{n} m_j)$ と表せる（以後これを ϕ とおく）．また，

$$
\begin{gathered}
\Gamma = \{\mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\xi_{j,j'}) \mid 1 \le j \le 4, 1 \le j' \le 4, j \ne j'\} \\
\Gamma' = \{\mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\xi'_{j,j'}) \mid 1 \le j \le 4, 1 \le j' \le 4, j \ne j'\} \\
(\text{ここで } \xi_{j,j'} = (\mathsf{BEL}_{c_j}(\neg m_{j'}) \Leftrightarrow \neg m_{j'}), \\
\xi'_{j,j'} = (\mathsf{BEL}_{c_j}(m_{j'}) \Leftrightarrow m_{j'}))
\end{gathered}
$$

とおくと，「どの子も他の子が泥んこかどうかは見える」という相互信念は $\bigwedge \Gamma \wedge \bigwedge \Gamma'$ と表せる．

このような状況下で，父親が $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ に順に「あなたは泥んこか」と尋ねると，いずれも「分からない」と答えることは，次の論理式 $(1 \le i < n)$ が証明可能でないことを確認することで示せる．

$$
\begin{aligned}
&\bigwedge_{j=1}^{n} m_j \wedge \phi \wedge \bigwedge \Gamma \wedge \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge_{j=1}^{i-1} (\psi_j \wedge \psi'_j) \\
&\quad \supset \mathsf{BEL}_{c_i}(m_i) \vee \mathsf{BEL}_{c_i}(\neg m_i) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ただしここで $\psi_j = \mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\neg \mathsf{BEL}_{c_j}(m_j))$, $\psi'_j = \mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\neg \mathsf{BEL}_{c_j}(\neg m_j))$ である．これらは「c_j が分からないと答えた」という相互信念を表している．

また，続いて父親が c_n に同じ質問をすると，c_n が「はい」と答えることは，論理式

$$
\phi \wedge \bigwedge \Gamma \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} \psi_j \supset \mathsf{BEL}_{c_n}(m_n) \qquad (5)
$$

を証明することで示せる．なおここで，$\bigwedge_{j=1}^{n} m_j$, $\bigwedge \Gamma'$ および $\bigwedge_{j=1}^{i-1} \psi'_j$ は仮定になくても証明できるため，ここでは仮定に入れていない．またこのことから，c_n は，他の子供の帽子の色の情報を使わず，$c_1, \cdots, c_{n-1}$ が「分からない」と答えただけで「自分が泥んこだ」という信念を導けることも分かる．

例として $n = 4$ の場合の証明を**図 7** に示す（この証明はループを含んでいない）．ここでも同様の証明の省略を行うほか，Weak の適用の一部を図では省いた．

ここで，$\blacktriangle$ の箇所で $\hat{\mathsf{M}}\text{-}\mathsf{BEL}$ 左によって $\neg \mathsf{BEL}_{c_1}(m_1)$ を w_1 に変えているが，これをしなければ，最下行の結論には，ψ_1 の代わりに $\mathsf{BEL}_{c_4}(\mathsf{BEL}_{c_3}(\mathsf{BEL}_{c_2}(\neg \mathsf{BEL}_{c_1}(m_1))))$ が現れる．すなわち，実はこの例では，$\mathsf{M}\text{-}\mathsf{BEL}_g(\neg \mathsf{BEL}_{c_1}(m_1))$ という相互信念は，信念の無限レベルのネストとしてでなく，あるエージェントの他エージェントの信念に関する信念の有限のネストの代用として用いられていることに注意☆（他の相互信念についても同様）．

なお，Γ 中の M-BEL を $\hat{\mathsf{M}}$-BEL に，$\supset$ の右辺の

☆ にもかかわらず，相互信念のオペレータを用いて記述しているのは，これによって論理式 (5) の記述が簡潔になる利点があるためである．ただし，それによって論理式 (5) の $\supset$ の左の部分の仮定が実質的に増えるため，証明の探索に要する時間は伸びる．

$\mathsf{BEL}_{c_n}(m_n)$ を m_n に置き換えた論理式も同様に証明できる．すなわち,「どの子も他の子が泥んこかどうかが見える」が相互信念であるだけでなく事実でもあることを使えば，c_n が実際に泥んこであることも導ける．

次に，$c_1, c_2, \cdots$ が「分からない」と答える過程で，時間の経過があることを考慮に入れてみる．すると，$i = n$ のケースを，時相オペレータ AF，AG を用いて次のように書き直せる．

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{AG}\,\phi \wedge \bigwedge \mathsf{AG}\,\Gamma \wedge \\
&\mathsf{AF}(\mathsf{AG}\,\psi_1 \wedge \mathsf{AF}(\mathsf{AG}\,\psi_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{AF}(\mathsf{AG}\,\psi_{n-1}) \cdots)) \\
&\quad \supset \mathsf{AF}\,\mathsf{BEL}_{c_n}(m_n) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

この論理式も同様に証明できる．

$n = 4$ の場合，6.1 節と同じ PC 環境で，式 (5) と (6) の証明にそれぞれ 1.85 秒と 2.93 秒，$i = 3$ の場合に式 (4) が証明できないことのチェックに 57.25 秒を要した．

7. む す び

本論文では，マルチエージェント環境において，合理的エージェント間のコミュニケーションや協調に関わる諸概念を記述するために必要となる，エージェントごとの心的状態やそのネスト，および相互心的状態を明示的に扱えるように，我々の BDI logic の sequent calculus による演繹体系を拡張し，その健全･完全性を示した．これによって，複数エージェントの信念･意図などの心的状態や相互心的状態，およびその時間変化に関する記述や推論が可能となった．5.3 節で述べた本体系の判定アルゴリズムの処理系については，現在，効率の改善に関する検討を継続中である．

今後の課題としては，ベースとなる BDI logic を CTL* ベースや述語論理に拡張すること，マルチエージェント環境のエージェント記述言語への応用のための実行系の実現，などがあげられる．

また，6.1 節で述べたように，エージェント間のコミュニケーションや協調などに関する記述を行うには，エージェントごとの心的状態やそのネスト，および相互心的状態を扱えることは必要ではあるが，それだけでは十分ではない場合がある．たとえば，joint ability や team formation などの十分な形式的記述には，action に関する，dynamic logic 相当の取扱いができる能力なども必要となってくる．これらの導入も今後の課題である．

謝辞 有用なコメントをくださった査読者の方々に感謝いたします．また，処理系の効率改善の検討に関する実作業を手伝ってくれた，奈良女子大学理学部情報科学科（学生）の西澤美和氏に感謝いたします．

参 考 文 献

1) Benerecetti, M., Giunchiglia, F. and Serafini, L.: A Model Checking Algorithm for Multiagent Systems, *Intelligent Agents V — Proc. 5th Intl. Workshop on Agent Theories, Architectures, and Languages* (*ATAL-98*), pp.163–176 (1999).

2) Emerson, E.A.: Temporal and Modal Logic, *Handbook of Theoretical Computer Science*, Vol.B, pp.997–1072, Elsevier Science Publishers B.V. (1990).

3) Emerson, E.A. and Srinivasan, J.: Branching Time Temporal Logic, *Linear Time, Branching Time and Partial Order in Logics and Models for Concurrency*, de Bakker, J., de Roever, W. and Rozenberg, G.(Eds.), pp.123–172, Springer-Verlag (1989).

4) Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y. and Vardi, M.Y.: *Reasoning about Knowledge*, The MIT Press (1995).

5) Friedman, N. and Halpern, J.Y.: Modeling Belief in Dynamic System, Part I: Foundations, *Artificial Intelligence*, Vol.95, No.2, pp.257–316 (1997).

6) Harel, D.: Dynamic Logic, *Handbook of Philosophical Logic Volume II — Extensions of Classical Logic*, Gabbay, D. and Guenther, F.(Eds.), pp.497–604, D. Reidel Puhlishing Company (1984).

7) Nide, N., Takata, S. and Araragi, T.: Deduction Systems for BDI Logics with Mental State Consistency, *Proc. CLIMA '02*, pp.123–135 (2002).

8) Rao, A.S. and Georgeff, M.P.: Modeling Rational Agents within a BDI-Architecture, *Proc. International Conference on Principles of Knowlegde Representation and Reasoning*, pp.473–484 (1991).

9) Rao, A.S. and Georgeff, M.P.: Decision Procedures for BDI Logics, *Journal of Logic and Computation*, Vol.8, No.3, pp.292–343 (1998).

10) Singh, M.P., Rao, A.S. and Georgeff, M.P.: Formal Methods in DAI: Logic-Based Representation and Reasoning, *Multiagent Systems*, pp.331–376, The MIT Press (1999).

11) Takata, S., Kawato, S. and Mase, K.: Conversational Agent Who Achieves Tasks While Interacting with Humans Based on Scenarios, *Proc. IEEE Int. Workshop on Robot and Human Interactive Communication 2002*, pp.235–240 (2002).

12) Wooldridge, M.: *Reasoning about Rational*

Agents, The MIT Press (2000).
13) 高田司郎，五十嵐新女，新出尚之，榎本美香，間瀬健二，中津良平：マルチエージェント環境において意図的に言語行為を遂行する合理的エージェントの基本設計，電子情報通信学会論文誌，Vol.J84-D-I, No.8, pp.1191–1201 (2001).
14) 新出尚之，高田司郎，櫟 粛之：BDI Logic の sequent calculus による演繹体系，コンピュータ・ソフトウェア，Vol.20, No.1, pp.66–83 (2003).
15) 新出尚之，高田司郎，櫟 粛之：合理的エージェントの心的状態に関する整合性の実現と応用について，電子情報通信学会論文誌，Vol.J86-D-I, No.8, pp.514–523 (2003).

(平成 15 年 4 月 11 日受付)
(平成 15 年 9 月 30 日再受付)
(平成 16 年 3 月 16 日採録)

新出 尚之

1963 年生．1986 年京都大学理学部卒業．1988 年同大学院理学研究科数理解析専攻修士課程修了．同年同専攻博士課程中退．同年京都大学情報処理教育センター助手．1992 年奈良女子大学理学部情報科学科講師，現在に至る．興味を持つ分野は，時相論理による証明およびプログラミングシステムの構築．日本ソフトウェア科学会会員．

高田 司郎（正会員）

1979 年大阪大学基礎工学部情報工学科卒業．1993 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科前期課程入学．1999 年同科後期課程修了．1979 年 CSK 入社．1993 年けいはんな入社．1999 年 ATR 知能映像通信研究所入所．2001 年 ATR メディア情報科学研究所客員研究員．2002 年福岡工業大学情報工学部管理情報工学科助教授．2003 年近畿大学理工学部情報学科助教授，現在に至る．博士（工学）．人工知能，コミュニケーション，形式的仕様記述，合理的エージェントに興味を持つ．

櫟 粛之

1985 年東京大学理学部数学科卒業．1987 年同大学院修士課程修了．同年 NTT 情報通信処理研究所入社．1993〜1994 年ユトレヒト大学客員研究員．現在，NTT コミュニケーション科学基礎研究所勤務．様相論理，高階カテゴリー論理等の非標準論理，分散システムの形式的検証，モバイルエージェントに興味を持つ．人工知能学会会員．