

# 相関のあるノイズ下での画像修復のハイパーパラメータ推定について

綴 木 馴<sup>†,††</sup> 岡 田 真 人<sup>†††</sup> 英 保 茂<sup>††</sup>

確率的情報処理の枠組みで画像修復を議論する。原画像は近接相互作用のみを持つガウスモデルで生成されるとする。各画素に重畳されるノイズは空間的な相関を持つガウスモデルで生成されるとし、空間的相関は並進対称性を持つとする。修復過程に用いた確率モデルのハイパーパラメータが、生成過程でのハイパーパラメータに一致するとき、修復誤差は最小値をとることが知られている。そこで、ハイパーパラメータの推定を周辺事後確率最大化から求めることを試みる。本モデルでは周辺事後確率の最大化手法としてよく用いられている、極値方程式の反復法を用いて解く。その結果、この極値方程式を反復法を用いて解く方法では、アルゴリズムが収束しない場合があることを示す。この収束しない原因は、ノイズモデルにおいてハイパーパラメータが特異点を持つためであると予想される。この予想を検証するため、ハイパーパラメータが特異点を持たないようにパラメータを固定した。この場合、極値方程式を反復法を用いるアルゴリズムが収束することが分かった。

## On Hyperparameter Estimation of Image Restoration under Spatially Correlated Noise

JUN TSUZURUGI,<sup>†,††</sup> MASATO OKADA<sup>†††</sup> and SHIGERU EIHO<sup>††</sup>

We investigated the use of the Bayesian inference to restore noise-degraded images. The generative statistical models used for the original image and the noise were assumed to obey multi-dimensional Gaussian distributions. Hyperparameter is required to restore the distorted image. We use the steady state equations for hyperparameter estimations with maximal posterior marginal criteria. However, when we use the iterative method of the steady state equations, because the hyperparameter has a singular point, we fail to obtain optimal solution. Thus, we propose a new method for sub-optimal solution.

### 1. はじめに

近年、従来の個々の用途に特化した形での緻密な画像処理技術だけでは対応しきれない状況が増加し、むしろ多少の緻密さを犠牲にしてでも、より柔軟で頑健な画像処理技術に対する社会的な要請が増えている<sup>1)~3)</sup>。このような近況において、ベイズ統計を用いた確率的情報処理を用いた画像処理への期待はさらに高まりつつある。本論文ではこのベイズ統計を用いた確率的情報処理の枠組みにおいて画像修復を議論する<sup>4)~7)</sup>。画像は近接相互作用のみを持つガウスモデルで生成し、各画素に重畳されるノイズは空間的な相関を持つガウスモデルで記述する<sup>7),8)</sup>。修復過程に用

いた確率モデルが生成過程でのハイパーパラメータに一致するとき、修復誤差が最小値をとることが知られている。しかし、修復誤差の最小値を与えるハイパーパラメータは、画像修復の際には分からない。そこで本論文では、人工画像を中心に扱うことで、ハイパーパラメータの推定を周辺尤度最大化から求めることを試みる。

### 2. モデル

#### 2.1 生成モデル

一般的に画像は2次元であるが、本論文ではより一般的な $d$ 次元の正方格子上の画像を考える。さらに、画像修復の高速化、およびモデル解析の単純化を実現するために周期境界条件を用いる。周期境界条件を用いることにより、共分散行列をフーリエ変換によって対角化することができる。この対角化により共分散行列をベクトルとして扱うことができ、画像修復の高速化および数理的な解析が可能になる。周期境界条件を用いることには様々な意見が予想されるが、本論文で

† 福井工業高等専門学校

Fukui National College of Technology

†† 京都大学大学院情報学研究科

Graduate School of Informatics, Kyoto University

††† 理化学研究所脳科学総合研究センター

RIKEN BSI

は3.2節の図3において、周期境界条件を用いたモデルが自然画像にも対応できることを示す。

画像は、一辺の画素数を  $L$  とする。この場合、原画素の総数  $N$  は  $N = L^d$  となる。本論文では画像をすべてベクトルで表し、原画像を  $\xi$ 、劣化画像を  $\tau$ 、修復画像を  $\sigma$  とおく。格子点  $i$  上の原画像の画素値を  $\xi_i$  とおく。画像  $\xi = \{\xi_i\}$  は以下の多重ガウス分布に従って生成されるとする。

$$P(\xi) = \frac{1}{Z_{\text{prior}}(\beta, h)} \exp[-H(\xi, \beta, h)] \quad (1)$$

$$H(\xi, \beta, h) = \xi^T (\beta G + hI) \xi \quad (2)$$

規格化因子  $Z_{\text{prior}}(\beta, h)$  は、

$$Z_{\text{prior}}(\beta, h) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} |2(\beta G + hI)|^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

で与えられる。 $G$  と  $I$  は  $L^d \times L^d$  の行列であり、 $I$  は単位行列である。本論文では行列  $G$  が並進対称行列であるとし、その要素  $G_{i,j}$  を

$$G_{i,j} = 2d\delta_{(i-j),0} - \sum_q \delta_{(i-j),-q} - \sum_q \delta_{(i-j),q} \quad (4)$$

とする<sup>7),8)</sup>。ただし、 $d$  次元ベクトル  $q$  は次の値をとる。

$$q = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \quad (5)$$

一方で、式(4)の  $\delta_{i,j}$  はクロネッカーのデルタである。特に画像の次元である  $i$  の次元が1次元の場合、行列  $G$  は次のようになる。

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

よって、画像が1次元のとき  $H$  は、

$$H = \beta \sum_{\langle ij \rangle} (\xi_i - \xi_j)^2 + h \sum_j \xi_j \quad (7)$$

となる。ここで、式(7)の右辺第1項の和記号は最近接格子点のみの和を意味する。したがって、 $\beta (> 0)$  は最近接相互作用の強さを表す変数で、この値が大きくなればなるほど近隣の画素値は同じ値をとろうとする。逆に  $\beta$  に比べて  $h (> 0)$  が大きくなればなるほどそれぞれの画素値は独立した値をとろうとする。

ここで、式(1)によって生成された原画像  $\xi$  の例

Original image:  $\xi$

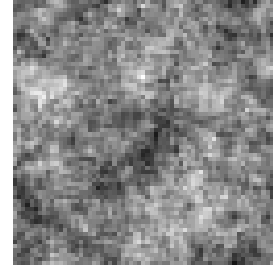


図1 式(1)に従って、人工的に生成された原画像  $\xi$ 。  $N = 64^2$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $h = 1.0 \times 10^{-4}$  とした

Fig.1 Artificial original image  $\xi$  generated by Eq.(1). The parameter were  $N = 64^2$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $h = 1.0 \times 10^{-4}$ .

を図1に示す。画素数を  $N = 64^2$  とした。原画像の生成に必要なハイパーパラメータは  $\beta = 0.5$ 、 $h = 1.0 \times 10^{-4}$  とした。

$\tau = \{\tau_i\}$  を劣化画像とする。 $\xi$  が原画像であるので  $\tau - \xi$  はノイズになる。このノイズを原画像  $\xi$  に重畳することで劣化画像  $\tau$  とする。ノイズを作成する劣化過程を表す条件付確率  $P_{\text{out}}(\tau|\xi)$  は以下の多重ガウス分布に従うとする。

$$P_{\text{out}}(\tau|\xi) = \frac{1}{Z_{\text{noise}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tau - \xi)^T R^{-1}(\tau - \xi)\right] \quad (8)$$

$$Z_{\text{noise}}(R) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} |R|^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

ここで、 $R$  はノイズの相関行列であり、以下の式(10)に示すように並進対称性を持つとする。

$$R_{i,j} = (1-a)b^2\delta_{i,j} + ab^2 \exp\left[-\frac{(i-j)^2}{\kappa^2}\right] \quad (10)$$

ただし、 $0 \leq a \leq 1$  である。式(10)で  $a = 0$  とおけば第2項が0となり、空間的な相関を持たないノイズと等価になる。また、 $i = j$  のとき、 $a$  の値とは無関係に  $R_{i,i} = b^2$  となる。すなわち、 $a$  が1に近づくほど、ノイズにおける各ピクセル間の相関性が強まる。その様子を図2に示す。画素数を  $N = 64^2$ 、ハイパーパラメータとして  $b = 0.75$ 、 $\kappa = 3.0$  とした。 $a$  が  $a = 0.0$  から  $a = 1.0$  に増加するにつれ、ノイズの相関が大きくなっている様子が分かる。

2.2 修復アルゴリズムとハイパーパラメータ推定  
ベイズの公式により式(1)と式(8)から、劣化画像  $\tau$  が与えられた場合の原画像  $\xi$  の事後確率は、

$$P(\xi|\tau) = \frac{P_{\text{out}}(\tau|\xi)P(\xi)}{\int d\xi P_{\text{out}}(\tau|\xi)P(\xi)} \quad (11)$$

となる。原画像  $\xi$  と区別するために、原画像の推定結果に対応する修復画像  $\sigma = \{\sigma_i\}$  を導入する。式(11)から修復画像  $\sigma$  の事後確率を、

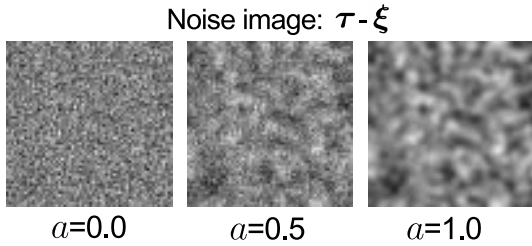


図 2 式 (8) に従って、様々な  $a$  によって作成された人工ノイズ  $\tau - \xi$ .  $N = 64^2$ .  $b = 0.75$ ,  $\kappa = 3.0$  とした

Fig. 2 Artificial noise images  $\tau - \xi$  generated by Eq.(8). The parameter were  $N = 64^2$ ,  $b = 0.75$ ,  $\kappa = 3.0$ .

$$P(\sigma|\tau) = \frac{\exp[-H_{eff}]}{\int d\sigma \exp[-H_{eff}]} \quad (12)$$

$$H_{eff} = \sigma^T (\beta G + hI) \sigma + \frac{1}{2} (\tau - \sigma)^T R^{-1} (\tau - \sigma) \quad (13)$$

とする．ここでは原画像  $\xi$  の推定値として，修復画像  $\sigma$  の  $P(\sigma|\tau)$  に関する期待値を用いる．

$$\langle \sigma_i \rangle = \int d\sigma_i \sigma_i P(\sigma|\tau) \quad (14)$$

本論文では，この  $\langle \sigma_i \rangle$  を修復結果とする．

ここまでの議論では， $\beta$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $\kappa$  などのハイパーパラメータが与えられた場合の修復アルゴリズムに関して述べた．しかし実際の画像修復において，これらのハイパーパラメータの値を修復時に知ることはできない．そこで何らかの方法で，ハイパーパラメータを推定する必要がある．ここでは，ハイパーパラメータ推定方法として，周辺尤度最大化を用いる．式 (1) と (8) の原画像とノイズの生成確率を用いると，劣化画像  $\tau$  の生起確率  $P(\tau)$  は，

$$P(\tau) = \int d\xi P_{out}(\tau|\xi) P(\xi) \quad (15)$$

となる． $P(\tau)$  を周辺尤度と呼ぶ．

周辺尤度  $P(\tau)$  はハイパーパラメータの関数である．周辺尤度最大化では，劣化画像  $\tau$  が与えられた場合に，周辺尤度  $P(\tau)$  の最大値を与えるハイパーパラメータの推定値とする．

### 3. 結 果

#### 3.1 画素の推定値と修復誤差

本論文では，相関のあるノイズ下でのハイパーパラメータの推定について議論する．そのためには，このモデルに関する Tsuzurugi と Okada によるフーリエ変換を用いた修復画像の理論的取扱いの知見が必要である<sup>7),8)</sup>．そこで，まず文献 8) の内容を手短かに説明する．

本論文では原画像の画素  $\xi_i$ ，劣化画像の画素  $\tau_i$ ，修復画像の画素  $\sigma_i$  の離散フーリエ変換をそれぞれ  $\tilde{\xi}_k$ ， $\tilde{\tau}_k$ ， $\tilde{\sigma}_k$  とおく．また行列  $G$  と  $R$  を対角化した行列の対角成分をそれぞれ  $\tilde{G}_k$ ， $\tilde{R}_k$  とする．フーリエ変換については付録で詳しく述べる．修復画素  $\sigma_j$  の期待値は，フーリエ表記  $\tilde{\sigma}_k$  を用いて，

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \langle \tilde{\sigma}_k \rangle e^{ik \cdot j} \quad (16)$$

となる． $\tilde{\sigma}_k$  の期待値は，

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}_k \rangle &= \int \prod_{k'} d\tilde{\sigma}_{k'} \tilde{\sigma}_k P(\sigma|\tau) \\ &= \frac{1}{\int d\tilde{\sigma}_k e^{-\hat{H}_{eff}}} \int d\tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_k e^{-\hat{H}_{eff}} \quad (17) \end{aligned}$$

となる．ただし  $\hat{H}_{eff}$  は式 (13) のフーリエ表記で，

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \sum_k (\hat{\beta} \tilde{G}_k + \hat{h}) \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_{-k} \\ &+ \sum_k \frac{1}{2\tilde{R}_k} (\tilde{\tau}_k - \tilde{\sigma}_k) (\tilde{\tau}_{-k} - \tilde{\sigma}_{-k}) \quad (18) \end{aligned}$$

である．また，ここでは原画像の生成確率やノイズの生起確率のハイパーパラメータを表す  $\beta$ ,  $h$ ,  $\tilde{R}_k$  が既知ではないとしている．ただし，修復用のモデルは原画像，ノイズともに元の関数形と同じであるとする． $\beta$ ,  $h$ ,  $\tilde{R}_k$  に対応するハイパーパラメータを  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{h}$ ,  $\hat{\tilde{R}}_k$  とする．式 (17) を (16) に代入すると，修復結果  $\langle \sigma_j \rangle$  は，

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{L^d} \sum_k \sum_i \frac{\tau_i \frac{1}{2\hat{\tilde{R}}_k} \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{i})]}{\hat{\beta} \tilde{G}_k + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{\tilde{R}}_k}} \quad (19)$$

となり，劣化画像  $\tau$  から修復画像  $\sigma$  を求めることができる．

ピクセルごとの修復画像と原画像の平均二乗誤差  $E_1$  の期待値は，

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\langle \left\langle \frac{1}{L^d} \sum_j (\xi_j - \langle \sigma_j \rangle)^2 \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_k \left\langle \left\langle (\tilde{\xi}_k - \tilde{\sigma}_k) (\tilde{\xi}_{-k} - \tilde{\sigma}_{-k}) \right\rangle \right\rangle \quad (20) \end{aligned}$$

となる．ここで， $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$  は同時分布  $P(\tau, \xi) = P_{out}(\tau|\xi)P(\xi)$  に関する平均である． $P(\tau, \xi)$  はフー

リエ表記により対角化されているので、各々の  $k$  について容易に計算することができる。

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \left\langle \left( \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - \langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \rangle \right) \left( \tilde{\xi}_{-\mathbf{k}} - \langle \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}} \rangle \right) \right\rangle \right\rangle \\
 &= \frac{1}{Z} \int \int d\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} d\tilde{\tau}_{\mathbf{k}} \left| \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - \frac{\tilde{B}_{\mathbf{k}}}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}} \tilde{\tau}_{\mathbf{k}} \right|^2 \\
 & \quad \times \exp \left[ -A_{\mathbf{k}} \left| \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - \frac{\tilde{B}_{\mathbf{k}}}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}} \tilde{\tau}_{\mathbf{k}} \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. - \left( \tilde{B}_{\mathbf{k}} - \frac{\tilde{B}_{\mathbf{k}}^2}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}} \right) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2\tilde{A}_{\mathbf{k}}} + \left( \frac{\tilde{B}_{\mathbf{k}}}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}} - \frac{\tilde{B}_{\mathbf{k}}}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}} \right)^2 \frac{1}{2\tilde{B}_{\mathbf{k}} - \frac{2\tilde{B}_{\mathbf{k}}^2}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}}} \quad (21)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\tilde{A}_{\mathbf{k}} = \beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}, \quad \tilde{B}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 Z &= \int \int d\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} d\tilde{\tau}_{\mathbf{k}} \\
 & \quad \times \exp \left[ -\tilde{A}_{\mathbf{k}} \left| \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - \frac{\tilde{B}_{\mathbf{k}}}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}} \tilde{\tau}_{\mathbf{k}} \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. - \left( \tilde{B}_{\mathbf{k}} - \frac{\tilde{B}_{\mathbf{k}}^2}{\tilde{A}_{\mathbf{k}}} \right) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \right] \quad (23)
 \end{aligned}$$

である。したがって、 $\tilde{A}_{\mathbf{k}}$ 、 $\tilde{B}_{\mathbf{k}}$  の推定値をそれぞれ  $\hat{\tilde{A}}_{\mathbf{k}}$ 、 $\hat{\tilde{B}}_{\mathbf{k}}$  とおくと、

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\hat{\tilde{A}}_{\mathbf{k}}} + \left( \frac{\hat{\tilde{B}}_{\mathbf{k}}}{\hat{\tilde{A}}_{\mathbf{k}}} - \frac{\hat{\tilde{B}}_{\mathbf{k}}}{\hat{\tilde{A}}_{\mathbf{k}}} \right)^2 \frac{1}{\hat{\tilde{B}}_{\mathbf{k}} - \frac{\hat{\tilde{B}}_{\mathbf{k}}^2}{\hat{\tilde{A}}_{\mathbf{k}}}} \right] \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{\frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}}{\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}} - \frac{\frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}}{\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. \times \frac{\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}}{\frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}} (\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h)} \right] \quad (24)
 \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\hat{\beta} = \beta, \quad \hat{h} = h, \quad \hat{\tilde{R}}_{\mathbf{k}} = \tilde{R}_{\mathbf{k}} \quad (25)$$

であれば、最小二乗誤差  $E_1$  は最小値、

$$E_{1min} = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}} \right] \quad (26)$$

をとる。より正確には、 $\hat{\beta}$ 、 $\hat{h}$ 、 $\hat{\tilde{R}}_{\mathbf{k}}$  と  $\beta$ 、 $h$ 、 $\tilde{R}_{\mathbf{k}}$  のそれぞれの比が正しければ  $E_1$  は同じ最小値、式 (26) をとる。この式 (26) は修復の限界を表している。

同様に劣化画像と原画像の平均二乗誤差  $E_2$  を求めることができる。

$$E_2 = \left\langle \left\langle \frac{1}{N} \sum_j (\tilde{\xi}_j - \tilde{\tau}_j)^2 \right\rangle \right\rangle \quad (27)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{R}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_i \tilde{R}_{i,i} = b^2 \quad (28)$$

これにより、 $E_2$  はノイズのフーリエ表記された相関行列の対角成分だけに依存することが分かる。

### 3.2 ノイズに相関の無い場合のハイパーパラメータ推定

式 (15) の周辺尤度  $P(\tau)$  は式 (3) と式 (9) を用いると、

$$P(\tau) = \frac{Z_{\text{posterior}}(\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R})}{Z_{\text{noise}}(\hat{R}) Z_{\text{prior}}(\hat{\beta}, \hat{h})} \quad (29)$$

となる。ここで、 $Z_{\text{posterior}}(\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R})$  は、次の式で与えられる事後確率

$$\begin{aligned}
 P(\xi|\tau) &= \frac{P_{\text{out}}(\tau|\xi) P(\xi)}{\int d\xi P_{\text{out}}(\tau|\xi) P(\xi)} \quad (30) \\
 &= \frac{1}{Z_{\text{posterior}}(\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R})} \exp(-\hat{H}_{\text{eff}}) \quad (31)
 \end{aligned}$$

の規格化因子であり、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 & Z_{\text{posterior}}(\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R}) \\
 &= \prod_{\mathbf{k}} \int d\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} \exp(-\hat{H}_{\text{eff}}) \\
 &= \pi^{\frac{N}{2}} \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\hat{\tilde{A}}_{\mathbf{k}}}} \\
 & \quad \times \exp \left[ -\left( \hat{\tilde{B}}_{\mathbf{k}} - \frac{\hat{\tilde{B}}_{\mathbf{k}}^2}{\hat{\tilde{A}}_{\mathbf{k}}} \right) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \right] \quad (32)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{\text{eff}} &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h}) \tilde{\xi}_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{-\mathbf{k}} \\
 & \quad + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\hat{\tilde{R}}_{\mathbf{k}}} (\tilde{\tau}_{\mathbf{k}} - \tilde{\xi}_{\mathbf{k}}) (\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}} - \tilde{\xi}_{-\mathbf{k}}) \quad (33)
 \end{aligned}$$

である。

$\ln$  は単調増加関数であるので対数周辺尤度  $\ln P(\tau)$

を最大化するのは  $P(\tau)$  を最大化するのと等価である．対数周辺尤度  $\ln P(\tau)$  は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \ln(P(\tau)) &= \ln\left(\frac{Z_{\text{posterior}}(\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R})}{Z_{\text{noise}}(\hat{R})Z_{\text{prior}}(\hat{\beta}, \hat{h})}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \ln\left(\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}\right) \\ &\quad -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \ln(\hat{R}_{\mathbf{k}}) \\ &\quad +\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \ln(\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h}) \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h}) \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \end{aligned} \quad (34)$$

ここでは、式 (53) において  $a=0$  とおき、相関のないノイズの画像修復を考える．このとき、 $\tilde{R}_{\mathbf{k}}$  は、 $\tilde{R}_{\mathbf{k}} = b^2$  (35)

となる．相関のないノイズによる劣化画像を修復するのに必要なハイパーパラメータは  $\beta, h, b$  である．これらの推定値をそれぞれ  $\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{b}$  とおく．

式 (35) を式 (34) に代入し、 $\ln(P(\tau))$  を  $\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{b}^2$  で偏微分し、 $\ln(P(\tau))$  の停留点を満たす方程式を求めると、

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left( \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{h}}{\hat{\beta}}} \right) \\ &\quad \left[ \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{b}^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{2\hat{b}^4 (\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{b}^2})^2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \left( \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 + \frac{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\hat{h}}} \right) \\ &\quad \left[ \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{b}^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{1}{2\hat{b}^4 (\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{b}^2})^2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}^2 &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{b}^2}} \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{(\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h})^2}{(\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{b}^2})^2} \end{aligned} \quad (38)$$

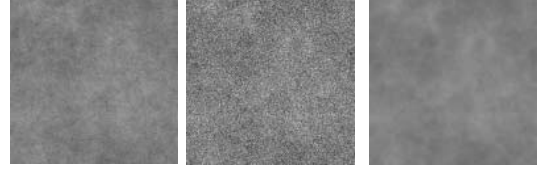
となる．本論文では、ノイズモデルのハイパーパラメータ

(A) Natural image

Original image:  $\xi$  Distorted image:  $\tau$  Restored image:  $\sigma$ 

$a$	$\hat{\beta}$	$\hat{h}$	$\hat{b}^2$	$E_2$	$E_1$
0.0	0.91	$1.7 \times 10^{-4}$	1.13	0.57	0.42

(B) Artificial image

Original image:  $\xi$  Distorted image:  $\tau$  Restored image:  $\sigma$ 

$a$	$\hat{\beta}$	$\hat{h}$	$\hat{b}^2$	$E_2$	$E_1$
0.0	2.17	$8.0 \times 10^{-3}$	0.53	0.55	0.06

図 3 (A) 相関のないノイズ ( $a=0$ ) で劣化した自然画像の修復． $N=64^2$ ．ノイズのハイパーパラメータは  $b=0.75$  ( $b^2=0.56$ ) とした．ハイパーパラメータの推定値はそれぞれ、 $\hat{\beta}=0.91$ ,  $\hat{h}=1.7 \times 10^{-4}$ ,  $\hat{b}^2=1.13$  と求まった．平均二乗誤差は修復前の  $E_2=0.57$  から修復後の  $E_1=0.42$  に減少した．(B) 相関のないノイズ ( $a=0$ ) で劣化した人工画像の修復． $N=128^2$ ．原画像およびノイズのハイパーパラメータは  $\beta=3.0$ ,  $h=1.0 \times 10^{-4}$ ,  $b=0.75$  ( $b^2=0.56$ ) とした．ハイパーパラメータの推定値はそれぞれ、 $\hat{\beta}=2.17$ ,  $\hat{h}=8.0 \times 10^{-3}$ ,  $\hat{b}^2=0.53$  と求まった．平均二乗誤差は修復前の  $E_2=0.55$  から修復後の  $E_1=0.06$  に減少した

Fig. 3 (A) Restoration of distorted natural image with the non-correlated noise ( $a=0$ ).  $N=64^2$ . Hyperparameter were used  $b=0.75$  ( $b^2=0.56$ ) for noise. Estimated hyperparameter were  $\hat{\beta}=0.91$ ,  $\hat{h}=1.7 \times 10^{-4}$ ,  $\hat{b}^2=1.13$ . Restoration error was reduced from  $E_2=0.57$  to  $E_1=0.42$ . (B) Restoration of distorted artificial image with the non-correlated noise ( $a=0$ ).  $N=128^2$ . Hyperparameter for the original image were used  $\beta=3.0$ ,  $h=1.0 \times 10^{-4}$ , and for noise image  $b=0.75$  ( $b^2=0.56$ ). Estimated hyperparameter were  $\hat{\beta}=2.17$ ,  $\hat{h}=8.0 \times 10^{-3}$ ,  $\hat{b}^2=0.53$ . Restoration error was reduced from  $E_2=0.55$  to  $E_1=0.06$ .

タ  $\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{b}^2$  の停留点をそれぞれ求めるために、停留点方程式 (36), (37), (38) のそれぞれに対して、計算機シミュレーションによる反復法を用いた．原画像にはまず  $N=64^2$  の自然画像 (レナ画像) を用いた．ノイズモデルのハイパーパラメータを  $b=0.75$  とした．自然画像であるので原画像を生成したパラメータ  $\beta, h$  の真の値は分からない．結果を図 3 (A) に示す．ハイパーパラメータの推定値はそれぞれ、 $\hat{\beta}=0.91$ ,  $\hat{h}=1.7 \times 10^{-4}$ ,  $\hat{b}^2=1.13$  に収束した．平均二乗誤

差は修復前の  $E_2 = 0.57$  から修復後の  $E_2 = 0.42$  に減少した．また，自然画像は周期境界条件を持っていないが，図3の結果は，周期境界条件を用いている本論文のモデルであっても対応できることを示している．さらに原画像に  $N = 128^2$  の人工画像を用いたシミュレーションを行った．その結果を図3(B)に示す．原画像およびノイズのハイパーパラメータは  $\beta = 3.0$ ， $h = 1.0 \times 10^{-4}$ ， $b = 0.75 (b^2 = 0.56)$  とした．ハイパーパラメータの推定値はそれぞれ， $\hat{\beta} = 2.17$ ， $\hat{h} = 8.0 \times 10^{-3}$ ， $\hat{b}^2 = 0.53$  に収束した．平均二乗誤差は修復前の  $E_2 = 0.55$  から修復後の  $E_2 = 0.06$  に減少した．

### 3.3 ノイズに相関のある場合のハイパーパラメータ推定

前節の相関のないノイズの場合では  $a = 0$  と固定されているので， $a$  および  $\kappa$  のハイパーパラメータ推定を考える必要はなかった．しかし，相関のあるノイズ ( $a > 0$ ) の場合は  $b^2$  だけでなく， $a$  および  $\kappa$  も推定しなくてはならない．ここからは，これらノイズのハイパーパラメータ  $b^2$ ， $a$ ， $\kappa$  の推定について述べる．

式(10)および(53)のノイズの相関行列は  $a$ ， $b$  および  $\kappa$  に依存する．これらの推定値を  $\hat{a}$ ， $\hat{b}$  および  $\hat{\kappa}$  とおくと，修復に用いたノイズモデルの相関行列のフーリエ表記は，

$$\hat{R}_{\mathbf{k}} = (1 - \hat{a})\hat{b}^2 + \hat{a}\hat{b}^2 \sum_{\mathbf{l}} e^{-\frac{\mathbf{l}^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \quad (39)$$

となる．この式を式(34)に代入し， $\ln(P(\tau))$  を  $\hat{\beta}$ ， $\hat{h}$ ， $\hat{a}$ ， $\hat{b}^2$  および  $\hat{\kappa}^2$  で偏微分し， $\ln(P(\tau))$  の停留点を満たす方程式を求めると，

$$\hat{\beta} = \left( \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{h}}{\hat{\beta}}} \right) \left[ \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} + \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^4 \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right]^{-1} \quad (40)$$

$$\hat{h} = \left( \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 + \frac{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\hat{h}}} \right) \left[ \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} + \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^4 \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right]^{-1} \quad (41)$$

$$\hat{a} = \left[ \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \left( \frac{1}{\hat{a}} - 1 \right) \hat{b}^2 + \hat{b}^2 \sum_{\mathbf{l}} e^{-\frac{\mathbf{l}^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right\} \times \frac{\partial}{\partial \hat{a}} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \right]^{-1} \\ \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \hat{Q}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} + \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right)}{\left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right] \quad (42)$$

$$\hat{b}^2 = \left[ \sum_{\mathbf{k}} \left\{ (1 - \hat{a}) + \hat{a} \sum_{\mathbf{l}} e^{-\frac{\mathbf{l}^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right\} \frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \right]^{-1} \\ \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} + \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right)}{\left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right] \quad (43)$$

$$\hat{\kappa}^2 = \left[ -\frac{\hat{a}\hat{b}^2}{\hat{\kappa}^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{R_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{l}} \mathbf{l}^2 e^{-\frac{\mathbf{l}^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right] \\ \times \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{\kappa}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} + \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{\kappa}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right)}{\left( \hat{\beta}\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right]^{-1} \quad (44)$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \hat{Q}_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \left( -\hat{b}^2 + \hat{b}^2 \sum_{\mathbf{l}} e^{-\frac{\mathbf{l}^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right) \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \left( 1 - \hat{a} + \hat{a} \sum_{\mathbf{l}} e^{-\frac{\mathbf{l}^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right) \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\kappa}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \left( \hat{a}\hat{b}^2 \frac{1}{\hat{\kappa}^4} \sum_{\mathbf{l}} e^{-\frac{\mathbf{l}^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right) \quad (47)$$

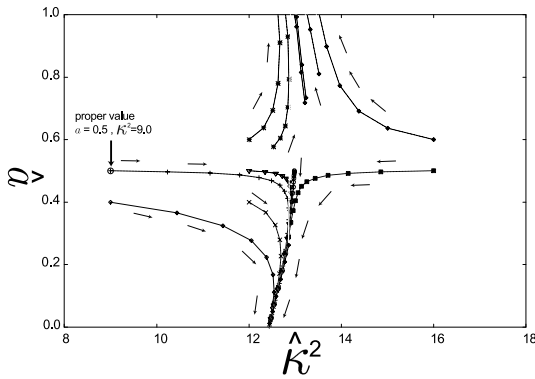


図 4 画像生成のハイパーパラメータを  $\beta = 0.5$ ,  $h = 1.0 \times 10^{-4}$  と固定し, ノイズモデルのハイパーパラメータを  $a = 0.5$ ,  $b = 0.75$ ,  $\kappa^2 = 9.0$  として生成した, 2次元画像に関するハイパーパラメータ推定のダイナミクス. ただし画像の一辺の長さは  $L = 16$  である. 推定の際, 画像生成のハイパーパラメータは真の値を用いた. ノイズの分散を  $\hat{b} = b = 0.75$  に固定し, 反復法を用いて残りの  $\hat{a}$  と  $\hat{\kappa}$  を求める. 反復法は収束することなく, 求解過程は発散する

Fig. 4 Dynamics of the hyperparameter estimation about 2-dimensional image. Hyperparameter for original image were fixed at  $\beta = 0.5$ ,  $h = 1.0 \times 10^{-4}$ , and hyperparameter for noise image were  $a = 0.5$ ,  $b = 0.75$ ,  $\kappa^2 = 9.0$ .  $L = 16$ . Estimating the hyperparameters, true values were employed for the original image. The variance of noise is fixed  $\hat{b} = b = 0.75$ , and we obtained  $\hat{a}$  and  $\hat{\kappa}$  using iterative procedure. The iterative procedure emanated, not converged.

である.

本論文では式 (36), (37), (38) の場合と同様に, ノイズモデルのハイパーパラメータ  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{\kappa}$  のそれぞれの停留点を求めるために, 停留点方程式 (42), (43), (44) のそれぞれに対して, 計算機シミュレーションによる反復法を用いた.

画像生成のハイパーパラメータ  $\beta = 0.5$  を  $h = 1.0 \times 10^{-4}$  とし,  $L = 16$  の画像  $\xi$  を式 (1) の確率分布  $P(\xi)$  に従って生成した. ノイズモデルのハイパーパラメータを  $a = 0.5$ ,  $b = 0.75$ ,  $\kappa^2 = 9.0$  とし,  $L = 16$  の劣化画像  $\tau$  を式 (8) の確率分布  $P_{\text{out}}(\tau|\xi)$  に従って生成した. ハイパーパラメータ推定の際, 画像生成のハイパーパラメータは既知とし,  $\hat{\beta} = \beta = 0.5$  を  $\hat{h} = h = 1.0 \times 10^{-4}$  に固定した. ノイズモデルのハイパーパラメータを  $a = 0.5$ ,  $b = 0.75$ ,  $\kappa^2 = 9.0$  とした. 推定の際には  $\hat{b}$  に関しては  $\hat{b} = b = 0.75$  に固定した. 残りの  $\hat{a}$  と  $\hat{\kappa}$  に関して式 (42) と (44) を反復法で解くことを試みた. 図 4 にその求解過程を示す. 図から分かるように反復法の  $\hat{a}$  と  $\hat{\kappa}$  の初期値を真の値  $\hat{a} = 0.5$ ,  $\hat{\kappa}^2 = 9.0$  に設定しても, 反復法は収束しない. その他の初期値に関しても, 反復法は収束することなく, 求解過程は発散してしまう.

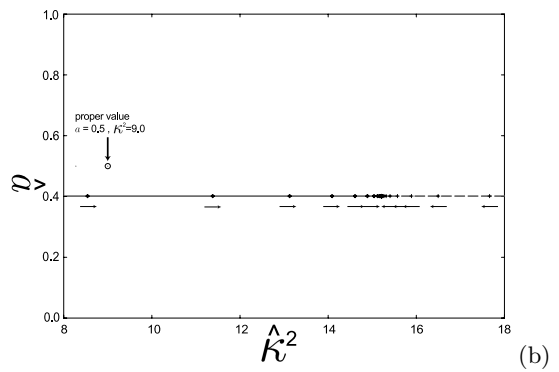
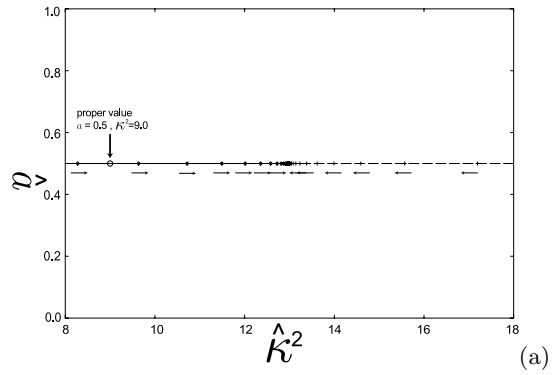


図 5  $\hat{a}$  と  $\hat{b}$  を固定して, 推定値  $\hat{\kappa}$  を反復法に求めた場合のダイナミクス. アルゴリズムが収束しているのが分かる.

Fig. 5 The dynamics in case of estimating  $\hat{\kappa}$  by the iterative procedure.  $\hat{a}$  and  $\hat{b}$  are fixed. The algorithm was converged.

このような現象の原因の1つとして, ノイズの確率モデルが持つ特異性が考えられる. 式 (10) のノイズの共分散行列の要素からも分かるように,  $a = 0$  である場合, 分散  $R_{i,j}$  は  $\kappa$  に依存しない. このように, モデルの挙動がモデルを記述するパラメータによらなくなるようなパラメータ領域が存在する場合, そのモデルは特異性を持つという. モデルの特異性が反復法に与える影響を確認するために, ノイズモデルのハイパーパラメータ  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{\kappa}$  のうち2つ, たとえば  $\hat{a}$  と  $\hat{b}$ , を真の値に固定して ( $\hat{a} = 0.5$ ,  $\hat{b} = 0.75$ ), 推定値  $\hat{\kappa}$  を反復法により求めた. その結果を図 5 (a) に示す. 図から, 推定値  $\hat{\kappa}^2$  は真の値  $\kappa^2 = 9.0$  には収束しないが, ある一定値 (この場合は約 13) には収束することが分かる. また, 図 5 (b) に示すように,  $\hat{a}$  と  $\hat{b}$  が真の値ではなくても, 推定値  $\hat{\kappa}^2$  はある値に収束する. いずれの場合も,  $\hat{a} \neq 0$  としているので, ノイズのモデルは特異性を持たない. これらの知見から, 反復法が収束しない原因をノイズの確率モデルが持つ特異性であると予想できる.

#### 4. 議論とまとめ

本論文では、確率的情報処理の枠組み内で画像修復を議論した。画像の生成モデルとして多重ガウス分布を仮定した。ノイズの生成過程も並進対称な共分散行列を持つ多重ガウス分布に従うとした。先行研究<sup>8)</sup>より、修復に用いる確率モデルが生成モデルと完全に一致するとき、修復誤差が最小になることが知られている。そこで、修復の確率モデルを記述するハイパーパラメータを周辺尤度最大化の枠組で議論した。アルゴリズムとしては、従来から用いられている対数周辺尤度の停留点方程式を反復法で解くアルゴリズムを用いた。その結果、反復法を用いたハイパーパラメータの求解過程は収束せずに発散してしまうことが分かった。そのメカニズムを調べるために、ノイズモデルが特異性を持たない領域での反復法の収束を調べた。その場合、アルゴリズムは収束することが分かった。これらの知見から、反復法が収束しない原因はノイズの確率モデルが持つ特異性であると予想することができた。

特異性を解消する方法にはいろいろあるが、1つの方法として、推定に用いるノイズモデルを変更する方法が考えられる。実際にはノイズの生成過程は未知であり、画像修復を確率的に取り扱うために、ノイズの生成過程を記述する確率分布を仮定した。これは必ずしも推定において真の確率モデルを使う必要はないことを意味し、たとえ真のモデルに特異性があっても、修復の際には特異性がないモデルを用いてもかまわないことを意味する。実際、我々の行った先行研究では、関連のあるモデルを関連のないモデルで修復することを試みている<sup>8)</sup>。この関連のないモデルには特異性は存在せず反復法は収束する。しかし、収束した結果は必ずしも良い推定値を与えないことが分かってる。特異性を持つ真のモデルを近似する特異性を持たないモデルの候補はたくさん存在する。その観点から考えると、特異性を持たないモデルのうち、どのモデルが最も良い修復結果を与えるかを議論することは重要である。

謝辞 本研究は、文部科学省科学研究費補助金若手研究(B)課題番号 16700197の援助を受けた。

#### 参考文献

- 1) Morina, R.: On the hierarchical Bayesian approach to image restoration: application to astronomical images, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol.8, No.2, pp.231-245 (1999).
- 2) Morina, R. and Katsaggelos K.: Bayesian and

regularization methods for hyperparameter estimation in image restoration, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol.8, No.2, pp.231-245 (1999).

- 3) Tanaka, K. and Inoue, J.: Maximum likelihood hyperparameter estimation for solvable Markov random field model in image restoration, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, Vol.E84-D, No.5, pp.1-8, (2001).
- 4) Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distribution and Bayesian restoration of images, *IEEE Trans. Pattern Anal. & Machine Intell.*, Vol.6, pp.721-741 (1984).
- 5) Probabilistic solution of ill-posed problems in computer vision, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.82, pp.76-89 (1987).
- 6) 田中和之: 統計力学的手法をもとにした画像修復, *日本物理学会誌*, Vol.5, p.25 (1999).
- 7) 西森秀稔: 有限温度の画像修復, *物性研究*, Vol.73, pp.850-857 (2000).
- 8) Tsuzurugi, J. and Okada, M.: Statistical mechanics of Bayesian image restoration under spatially correlated noise, *Physical Review E*, Vol.66, 066704 (2002).

#### 付 録

##### A.1 付 録

式(4)と(10)の行列  $G$  と  $R$  は、 $i$  に関して並進対称性を持つので、これらはフーリエ変換により対角化できる。修復画素  $\sigma_i$  の離散フーリエ変換を

$$\tilde{\sigma}_k = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_j \sigma_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}} \quad (48)$$

で定義すると、逆フーリエ変換は、

$$\sigma_j = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_k \tilde{\sigma}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}} \quad (49)$$

となる。周期境界条件より、 $k$  の各成分は以下のような値をとる。

$$0, \frac{2}{L}\pi, \frac{4}{L}\pi, \dots, \frac{2(L-1)}{L}\pi \quad (50)$$

原画像  $\xi_i$  と劣化画像  $\tau_i$  の離散フーリエ変換も同様に定義する。

フーリエ表記を行うと、式(1)の事前確率  $P(\sigma)$  は、

$$P(\sigma) = \frac{1}{Z_{\text{prior}}(\beta, h)} \times \exp \left[ - \sum_k (\beta \tilde{G}_k + h) \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}} \right] \quad (51)$$



$$\tilde{G}_k = \sum_q [2 - 2 \cos(\mathbf{k} \cdot \delta)] \quad (52)$$

となる。  $\sigma^T G \sigma$  という 2 次形式は  $G$  が並進対称性を持つため、フーリエ表記すると対角化可能で  $\sum_k \tilde{G}_k \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_{-k}$  と書ける。式 (10) の  $R_{i,j}$  も同様に、

$$\tilde{R}_k = (1-a)b^2 + ab^2 \sum_l e^{-\frac{l^2}{\kappa^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \quad (53)$$

となる。ただし、ベクトル  $\mathbf{l}$  の要素  $l$  がとりうる範囲は、

$$-(L-1) \leq l \leq L-1 \quad (54)$$

である。式 (9) の劣化過程  $P_{\text{out}}(\tau|\xi)$  もフーリエ表記すると、

$$P_{\text{out}}(\tau|\xi) = \frac{1}{Z_{\text{noise}}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_k \tilde{R}_k^{-1} (\tilde{\tau}_k - \tilde{\xi}_k) (\tilde{\tau}_{-k} - \tilde{\xi}_{-k}) \right] \quad (55)$$

となる。

(平成 15 年 11 月 10 日受付)  
(平成 16 年 1 月 9 日再受付)  
(平成 16 年 1 月 31 日採録)

綴木 駟



1998 年東京都立大学理学部物理学科卒業。2000 年九州大学大学院システム情報科学研究科修士課程修了。2001 年理化学研究所脳科学総合研究センター研修生。2003 年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了。2003 年京都大学大学院情報学研究科博士後期課程入学、現在同大学院在籍中。2003 年福井工業高等専門学校電子情報工学科助手。博士（理学）。画像修復と神経回路網の研究に従事。電子情報通信学会、システム制御情報学会各会員。



岡田 真人

1985 年大阪市立大学理学部物理学科卒業。1987 年大阪大学大学院前期課程修了。同年三菱電機（株）入社。1991 年大阪大学基礎工学部生物工学科助手。1996 年 10 月科学技術振興事業団川入学習動態脳プロジェクト研究員。2001 年 4 月理化学研究所脳科学研究センター脳数理研究チーム副チームリーダー。2004 年 7 月東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻教授、博士（理学）。物性物理、統計力学、半導体、神経回路モデル、計算論的神経科学、統計的学習理論、画像処理、符号理論の研究・開発に従事。1994、1996 年神経回路学会研究賞、1997 年（社）計測自動制御学会生体・生理工学会研究奨励賞、第 17 回 AVIRG（視聴覚情報研究会）賞ほか受賞。Society for Neuroscience、計測自動制御学会、日本神経回路学会、日本神経科学会、日本物理学会各会員。



英保 茂（正会員）

1964 年京都大学工学部電子工学科卒業、1966 年京都大学大学院工学研究科電子工学専攻修士課程修了。1967 年同博士課程中退、京都大学工学部助手（電子工学教室）。1972 年同工学部助教授（オートメーション研究施設）、工学博士、1987 年同教授、電子材料および回路素子部門担当。1989 年京都大学大学院工学研究科応用システム科学教室画像情報学講座担当、1998 年同大学院情報科学研究科システム科学専攻画像情報システム分野担当。電子情報通信学会、システム制御情報学会、計測自動制御学会、日本医用画像工学会、日本 ME 学会等各会員。