

5K-8

有限振幅情報に基づく非ガウス形不規則信号の各種統計量推定法*

谷田 眞† 横田幸恵‡ 隅田寿充‡ 南原英生‡

† 岡山理科大学大学院 工学研究科 ‡ 岡山理科大学 工学部

1. 緒言

不規則変動波形に関する各種の統計量は、一般に実測データに基づいて算出される。しかし実際の計測状況では、観測波形の上部や下部が有限的に振幅制限を受けた状態でデータ記録される場合がある。このような振幅情報が失われたデータから元の観測波形に関する統計情報を正確に算出することは困難であり、何らかのデータ処理が必要となる。

このような見地から、振幅制限を受けた波形の確率密度関数を、標準ガウス分布を初項とする直交展開表現とディラックのデルタ関数を用いて表現し、この分布を基に振幅制限の影響を軽減した平均値や標準偏差、および展開係数を推定する手法について報告してきた^{1) 2)}。

本報告では、平均値や標準偏差といった低次のモーメントよりは、むしろ観測波形の突発的な値（ピーク値）に重要性を持つ場合がある³⁾ことから、振幅制限を受けてピーク値そのものが失われたとき、その波形から元の不規則波形のピーク値分布の推定法について考察した。具体的には、ピーク値の評価にPowellの簡易ピーク評価法⁴⁾を採用し、振幅分布の展開係数に基づいてピーク値分布の展開表現を新たに導出する。そして、振幅制限を受けた波形から推定した展開係数を、上述のピーク値分布表現に取り入れることで、振幅制限を受けた波形から元の観測波形に関するピーク値分布の推定を行う。最後に、本手法の有効性をデジタルシミュレーションで確認する。

2. 理論的考察

2.1 振幅制限を受けたデータからの展開係数の推定

考察対象とする観測波形 $x(t)$ が、任意の確率密度関数をもつとき、エルミート多項式 $H_n(x)$ を導入し、展開係数を A_1, A_2, \dots, A_N とすれば、 $x(t)$ の確率密度関数 $p(x)$ はガウス分布を基幹として次式のように直交展開表現される。

$$p(x) = N_0(x) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N A_n H_n(x) \right\} \quad (1)$$

ただし、

$$N_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (2)$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \langle H_n(x) \rangle, \quad \langle \rangle : \text{平均操作}$$

$$H_n(x) : \text{エルミート多項式}$$

* An estimation method of statistical quantities for non-Gaussian random signals with amplitude limitations

Makoto Tanita†, Yukie Yokota‡, Toshimitsu Sumida† and Hideo Minamihara‡

† Graduate School of Engineering, Okayama University of Science

‡ Faculty of Engineering, Okayama University of Science

(1)式は平均値0、標準偏差1の標準ガウス分布を展開の基幹としているために、実際の平均値、標準偏差からのずれは展開係数に反映されることになる。

また、観測波形 $x(t)$ が下限レベル α_1 、上限レベル α_2 で制限を受けた有限振幅情報のみで表される時、その波形 $x_i(t)$ の確率密度関数を $p_i(t)$ とすると、これはディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を用いて次のように表される。

$$p_i(x) = p(x)u(x) + \beta_1\delta(x-\alpha_1) + \beta_2\delta(x-\alpha_2) \quad (3)$$

ただし、

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \alpha_1 < x < \alpha_2 \\ 0 & x \leq \alpha_1, \quad x \geq \alpha_2 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \int_{-\infty}^{\alpha_1} p(x)dx, \quad \beta_2 = \int_{\alpha_2}^{\infty} p(x)dx$$

ここで、振幅制限を受けた波形の N 次モーメントは、定義から次式のように表すことができる。

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_i(x)dx \quad (4)$$

よって、(3)式に関する 1 次から N 次モーメント統計量は(5)式のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= I_1 + A_1 I_2 + A_2 (I_3 - I_1) + \dots + \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 \\ m_2 &= I_2 + A_1 I_3 + A_2 (I_4 - I_2) + \dots + \beta_1 \alpha_1^2 + \beta_2 \alpha_2^2 \\ &\vdots \\ m_N &= I_N + A_1 I_{N+1} + A_2 (I_{N+2} - I_N) + \dots + \beta_1 \alpha_1^N + \beta_2 \alpha_2^N \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(5)式において、 α_1 と α_2 はあらかじめ与えられ、 β_1 、 β_2 、 m_1 から m_N は振幅制限を受けた波形 $x_i(t)$ から直接計算できる統計量である。また、 I_n は次式で定義される標準ガウス分布に関する n 次モーメントで、あらかじめ計算しておくことができる。

$$I_n = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^n N_0(x)dx \quad (6)$$

したがって、数値計算手法を用いることで (5)式を N 元連立方程式として展開係数について解くことができ、振幅制限の影響を軽減した展開係数を算出できる。これより平均値 μ 、標準偏差 σ は、

$$\mu = \langle x \rangle = A_1$$

$$\sigma = \sqrt{\langle (x - \mu)^2 \rangle} = \sqrt{2A_2 - A_1^2 + 1}$$

で求めることができ、(5)式で得た展開係数を用いて、振幅制限を受けた波形から元の観測波形の平均値や標準偏差などの統計量推定が可能となる。

2.2 ピーク値分布の推定

観測波形 $x(t)$ が、単位時間に特定のレベル x を正方向に横切る回数⁵⁾の期待値 $N(x)$ は、S.O. Rice により次のよ

うに与えられる。

$$N(x) = \int_0^{\infty} \dot{x} p(x, \dot{x}) d\dot{x} \quad (7)$$

ここで、 $p(x, \dot{x})$ は観測波形 $x(t)$ とその微分波 $\dot{x}(t)$ の結合確率密度関数である。いま、観測波形 $x(t)$ は非ガウス形であるが、定常な信号であるならば、その微分波 $\dot{x}(t)$ は、上り勾配と下り勾配の機会が等しいことからガウス分布で近似できると考えられる。ゆえに、微分信号 $\dot{x}(t)$ の分布はガウス分布で近似し、観測波形 $x(t)$ に関しては平均値 0、標準偏差 1 の標準ガウス分布を基幹とした直交展開表現を採用して、 $p(x, \dot{x})$ を次のように表す。

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right) \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N A_n H_n(x) \right\} \quad (8)$$

$\sigma_{\dot{x}}$: $\dot{x}(t)$ の標準偏差

(8)式を(7)式に代入し、積分関係

$$\int_0^{\infty} x H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} & (n=1) \\ H_{n-2}(0) & (n \geq 2) \end{cases} \quad (9)$$

を考慮すれば、単位時間に任意のレベル x を正方向に横切る回数の期待値は、次式で表現できる。

$$N(x) = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N A_n H_n(x) \right\} \quad (10)$$

一方、観測波形 $x(t)$ が狭帯域スペクトルを持つとき、Powell の簡易ピーク評価法が適用可能であり、あるレベル x 以上に存在するピーク数の期待値 $M(x)$ は、レベル交差情報に基づいて求まり、 $M(x) \approx N(x)$ となる。また、全てのレベルに存在する単位時間当たりのピークの期待数 M_0 は、平均値 μ 以上のピーク数と同じであると考えられるから、(10)式において $x = \mu$ とおけばよく、

$$M_0 = N(\mu)$$

より与えられる。したがって、ピーク値分布の確率密度関数 $p_p(x)$ は、(10)式を x で微分し全ピーク数で割ることによって得られ、

$$p_p(x) = -\frac{1}{N(\mu)} \frac{dN(x)}{dx} \quad (x \geq \mu) \quad (11)$$

となる。このことから、(10)式を(11)式に代入し、考察対象とする不規則信号の平均値を 0 とすると、ピーク値分布は

$$p_p(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \times \left\{ \frac{x + \sum_{n=1}^N A_n H_{n+1}(x)}{1 + \sum_{n=1}^N A_n H_n(0)} \right\} \quad (12)$$

のように表現される。この式に、(5)式の解として得た展開係数を取り入れることで、振幅制限を受けた波形

$x_t(t)$ から、元の観測波形 $x(t)$ に関するピーク値分布の推定が可能となる。

3. 実験的考察

本理論の正当性を確認するために、シミュレーション実験を行った。図 1 は、正規化した非ガウス形のシミュレーションデータに対して人為的に振幅制限 ($\alpha_1 = -10$ 、 $\alpha_2 = 0.1$) を施し、(5)式で求めた展開係数を反映させて振幅分布の推定を行った結果である。図より、展開係数を反映することで実験値に近い分布を示し、また、展開係数の項数を増やすことでより実験値に近い推定精度が得られることから、本手法の有効性が伺える。

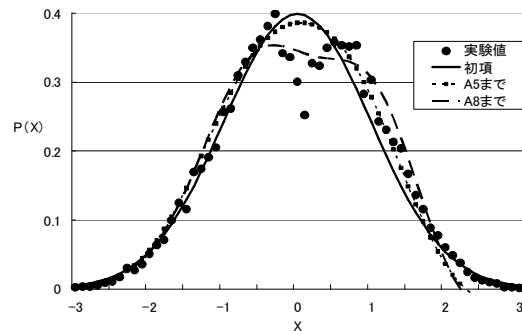


図 1 振幅分布の推定

図 2 は、 $\alpha_2 = 0.5$ として(12)式を適用し、ピーク値分布の推定を行った結果である。初項のみで推定した結果を実線で、展開係数を A4 まで用いて推定した結果を破線で示している。図より、振幅制限を受けた波形から推定した展開係数を(12)式に反映させることで、より実験値に近い分布を示すことがわかり、本手法を用いることで、高レベルの情報が失われた観測波形からピーク値分布の推定が可能であることが確認できる。

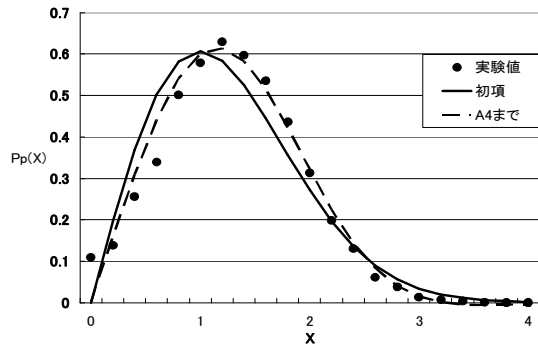


図 2 ピーク値分布の推定

参考文献

- 1) H. Minamihara et al., J. Acoust. Soc. Jpn(E) 16(3) 185-188(1995).
- 2) 江田卓永, 南原英生: 情報処理学会第 65 回全国大会, 1:225-226(2003).
- 3) 中本昌由, 他: 情報処理学会論文誌, Vol. 42, No. 5, 1272-1281(2001).
- 4) A. Powell, J. Acoust. Soc. Am. 30(12), 1130-1135 (1958).