

決定論的ディーラーモデルによる市場価格変動のモデル化

佐藤 彰 洋†

経済現象に動機付けされた問題は経済学だけでなく、情報学、物理学の研究者にも着目されるようになってきた。本稿では、近年の金融工学や計量経済学において発展してきた確率過程の研究について言及し、これと反対に微視的観点からとらえ、エージェントシミュレーションによってアプローチしている研究を紹介する。そしてエージェントシミュレーションと確率過程を橋渡しできる一例を示す。この例として、Takayasu ら (1992) によって提案された決定論的ディーラーモデルを取り上げそれを拡張したモデルを提案する。さらにこのモデルの決定論的に決まる変数を確率変数と見なす近似を行う操作によって、Bollerslev (1986) によって提案された GARCH (1,1) モデルに類する確率過程が導出できることを示す。

Modeling Market Price Fluctuations from the Microscopic Point of View

AKI-HIRO SATO†

The economically motivated problems have attracted the attention of many researchers in various fields: economics, informatics, and physics. This article shows stochastic processes developed in financial engineering and econometrics, and presents a possibility to bridge microscopic agent-based simulations to the stochastic processes. The extension of the deterministic dealer model proposed by Takayasu, et al. (1992) is considered. Moreover under the assumption that deterministic variables of the model are regarded as stochastic variables it is shown that the quasi-GARCH (1,1) process proposed by Bollerslev (1986) is derived for the market price changes.

1. はじめに

日々の経済ニュースは市場価格が不規則に変化することを伝えている。外国為替、証券、先物、現物など世界には様々な市場が存在しており、いろいろな商品が取引されることによって、めまぐるしく価格を変えていく。これらの市場は多数の参加者により構成される場である。そのような多くの市場参加者から構成される市場はときに荒々しく、また、ときに静かに推移していくが、そのようなゆらぎはなぜ生じるのだろうか。また、どのようなゆらぎがあるのであろうか。

金融市場に関する数理的研究は経済学（特に金融工学と計量経済学）の分野において長く研究が続けられ発展してきた。特に確率過程を用いた現実の時系列データからモデルパラメータを推定する方法は非常に高度に発達している。

近年、情報学や物理学の立場から経済現象を対象と

する研究者が増えてきている。これは情報技術の進歩により、これまでとらえることが難しかった膨大な時系列データが蓄積でき、かつ処理することができるようになったことが背景にあげられる。特に、物理学に着目すると物理学者が行った経済現象の分析報告が1990年代から科学専門誌に掲載されるようになっていく。研究内容としては、高頻度経済時系列の統計的手法を用いた解析と数理モデルによる研究があげられる。特に数理モデルによる解析手法として、エージェントモデルに立脚した微視的モデルの発展が目覚ましい。

本稿では金融市場の数理モデル研究を大まかに紹介する。1つは確率過程を用いた価格時系列やその他のゆらぎのモデル化、もう1つはエージェントモデルを用いた微視的モデル化である。そして、この2つのアプローチが橋渡しできる一例として、ディーラーモデルによる研究を紹介する。

本稿は以下の構成からなっている。2章で外国為替市場の仕組みを紹介する。そして3章において、金融市場で観測されているゆらぎの統計的性質を紹介する。4章では市場の数理モデルを確率過程とエージェ

† 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
Department of Applied Mathematics and Physics,
Graduate School of Informatics, Kyoto University

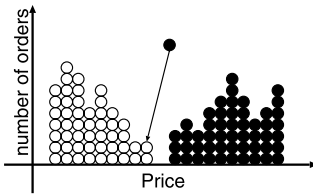


図 1 仮想的な注文板．白丸が買い注文，黒丸が売り注文を表す．新しい売り注文（黒丸）が買い注文（白丸）に加わると取引が発生する

Fig. 1 Conceptual illustration of order board. Unfilled circles represent buying orders, and filled circles selling orders.

ントモデルの両面から紹介する．

特に，経済物理学の研究の中で我々が開発してきたディーラーモデルについて詳しく記し，ディーラー間の相互作用からどのように極限的に確率過程が近似されるのかについて述べる．5 章はまとめと結論に当てられる．

2. 金融市場

金融市場の一例として，外国為替市場を考察する．新聞やニュースにおいて，日本円と米ドルの交換レートが毎日変化していることは周知の事実であるが，そのとき表示されている価格はどのような意味があるのだろうか．たとえば 107.82-107.94 という表示について考えてみよう．前の 107.82 という数字であるが，これは 107.82 円の買い注文価格がその瞬間最高値であることを意味している．一方，後ろの 107.94 という数字は売り注文価格の最安値が 107.94 円であることを示している．これら 2 つの価格を見ることによって，現在の妥当な取引価格が 107.82 円から 107.94 円の間にあると推測される．また，日本円と米ドルの場合，1 銭が取引の最小の単位である．この状況は，仮想的な注文板を考えることによってさらによく理解することができる．横軸に注文価格，縦軸に注文を並べてみると図 1 のようになる．買い注文は最大買い注文価格以下に多数存在している．一方，売り注文価格も最小売り注文価格以上に多数存在している．この状態に新しく売り注文が入ると取引が発生する．

このように最大買値と最小売値が瞬時に分かる背景には，ブローキングシステムの発達が理由としてあげられる．ブローキングシステムとは，登録された機関投資家が指値を逐次提示することにより，現在の最大買い注文価格と最小売り注文価格をつねに知らせ，取引を促進するシステムである．もともとブローキングシステムは，電話や FAX を用いたブローカ集団の情報交換によって成り立っていたが，近年の情報技術の

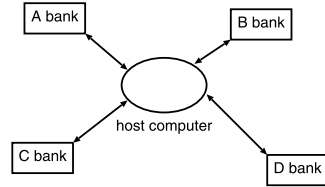


図 2 電子ブローキングシステムの模式図．各銀行に設置された端末を用いてホストコンピュータ上で売注文値と買注文値を知らせあい，取引を促進する

Fig. 2 Conceptual illustration of electric broking system.

進歩によって，多くの銀行などの機関投資家は電子ブローキングシステムを導入している．電子ブローキングシステムの模式図を図 2 に示す．端末を用いて共通のサーバに逐次指値を提示することにより，現在の最大買い注文価格と最小売り注文価格をつねに知らせ，取引を促進するシステムである．

さらに，外国為替市場の 1 日は地球の自転に連動して銀行の営業時間帯である国で主として行われる．世界で最も早く朝を迎えるのはオセアニア地域であり，その後，アジア，ヨーロッパ，アメリカの順に主要な取引地域が移り変わっていく．そして，各地域に特徴的な取引パターンが存在する．一般に，取引時間帯によって，1 日（24 時間）は 3 つの活動時間帯（アジア活動時間，ヨーロッパ活動時間，アメリカ活動時間）に分割される．

このように外国為替市場は電子ブローキングシステムの存在によって，世界中の今の最も高い買い値と最も安い売り値が瞬時に市場参加者に伝わる仕組みとなっており，決済は電子的に行われる^{1),2)}．

3. 金融市場の統計的性質

市場においては，取引における偶然性と必然性から，様々な量がゆらいでいる．収益率や市場価格は応用上最も重要視される量であるが，それ以外にも取引間の時間間隔や，単位時間あたりの取引回数，取引量，指値などありとあらゆる量がゆらいでいる．

たとえば収益率を例にあげて考えてみる．収益率は 2 つの異なる時間での市場価格 $P(t)$ の対数差として定義される量である．

$$r(t) = \ln P(t) - \ln P(t - \Delta t) \quad (1)$$

一方，最近ティックデータと呼ばれる各取引でどのような価格で取引が行われたかのデータを得ることができるようになってきたので，時間差ではなく取引ごとの収益率というものを考えることができるようになってきている．

このような高頻度時系列データの分析から，近年次

のことが分かってきている．収益率の自己相関関数は初めの数ティックは負の相関を示し、すぐにゼロになる．このことは、価格の動きが反転しやすいことを意味している．その一方、収益率の2乗の自己相関関数は長時間相関を示す．これをボラティリティの長期記憶性という．これに関係して、一度大きな変動が生じるとその後も大きな変動が持続するボラティリティクラスタリングと呼ばれる現象がある．また、収益率の確率密度関数はガウス分布より裾野の広い形状（非ガウス性）をしている³⁾．

価格だけでなくそれ以外の量、たとえば、取引回数や取引量についての解析も進んでいる．たとえば、ニューヨーク証券取引所で取引されるある銘柄の単位時間あたりの取引量はベキ指数約1.5のベキ則に従い、また、単位時間あたりの取引回数はベキ指数約3.4のベキ則に従うことが報告されている⁴⁾．

このように市場価格だけでなく、取引回数や取引量もゆらいであり、ベキ乗則と呼ばれるある種の統計的性質を満足している．このベキ乗則の存在から、多くの研究者はその背後に共通のメカニズムが潜んでいるのではないかと期待している⁵⁾．

4. 数理モデル

4.1 確率過程

価格変動のモデル化の追求は、金融工学や計量経済学の研究者らによって確率過程を用いて現象論的な立場から長年研究されてきた．たとえば幾何ブラウン運動は市場のゆらぎをドリフトとボラティリティに分解した確率微分方程式として記述するものである．

$$\frac{dP}{dt} = (\mu + \sigma \xi(t))P \quad (2)$$

ここで、 P を市場価格、 μ をドリフト、 σ をボラティリティと呼ぶ． $\xi(t)$ は白色ガウスノイズである．このモデルを出発点としてオプション価格を見積もる Black-Scholes 式が導出されることは有名である．しかし、このモデルではドリフトやボラティリティが一定とする必要があるため、現実の価格のゆらぎで観測されるボラティリティクラスタリングをモデル化できなかった．また収益率が

$$\ln P(t) - \ln P(t - \Delta t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \int_{t-\Delta t}^t \xi(t') dt' \quad (3)$$

と表されることより、収益率の確率密度関数が分散 $\sigma^2 \Delta t$ 、平均 $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t$ のガウス分布となり、収益率の確率密度関数が裾野の広い分布となることを説明できないという問題点があった．

このことをふまえ、1980年代から GARCH (Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity) 過程と呼ばれるいわゆるボラティリティ変動モデルが提唱されるようになった⁶⁾．GARCH 過程⁷⁾ はボラティリティ $\sigma(t)$ 、市場価格に対して AR 過程を適用したときの残差 $\epsilon(t)$ とすると

$$\begin{cases} \epsilon(t) &= \sigma(t)n(t) \\ \sigma(t)^2 &= \omega + \alpha\epsilon(t-1)^2 + \sigma(t-1)^2 \end{cases} \quad (4)$$

で与えられる．ここで $n(t)$ は平均0の標準正規乱数であり、 ω, α は正の定数である．

また、取引量や取引回数などの正の値しかとらない量のベキ乗則を説明するために、ACD (Autoregressive Conditional Duration) モデル^{8),9)} や SMP (Self-Modulation Process)¹⁰⁾ が有望視されている．ACD(p, q) モデルは

$$\begin{cases} x_s = \phi_s n_s \\ \phi_s = \omega + \sum_{k=1}^p \alpha_{s-k} x_{s-k} + \sum_{j=1}^q \beta_{s-j} \phi_j \end{cases} \quad (5)$$

と表現される．

また、SMP(K) は過去 K ステップの移動平均値に乗算的に作用するノイズと加算的に作用するノイズを持つ確率過程である．ベキ乗則変動を作りだすことができ、かつ、その変動は $1/f$ ゆらぎである¹⁰⁾．

$$\begin{cases} x_{j+1} &= \mu_j \langle x_j \rangle + F_j \\ \langle x_j \rangle &= \frac{1}{K} \sum_{k=j-K+1}^j x_k \end{cases} \quad (6)$$

4.2 エージェントモデル

4.2.1 エージェントモデルとは

1990年代の複雑系研究の進展を受け、物理学の研究者の中で経済現象に物理学的手法を用いる研究者が現れ、経済物理学という学際領域を形成している．この方法論は、統計物理学で培われた相転移（臨界現象）や自己組織化、共同現象という眼鏡を使って、経済現象に迫ろうという方法論である．さらに、微視的モデルを用いミクロからマクロへの接近を、これらの眼鏡を使って行おうとしている．これは、計量経済学の研究者が価格のゆらぎを観測し、確率の眼鏡を使って、それを最もよく説明する確率過程を考えようとする行為と逆のアプローチである．

このアプローチの1つとして、エージェントモデルを用いた多数の市場参加者を考慮した閉じた市場のモデルがある．エージェントモデルとは、エージェントと呼ぶ動的素子を考え、この素子が外部から入力に基づき行動を選択する．そして、これらの行動から市場

価格が決定されるというモデルである。この種の研究は、マルチエージェント¹¹⁾や人工市場¹²⁾と密接な関係にある研究分野であり、マイノリティゲーム、スピンモデル、ディーラーモデルなど近年多くのモデルが提案されている。

マイノリティゲームとは、Challet らによって提案された El Falor のバーの問題 (Arthur が提案) を起源とする市場モデルである¹³⁾。エージェントは各ターンで必ず売りあるいは買いのどちらかの立場を選択し、売りと買いの立場を選択したエージェントの総数に依存して市場価格が決まる。さらに、過去に市場価格が上昇、下降したという記憶列からその立場を判断する戦略を持っている。それぞれの戦略には得点があり、高得点の戦略ほどよく用いられる。そして売り(買い)エージェントが多い場合は市場価格は下降(上昇)する。オリジナルのマイノリティゲームではモデルパラメータ(記憶総数とエージェント数の比)がある値において非平衡相転移が生じることが見出されている¹⁴⁾。

スピンモデルは売買行為を 1 と -1 のスピンとしてモデル化している。スピンモデルの歴史は古く 1920 年代にまで遡る。もともとは強磁性体のモデルであったが、その後社会科学にも適用されるようになった。1971 年に社会集団内のバイアスについての数理モデルとしてイジングスピンモデルが用いられた例がある¹⁵⁾。

現在は改良を加えられ市場変動を説明するモデルとして提案されている¹⁶⁾⁻¹⁸⁾。スピンモデルでは、エージェントは過去の価格変動に応じて売買行動(スピン: 買い手 = 1, 売り手 = -1)を確率的に選択する。そして、そのスピンの総和が超過需要(供給)となり、市場価格を上昇(下降)させる原動力になると考える。

これは金融市場における意思決定の相互依存性をモデル化したものであり、バブルやクラッシュの発生を、ほとんどのスピン(意思決定)がそろうという共同現象の対称性の破れとして理解することを提案している。スピンモデルに関する優れたサーベイ論文として藤原らによるものがある¹⁹⁾。

また、近年 Babinec²⁰⁾や Krawiecki ら²¹⁾は確率共鳴(共振)の観点からスピンモデルを考察している。彼らは市場参加者の意思決定に直接影響を与えないような弱い情報の共有が存在し、かつ、その情報が時間的に脈動している場合には、市場価格にこの脈動が伝達する可能性を示唆している。

ディーラーモデルは Takayasu らによって提案された動的エージェントからなるモデルである^{22),23)}。エー

ジェントは過去の価格変動に応じて売り値と買い値を変化させ、取引条件が満足されたときに取引を行う。そのときどきで取引を行った売り手と買い手の注文価格から取引価格が決まり、その価格が全ディーラに通知されることによって市場価格となる。そして、市場価格差に現れるべき振舞いの起源を係数がランダムに変化する Langevin 系であると提唱した。

ここでは、ディーラーモデルの研究^{24),25)}を紹介し、微視的なディーラの相互作用から計量経済学で経験的に導入された GARCH 過程と類似した確率過程が近似的に導出されることを示す。

4.2.2 ディーラーモデル

ディーラーモデルは N 人のディーラ(エージェント)から構成されるモデルである。各ディーラは買いと売りの 2 つの立場を有し、買い指値と売り指値のどちらかを毎回市場(共通の板)に提示する。そして、ある取引条件を満足したディーラ間で取引価格を決め、その取引価格が市場価格として全ディーラに知らせる。市場状況に応じて取引を行ったディーラは買い手と売り手の立場を選べ、取引行動を繰り返すというモデルである。

N 人のディーラ間での売買条件を考察する前に、まず、2 者間での相対取引について考察する。一般的に、買い手はより安く購入したいと望み、一方、売り手はより高く販売したいと望むものである。しかしながら、それでは取引を成立させることは難しい。なぜなら、買い手は売り手が販売することができない安い価格での購入を望むかもしれないからである。

このような状況でもし両者が取引を行いたいと望むのであれば、両者で交渉を行うだろう。買い手は購入希望価格を少しずつ上げるであろう。また、売り手は販売希望価格を少しずつ下げるかもしれない。これを定式化すると

$$\begin{cases} B(t+1) = B(t) + \gamma_B(t) \\ S(t+1) = S(t) - \gamma_S(t) \end{cases} \quad (7)$$

である。ここで、 $B(t)$ 、 $S(t)$ はそれぞれ時刻 t における買い手と売り手の提示価格であり、 $\gamma_B(t)$ 、 $\gamma_S(t)$ は売り手と買い手の価格更新量である。また取引が成立するのは明らかに

$$B(t) \geq S(t) \quad (8)$$

のときである。

この 2 者間での考察は市場を形成しても同様に成立する。時刻 t におけるエージェント i の提示売買価格を $p_i(t)$ と表記すると、提示価格の発展方程式は

$$p_i(t+1) = p_i(t) + D_i(t)\gamma_i(t) \quad (9)$$

で与えられる．ここで， $D_i(t) = \pm 1$ であり，1 のとき買い手，-1 のとき売り手を意味する．さらに， $\gamma_i(t)$ は売買更新量であり非負値をとると仮定する．また， $\gamma_i(t)$ は過去の市場価格差に依存すると仮定し，

$$\gamma_i(t) = |1 + c_i \Delta P_{prev}| a_i \quad (10)$$

で与えられるものとする．ここで， a_i, c_i はそれぞれ市場価格が変化しない場合のエージェントの潜在的価格変更量，前回の市場価格差に依存した価格変更量に関係する係数である． a_i, c_i はシミュレーションを行うとき，それぞれ， $(0, \alpha)$ ， $(-c, c)$ の一様乱数で与える．

次に市場価格の決まり方について述べる．時刻 t における市場価格 $P(t)$ は次のルールによって決まると近似する．

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\min\{p_i(t)\}_{seller} + \max\{p_i(t)\}_{buyer}) & (\max\{p_i(t)\}_{buyer} \geq \min\{p_i(t)\}_{seller}) \\ P(t-1) & \\ \frac{1}{2} (\max\{p_i(t)\}_{buyer} + \min\{p_i(t)\}_{seller}) & (\max\{p_i(t)\}_{buyer} < \min\{p_i(t)\}_{seller}) \end{cases} \quad (11)$$

ここで， $\min\{\}_{seller}$ は売り手の中での最小値， $\max\{\}_{buyer}$ は買い手の中での最大値を意味する．すなわち，最小の売値と最大の買値をつけたディーラー間で取引が行われた場合のみ，市場価格が決まり，そうでなければ市場価格は以前のものが保たれる．

また取引を行った後，もし市場価格が上昇しているのであれば，そのディーラーは買い手に，下降しているのであれば，売り手に立場を変える．市場価格が変化していない場合には，買い手と売り手の立場を入れ換える．

$$D_i(t+1) = \begin{cases} 1 & (\Delta P_{prev} > 0) \\ -D_i(t) & (\Delta P_{prev} = 0) \\ -1 & (\Delta P_{prev} < 0) \end{cases} \quad (12)$$

そして以下のように現在の市場価格より $\Lambda (> 0)$ だけずらして新しい指値とする．

$$p_i(t+1) = P(t) - D_i(t+1)\Lambda \quad (13)$$

このディーラーモデルの数値シミュレーションを行った．図 3 は市場価格の時系列と市場価格差のそれである．市場価格差は $\Delta p_s = P(\tau_s) - P(\tau_{s-1})$ で定義した．ここで τ_s は s 回目の取引が発生した時刻である．同様に価格差の確率密度関数とその累積分布関数を図 4 に示す．ここで，累積分布関数は

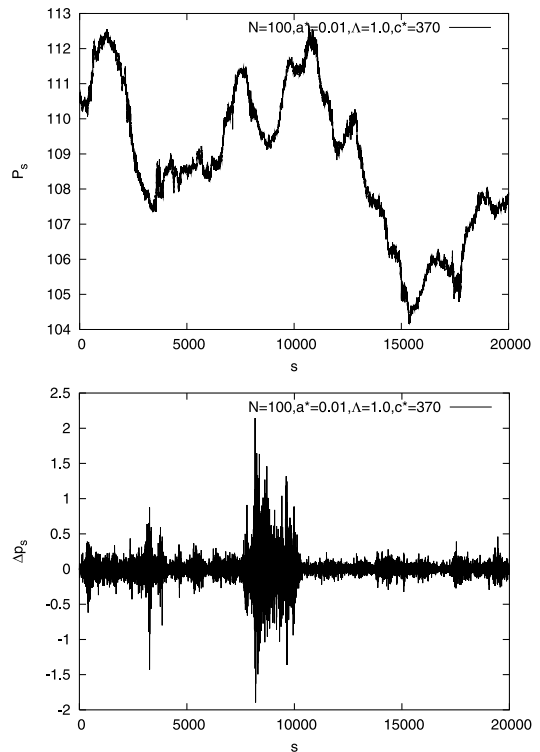


図 3 $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0, c = 370.0$ のときの市場価格の時系列 (上) とその価格差 (下)
 Fig. 3 A typical example of market prices (top) and price changes (bottom) at $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$ and $c = 370.0$.

$$F(\geq |x|) = \int_{-\infty}^{-|x|} f(x') dx' + \int_{|x|}^{\infty} f(x') dx' \quad (14)$$

で定義される．ここで， $f(x)$ は x の確率密度関数である．数値シミュレーションから市場価格差は裾野の広い分布となり，ボラティリティクラスタリングが生じていることが確認された．

4.2.3 市場価格差の近似

ディーラーモデルに対して近似を行うことにより，極限的に市場価格差に対して確率過程が導出できることを示す．

ここで Δp_s を s 回目の取引で生じた価格差， τ_s を s 回目の取引が起こったときのステップとする． n_s を $s-1$ 回目の取引が発生してから s 回目の取引が発生するまでの時間間隔とする．すなわち， $n_s = \tau_s - \tau_{s-1}$ である．また， M_s を s 回目の取引での買い値， m_s を s 回目の取引の売り値とする．

式 (11) よりステップ τ_s での市場価格 $P(\tau_s) = (M_s + m_s)/2$ である．また， $\Delta p_s = P(\tau_s) - P(\tau_{s-1})$ より

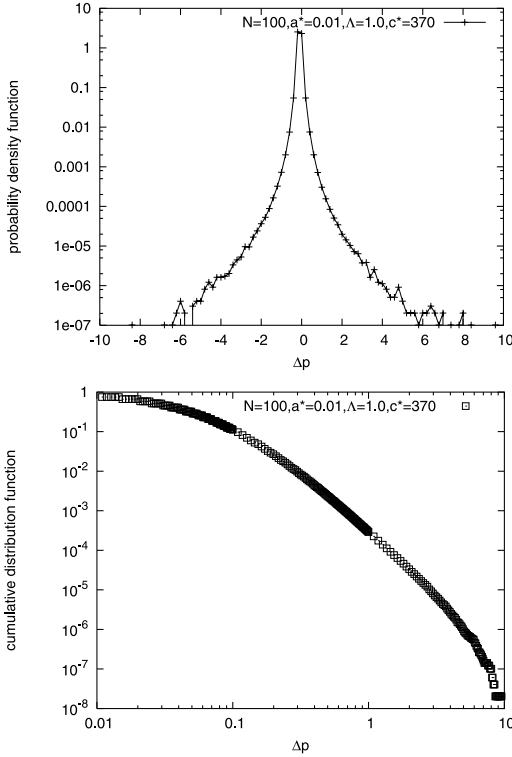


図4 $N = 100$, $\alpha = 0.01$, $\Lambda = 1.0$, $c = 370.0$ のときの価格差の確率密度関数 (上) とその累積分布関数 (下)

Fig. 4 Semi-log plot of a probability density function (top) for market price changes and corresponding cumulative distribution function (bottom) at $N = 100$, $\alpha = 0.01$, $\Lambda = 1.0$ and $c = 370.0$.

$$\begin{aligned}\Delta p_s &= \frac{1}{2}(M_s + m_s) - \frac{1}{2}(M_{s-1} + m_{s-1}) \\ &= \frac{1}{2}(M_s - M_{s-1}) + \frac{1}{2}(m_s - m_{s-1}).\end{aligned}\quad (15)$$

となる。ここで、式 (10) より τ_s に買い手となるべきディーラー j は τ_{s-1} から τ_s までの間 1 ステップあたり $|1 + c_j \Delta p_{s-1}| a_j$ を提示価格に n_s 回加える。同様に τ_s に売り手となるべきディーラー i は τ_{s-1} から τ_s までの間 1 ステップあたり $|1 + c_i \Delta p_{s-1}| a_i$ を提示価格から n_s 回引く (図 5 参照)。ここで j と i はそれぞれ τ_s ステップで買い手と売り手になるディーラーを表す。よって式 (15) の第 1 項と第 2 項は

$$M_s - M_{s-1} = |1 + c_j \Delta p_{s-1}| a_j n_{s-1} - K_s, \quad (16)$$

$$m_s - m_{s-1} = k_s - |1 + c_i \Delta p_{s-1}| a_i n_{s-1}, \quad (17)$$

によって与えられる。ここで K_s は τ_{s-1} で買い手になったディーラーと τ_s で買い手になったディーラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表す。同様に k_s は τ_{s-1} で売り手になったディーラーと τ_s で売り手になったディー

ラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表す。式 (17) と式 (16) を式 (15) に代入すると

$$\begin{aligned}\Delta p_s &= \frac{1}{2} |1 + c_j \Delta p_{s-1}| a_j n_{s-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} |1 + c_i \Delta p_{s-1}| a_i n_{s-1} + \frac{1}{2} (k_s - K_s).\end{aligned}\quad (18)$$

を得る。

売り手と買い手になるディーラー i, j の出現はランダムであるとして、式 (18) の 2 乗を i, j に対して平均をとる。ディーラー数 N が大きいとき K_s と k_s はランダムに分布し、かつ K_s と k_s は対称なので $\langle K_s - k_s \rangle = 0$ である。同様に売り手と買い手の対称性から $\langle \Delta p_s \rangle = 0$ である。

$$\begin{aligned}\langle \Delta p_s^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle (k_s - K_s)^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \langle |1 + c \Delta p_{s-1}|^2 \rangle \langle a^2 \rangle \langle n_s^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \langle |1 + c \Delta p_{s-1}|^2 \rangle \langle a^2 \rangle \langle n_s^2 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle |1 + c \Delta p_{s-1}| \rangle \langle |1 + c \Delta p_{s-1}| \rangle \langle a \rangle^2 \langle n_s^2 \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle (k_s - K_s)^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle |1 + c \Delta p_{s-1}|^2 \rangle \langle a^2 \rangle \langle n_s^2 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle |1 + c \Delta p_{s-1}| \rangle^2 \langle a \rangle^2 \langle n_s^2 \rangle.\end{aligned}$$

さらに、 $\langle c \rangle = 0$ の仮定を使って第 2 項を計算すると

$$\begin{aligned}\langle \Delta p_s^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle (k_s - K_s)^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\langle a^2 \rangle + \langle c^2 \rangle \langle a^2 \rangle \Delta p_{s-1}^2 \right. \\ &\quad \left. - \langle |1 + c \Delta p_{s-1}|^2 \rangle \langle a \rangle^2 \right) \langle n_s^2 \rangle.\end{aligned}\quad (19)$$

を得る。式 (19) の第 1 項 $\langle (k_s - K_s)^2 \rangle$ は $s-1$ 時点での分散 $\langle \Delta p_{s-1}^2 \rangle$ に比例し、第 2 項は正の定数、第 3 項は $s-1$ 時点での価格差の 2 乗に比例している。第 4 項 $\langle |1 + c \Delta p_{s-1}|^2 \rangle \langle a \rangle^2$ の詳細な計算は割愛するが、 $|\Delta p_{s-1}| > 1/c$ のとき第 4 項は Δp_{s-1}^2 に反比例し、その影響は微小と見なせる。

このことから、式 (19) は式 (4) で示した GARCH 過程に非常によく似た構造を持っている。

この近似はディーラー数 N が大きいことによって自由度が十分大きくなるため、実際には決定論的に決まる c_i, a_i, k_s, K_s, n_s といった各変数が確率変数に近い振舞いをすると仮定し、価格差の発展方程式は近似的に確率過程と見なして得た。この自由度の高さが市場価格にゆらぎを生じるメカニズムと考えることができる。

4.2.4 モデルパラメータ

このモデルは全部で 4 つのパラメータを有してい

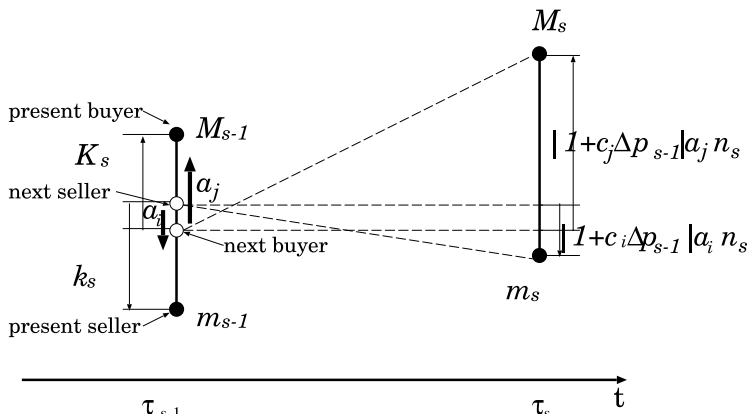


図 5 τ_{s-1} ステップから τ_s ステップにおける売り手と買い手の動きの概念図. M_s は s 回目の取引での買値, m_s は s 回目の取引での売値を表す. ここで K_s は τ_{s-1} で買い手になったディーラーと τ_s で買い手になったディーラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表す. 同様に k_s は τ_{s-1} で売り手になったディーラーと τ_s で売り手になったディーラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表す.

Fig. 5 Conceptual illustration of temporal development for selling prices and buying prices from τ_{s-1} to τ_s , M_s and m_s represent buying price and selling price at the s 'th trade, respectively K_s represents the difference between the first quote and the second quote for buyers, and k_s for sellers.

る.ディーラー数 N , ポジション変更時にディーラーが指値とする価格と市場価格との差 Λ , エージェントの個性を決める α, c である.

外国為替市場の活動時間帯を 3 つの活動時間に分割して考える. ある活動時間帯にある機関投資家数をほぼ一定と近似し, これがディーラー数 N に比例すると考えることにより, N を推定する. さらに Λ は市場参加者へのアンケートによってとらえることができるかもしれない. また, α と c は取引価格の時系列データから取引間価格差を算出し, この取引間価格差時系列データに対して GARCH 過程を仮定したうえで, 最尤法などのパラメータ推定手法を用いることにより推定することができる⁶⁾.

これまでの GARCH 過程などの確率過程を用いた分析では時系列データからパラメータを推定しても, このパラメータをエージェントの行動と結び付けることが困難であるという問題点があった. これと比較して, ディーラーモデルのモデルパラメータを推定することは, 時系列データからディーラー特性を統計的にせよ推定できることを示唆する.

特に, 高頻度時系列データから得られる統計量とディーラー行動との関連付けは, 今後発展が期待される課題である. そしてこれらに関連付けることにより, 市場を理解し市場変動に対応するマネジメントの道具となることを期待する. ディーラーモデルによりエージェントの行動特性をつかむことによって, 価格変動

のマネジメントに有用な道具となっていくことが期待される.

5. 結 論

金融市場の一例として, 外国為替市場について言及した. 様々な量が偶然性と必然性からゆらいであり, それらの多くはべき乗則とよばれる統計的性質を満足している. これらの共通性から金融市場に潜むべき乗則には共通のメカニズムが潜んでいると多くの研究者は考えている.

計量経済学で研究されてきた確率過程をいくつか紹介し, 現象論的な立場から金融時系列にアプローチする方法を紹介した. 次に, 情報学, 物理学で研究されている微視的モデルであるエージェントモデルについて言及し, 我々が発展させてきた決定論的ディーラーモデルを紹介した. そして, 先に述べた計量経済学で研究されてきた確率過程が, ディーラーモデルのある種の近似によって導出できることを示した. このことは, 金融市場におけるミクロとマクロの橋渡しが可能であることを示唆していると考ええる.

金融市場ではここ 10 年の間に急速に情報技術が浸透し, 膨大な取引に関するデータを計測, 蓄積することができるようになっている. その結果, かつては予想もできなかった取引に関する統計量を算出できるようになりつつある. このような背景にあって, エージェントモデルを用いた微視的なアプローチは膨大な取引

の統計量を理解する道具として、今後発展していくと期待する。

経済現象のゆらぎの定量的解析とそのメカニズムを科学的に理解する研究が進展している。これらの進展はゆらぎをマネジメントする方法論の発展に貢献していくであろう。

謝辞 ここで、本稿を執筆するにあたり、以下の方々にお世話になりました。青木正直氏 (UCLA)、高安秀樹氏 (ソニー CSL)、高安美佐子氏 (東京工業大学)、宗像豊哲氏 (京都大学)、森谷博之氏 (オックスフォード・ファイナンシャルエデュケーション)(アイウエオ順) 各氏に謝意を表明いたします。また、この場をおかりし、統数研/総研大「経済物理学とその周辺」研究会の参加者の皆様から多くのコメントをいただきましたことを深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) デローザ, D.F. (著), 森谷博之, 及川 茂 (訳): 外国為替のオプション, 東洋経済新報社 (2000).
- 2) 高安秀樹, 高安美佐子: エコノフィジックス市場に潜む物理法則, 日本経済新聞社 (2001).
- 3) Mantegna, R.N. and Stanley, H.E.: *An Introduction to Econophysics — Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press (2000).
- 4) Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V. and Stanely, H.E.: Understanding the cubic and half-cubic laws of financial fluctuations, *Physica A*, Vol.324, pp.1–5 (2003).
- 5) ディディエ・ソネット (著), 森谷博之 (監訳): [入門] 経済物理学, PHP 研究所 (2003).
- 6) 渡部敏明: ボラティリティ変動モデル, 朝倉書店 (2000).
- 7) Bollerslev, T.: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol.31, pp.307–327 (1986).
- 8) Engle, R.F. and Russell, J.R.: Forecasting the frequency of changes in quoted foreign exchange prices with the autoregressive conditional duration model, *Journal of Empirical Finance*, Vol.4, No.2, pp.187–212 (1997).
- 9) Sato, A.-H.: Explanation of power law behavior of autoregressive conditional duration processes based on the random multiplicative process, *Physical Review E*, Vol.69, No.4, p.047101 (2004).
- 10) Takayasu, M. and Takayasu, H.: Self-modulation processes and resulting generic $1/f$ fluctuations, *Physica A*, Vol.324, pp.101–107 (2003).
- 11) 生天目章: マルチエージェントと複雑系, 森北出版 (1998).
- 12) 和泉 潔: 人工市場, 森北出版 (2003).
- 13) Challet, D., Marsili, M. and Zhang, Y.-C.: Modeling market mechanism with minority game, *Physica A*, Vol.276, pp.284–315 (2000).
- 14) Coolen, A.C.C.: *The mathematical theory of minority games*, Oxford University (2005).
- 15) トニス・ヴァーガ (著), 新田 功, 永原裕一 (訳): 複雑系と相場, 白桃書房 (1999).
- 16) Aoki, M.: *New Approaches to Macroeconomic Modeling*, Cambridge University Press (1996).
- 17) Lux, T. and Marchesi, M.: Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market, *Nature*, Vol.397, pp.498–500 (1999).
- 18) Kaizoji, T.: Speculative bubbles and crashes in stock markets: An interacting-agent model of speculative activity, *Physica A*, Vol.287, pp.493–506 (2000).
- 19) 藤原義久, 海蔵寺大成: ボラティリティと市場モデル - 経済物理から経済科学へ, シミュレーション, Vol.21, No.2, pp.96–103 (2003).
- 20) Babinec, P.: Stochastic resonance in an interacting-agent model of stock market, *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol.13, pp.1767–1770 (2002).
- 21) Krawiecki, A. and Hołyst, J.A.: Stochastic resonance as a model for financial market crashes and bubbles, *Physica A*, Vol.317, pp.597–608 (2003).
- 22) Takayasu, H., Miura, H., Hirabayashi, T. and Hamada, K.: Statistical properties of deterministic threshold elements — the case of market price, *Physica A*, Vol.184, pp.127–134 (1992).
- 23) Sato, A.-H. and Takayasu, H.: Dynamical models of stock market exchanges: From microscopic determinism to macroscopic randomness, *Physica A*, Vol.250, pp.231–252 (1998).
- 24) Sato, A.-H. and Takayasu, H.: Derivation of ARCH(1) process from market price changes based on deterministic microscopic multi-agent, *Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics*, Takayasu, H. (Ed.), pp.171–178, Tokyo, Nikkei, Springer-Verlag (2002).
- 25) Sato, A.-H.: Time interval between successive trading in foreign currency market: From microscopic to macroscopic, *Physica A*, Vol.344, pp.211–215 (2004).

(平成 17 年 2 月 8 日受付)

(平成 17 年 3 月 10 日採録)



佐藤 彰洋

昭和 50 年生 . 平成 13 年東北大学
大学院情報科学研究科博士後期課程
修了 . 平成 12 年から 13 年まで日本
学術振興会特別研究員 . 平成 13 年
より京都大学大学院情報学研究科数
理工学専攻助手 . 現在に至る . エージェントモデルに
立脚した金融市場の数理モデルの開発と確率過程の研究
に従事 . 博士 (情報科学) .
