

セグメント情報のない立体ピクロス及び 高さ1の立体ピクロスのNP完全性

高田 喜朗^{1,a)} 五十嵐 達郎^{1,†1}

概要: 立体ピクロスは、任天堂が販売するゲームソフトウェア中のパズルである。立方体を積み重ねた直方体が与えられ、ヒントを基に不要な立方体を消して隠された立体を見つけることがパズルの目的である。草野らは、このパズルの解の存在判定がNP完全であること、また、高さが1に限定されかつセグメント情報がヒントとして与えられない場合には多項式時間可解であることを示した。しかし、高さが自由であることとセグメント情報が与えられることのどちらがNP完全性に寄与しているかは不明であった。本研究ではこの問題について考察し、その結果、高さが2以上でセグメント情報が与えられない場合、及び、高さが1でセグメント情報が与えられる場合、どちらもNP完全であることがわかった。

NP-completeness of Picross 3D without Segment Information and That with the Height of One

TAKATA YOSHIKI^{1,a)} IKARASHI TATSURO^{1,†1}

Abstract: Picross 3D is a puzzle provided in a game software published by Nintendo. Kusano et al. have shown that it is NP-complete to decide whether a given Picross 3D instance has a solution. They have also shown that it is polynomial-time solvable if we restrict the height of the instance to one and erase segment information from the hints. However, it has not been known that which is the source of the NP-completeness, the height of the instance or the segment information. In this paper, we show that both of them are the source of the NP-completeness; i.e., it is NP-complete either if the segment information is not given and the height is more than one or if the segment information is given and the height is restricted to one.

1. はじめに

立体ピクロス [3] は任天堂が販売するゲームソフトウェア中のパズルである。このパズルではまず、図1左のような、立方体のブロックの集まりである直方体が問題として与えられる。ブロック表面に書かれたヒントに従って不要なブロックを削除し、隠された立体図形(図1左に対しては同図右)を見つけ出すことが、パズルの目的である。ヒントの数字は残すべきブロックの個数を表している。すなわち、ヒントが書かれている面に対して垂直方向に、ヒントの数字とちょうど同じ個数のブロックを残さなければな

らない。また、連続するブロックの並びをセグメントといい、数字を囲む○及び□はセグメント数に関するヒントである。○はセグメント数がちょうど2、□はセグメント数が3以上であることを表す。囲みのない数字はセグメント数がちょうど1であることを表す。

各種のパズルゲームがそれぞれどれほどの計算量で解けるかは興味深く、これまでに様々なパズルの計算複雑さが研究されてきた [5]。立体ピクロスについては、草野ら [2] により、本来のルールの下での解の存在判定がNP完全であること、また、問題として与えられる直方体の高さを1に制限し、かつセグメント数がヒントとして与えられないとした場合には、多項式時間可解であることが示されている。しかし、高さのみを制限した場合や、高さに制限はないがセグメント数が与えられない場合の計算複雑さは不明であり、「高さが1より大きいこと」「セグメント数が与え

¹ 高知工科大学 情報学群

Kochi University of Technology

^{†1} 現在、ユニバーサル・インフォメーション・サービス株式会社

^{a)} takata.yoshiaki@kochi-tech.ac.jp

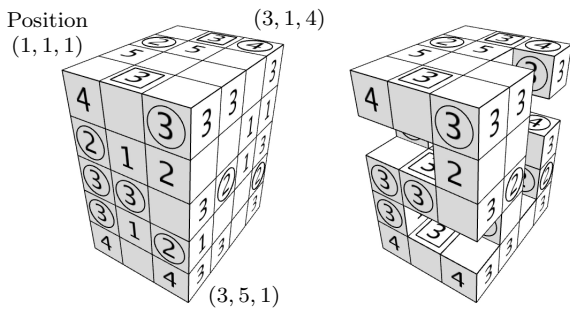


図 1 立体ピクロスの問題例とその解

Fig. 1 An Instance of Picross 3D and Its Solution.

表 1 既知の結果と本研究の結果 (太字)
Table 1 Known and New Results.

		セグメント情報	
		あり	なし
高さ	自由	NP 完全 [2] (高さ 4)	NP 完全 (高さ 2)
	1	NP 完全	PTIME [2]

られること」のどちらが NP 完全性を生じさせるのかはわかっていなかった。

本研究では、セグメント情報は与えられるが高さを 1 に制限した場合、及び、高さに制限はないがセグメント情報が与えられない場合、それぞれについて、立体ピクロスの解存在判定の計算複雑さを考察した。その結果、どちらも NP 完全であることがわかった (表 1)。また、草野らは高さを 4 に限ってもこの問題が NP 完全であることを示していたが、本研究の結果、高さを 2 に限っても NP 完全であることがわかった。従って、高さが 1 であること、及びセグメント情報が与えられないことのどちらの条件が欠けても、 $P = NP$ でない限り、立体ピクロスの解存在判定問題は多項式時間では解けない。

以降の本稿の構成は以下の通りである。2 節で立体ピクロスに関する諸概念を定義する。3 節で NP 完全性の証明の全体的方針を述べた後、4 節ではセグメント情報のない高さ 2 の立体ピクロスの NP 完全性を示す。5 節では高さ 1 の立体ピクロスの NP 完全性を示す。最後に 6 節でまとめを述べる。

2. 定義

本節では、立体ピクロスに関する諸概念を文献 [2] に倣って定義する。

立体ピクロスにおける問題は、同じ大きさの立方体 (ブロック) を積み重ねて作られた直方体と、各ブロックの表面に書かれたヒントからなる。 w, h, d を直方体の幅、高さ、奥行きとし、それぞれブロックの個数で表す。各ブロックの位置は 3 整数の組 (x, y, z) で表される。ただし、 $1 \leq x \leq w, 1 \leq y \leq h, 1 \leq z \leq d$ である。

直方体の中のブロックを 0 個以上消去することで得られ

る立体図形は、要素の値が 0 または 1 である大きさ $w \times h \times d$ の 3 次元配列 $P = (p_{xyz})$ で表される。値 0 はその位置にブロックがないこと、1 はあることを表す。例えば図 1 右の立体図形は

$$P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

で表される。

ある x, y に対し、 $(x, y, 1)$ から (x, y, d) までの位置にあるブロックの集合を、位置 (x, y) の Z 列と呼び、 Z_{xy} と書く。X 列 X_{yz} 、Y 列 Y_{xz} も同様に定義する。一つの列中の連続して並ぶブロックからなる極大な部分列をセグメントという。例えば図 1 右において、Z 列 $Z_{1,1}$ は長さ 4 のセグメント 1 つのみからなり、 $Z_{3,1}$ は長さ 2 のセグメントと長さ 1 のセグメントからなる。

各ブロックの表面にはヒントが書かれている。ただし、ヒントが空白である場合もある。空白を \square で表す。一つの問題における全ヒントは、3 つの行列 F, S, T で与えられる。 F は $h \times w$ 行列、 S は $h \times d$ 行列、 T は $d \times w$ 行列である。例えば図 1 左の問題におけるヒントは

$$F = \begin{pmatrix} 4 & \square & \textcircled{3} \\ \textcircled{2} & 1 & 2 \\ \textcircled{3} & \textcircled{3} & \square \\ \textcircled{3} & 1 & \textcircled{2} \\ 4 & \square & 4 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \square & 3 \\ \square & \square & 1 & 1 \\ 3 & \textcircled{2} & 1 & 3 \\ 1 & \square & \square & \textcircled{2} \\ 3 & 3 & \square & 3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \square & \boxed{3} & \textcircled{4} \\ \textcircled{2} & 5 & \square \\ 5 & \square & \square \\ \square & \boxed{3} & \square \end{pmatrix}$$

である (T については、図 1 での直方体の上面の見た目と合わせて、 z 座標が 1 の要素を下に記述している)。 F, S, T の要素をそれぞれ f_{xy}, s_{yz}, t_{xz} とする。Z 列 Z_{xy} 中のブロックの前面と背面 (z 軸に垂直な面) には全て同じヒン

ト f_{xy} が書かれている. 同じ X 列中の x 軸に垂直な面, 同じ Y 列中の y 軸に垂直な面も同様である.

ヒントは, 無印の数字 (普通数字), \circ で囲まれた数字 (丸数字), \square で囲まれた数字 (四角数字), 空白 \square のいずれかである. 立体図形 P が以下の条件 R_B, R_S を満たすとき, P はその問題の解である.

条件 R_B $f_{xy} \neq \square$ ならば, Z_{xy} 中のブロック数 $\sum_{z=1}^d p_{xyz}$ は f_{xy} の数字と等しい. s_{yz} と X_{yz} , t_{xz} と Y_{xz} についても同様.

条件 R_S f_{xy} が 0 以外の普通数字ならば, Z_{xy} 中のセグメント数は 1 である. f_{xy} が丸数字ならば, Z_{xy} 中のセグメント数は 2 である. f_{xy} が四角数字ならば, Z_{xy} 中のセグメント数は 3 以上である. s_{yz} と X_{yz} , t_{xz} と Y_{xz} についても同様.

ヒントが空白である場合, 対応する列のブロック数及びセグメント数に制約はない.

判定問題 PICROSS-3D 及び PICROSS-3D-NS を以下のように定義する.

PICROSS-3D

入力: 正整数 w, h, d , 及び $h \times w$ 行列 F , $h \times d$ 行列 S , $d \times w$ 行列 T .

出力: 条件 R_B, R_S を満たす立体図形 P が存在するか?

PICROSS-3D-NS

入力: (PICROSS-3D と同じ)

出力: 条件 R_B を満たす立体図形 P が存在するか?

つまり, PICROSS-3D-NS は, セグメント数に関する条件 R_S を除外した場合の解存在判定問題であり, 普通数字・丸数字・四角数字の区別をしないことに相当する.

上記の両問題について, 高さ h を特定の値に限定した問題を PICROSS-3D^($h=1$) のように表記する. これまでに, PICROSS-3D は NP 完全, PICROSS-3D-NS^($h=1$) は多項式時間可解であることがわかっている [2]. 本稿では, PICROSS-3D^($h=1$) も PICROSS-3D-NS^($h=2$) もともに NP 完全であることを示す.

3. NP 完全性の証明の方針

PICROSS-3D, PICROSS-3D-NS とともに NP に属することは明らかなので, 以降の節では, NP 完全問題 3SAT が PICROSS-3D^($h=1$) 及び PICROSS-3D-NS^($h=2$) にそれぞれ多項式時間帰着可能であることを示す.

3SAT は以下の入出力で定義される.

3SAT

入力: 命題変数集合 $U = \{x_1, \dots, x_m\}$ と, 各節のリテラル数が 3 である U 上の和積標準形論理式

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge \dots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k).$$

出力: $\phi = 1$ となる U への真偽値割り当てが存在するか?

ϕ の各節をリテラルの集合と見なし, 第 j 節を cl_j と書

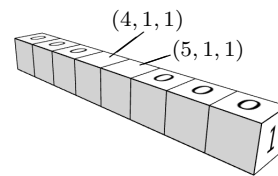


図 2 1 変数の真偽値割り当てを模倣する立体ピクロス
Fig. 2 A Structure Simulating a Truth Assignment.

	x=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
T =	z=6	0		0	0	0	0	0		0		0	0		0		\circ
	z=5		0	0	0		0		0	0	0	0	0		0		\circ
	z=4	0	0	0	0	0	0	0	0				0	0	0	0	—
	z=3	0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	—
F =	z=2	0	0	0			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
	z=1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
		1	1			1		1	1		1						$s =$
		x_1	$\neg x_1$			x_2	$\neg x_2$			x_3	$\neg x_3$			x_4	$\neg x_4$		

図 3 $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ に対応する立体ピクロス
Fig. 3 A Structure for $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$.

く. cl_j の要素数は 3, すなわち cl_j の要素はすべて異なる
と仮定してよい [1]. また, 一般性を失うことなく, 各節 cl_j は同じ変数の正リテラルと負リテラルを同時に含まない
と仮定する (含む場合, その節は恒真である).

3SAT から立体ピクロスの問題への帰着を考えるために, まず以下のような小さい直方体を考える (図 2).

$$F = (\square \square \square \square \square \square \square \square)$$

$$S = (1)$$

$$T = (0 \ 0 \ 0 \ \square \ \square \ 0 \ 0 \ 0)$$

この立体ピクロス問題の解を考えると, T 中のヒントにより, 消去せずに残せるブロックは位置 (4, 1, 1), (5, 1, 1) の 2 箇所のみである. 一方 S 中のヒントにより, このうちちょうど 1 個を残さなければならない. この 2 箇所を, 1 つの変数 x_i への真偽値割り当てを表すのに用いる. すなわち, (4, 1, 1) のブロックを残す場合は $x_i = 1$, (5, 1, 1) のブロックを残す場合は $x_i = 0$ を表しているとする.

次に, 論理式 $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ と, 図 3 の F, S, T で表される立体ピクロス問題について考える. 図 3 の $z = 1$ から $z = 4$ の範囲の各 X 列 $X_{1,1}, \dots, X_{1,4}$ は, 図 2 と同様に, それぞれ変数 x_1, \dots, x_4 への真偽値割り当てを表す. 例えば $X_{1,1}$ については, 位置 (1, 1, 1) のブロックを残す場合は $x_1 = 1$, (2, 1, 1) のブロックを残す場合は $x_1 = 0$ を表すとする.

ここで Z 列 $Z_{1,1}$ を見ると, T 中のヒントにより, 消去せずに残せるブロックは位置 (1, 1, 1), (1, 1, 5) の 2 箇所のみである. そして, F 中のヒント $f_{1,1} = 1$ により, そのうちちょうど 1 個を残さなければならない. 従って, x_1 に 1 を割り当てる場合, かつそのときのみ, (1, 1, 5) のブロックは消去される. 同じことが \bar{x}_2 と位置 (5, 1, 5), x_3 と位置

(7, 1, 5) についても言える。

さらに X 列 $X_{1,5}$ を見ると, T 中のヒントにより, 消去せずに残せるブロックは位置 (1, 1, 5), (5, 1, 5), (7, 1, 5), (13, 1, 5), (15, 1, 5) の 5 箇所のみである. そして, S 中のヒント $s_{1,5} = ②$ により, そのうちちょうど 2 個を残さなければならない (位置が互いに離れているので, セグメント数を考慮してもしなくても結果は同じである). 従って, (1, 1, 5), (5, 1, 5), (7, 1, 5) のうち少なくとも 1 箇所はブロックを消去しなければならない. これは, x_1, \bar{x}_2, x_3 のうち少なくとも 1 つに 1 を割り当てなければならないこと, つまり $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = 1$ になるよう割り当てなければならないことを表している. (1, 1, 5), (5, 1, 5), (7, 1, 5) のうち 2 箇所以上のブロックを消去した場合, (13, 1, 5), (15, 1, 5) のブロックを残すことで, $X_{1,5}$ 中のブロック数をちょうど 2 にできる. $X_{1,6}$ も同様に, $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) = 1$ となるように真偽値割り当てをしなければならないことを表している.

以上のことから, 図 3 の F, S, T に対する解が存在するとき, かつそのときのみ, $\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ は充足可能である.

ここまで, 立体ピクロス上での真偽値割り当ての模倣と, それに対して各節が真であることを確かめる仕組みを述べた. 論理式中に同じリテラルが複数回現れない場合は, この方法で, 3SAT を PICROSS-3D^(h=1) 及び PICROSS-3D-NS^(h=1) に帰着できる. 一方, 同じリテラルが複数回現れる場合は, ここまで述べた仕組みに加えて, 同一リテラルに同じ真偽値を割り当てる仕組みが必要になる. PICROSS-3D-NS^(h=2) への帰着では, 上述の構造とは別の y 座標のブロック群を使ってその仕組みを構築する (4 節). PICROSS-3D^(h=1) への帰着では, 丸数字ヒントを使ってその仕組みを構築する (5 節).

4. セグメント情報のない高さ 2 の立体ピクロスの NP 完全性

以下では, m 変数, k 節の 3SAT インスタンス U , ϕ から高さ 2 の立体ピクロス問題への多項式時間変換を定義する. 一般性を失うことなく, k は偶数と仮定する (奇数の場合はいずれかの節の複製を加えればよい).

w, h, d は以下のように定める.

$$\begin{aligned} w &= mw' + 2, & \text{ただし } w' &= 2k. \\ h &= 2, \\ d &= md' + k, & \text{ただし } d' &= 2k + 1. \end{aligned}$$

$1 \times w'$ 行列 $F' = (f'_{x,1})$, $2 \times d'$ 行列 $S' = (s'_{y,z})$, $d' \times w'$ 行列 $T' = (t'_{x,z})$ を以下のように定義する.

$1 \leq x \leq w'$ である x について

$$f'_{x,1} = 1$$

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8		$z =$
$T' =$	0	0	0	0	0	0	0	1		9
	0	0	0	0	0	0	1	0		8
	0	0	0	0	0		0		—	7
	0	0	0	0		0			—	6
	0	0	0	1	0	1	0	0	—	5
	0	0	1	0	1	0	0	0	—	4
	0		0		0	0	0	0	—	3
	0		0		0	0	0	0	—	2
	1	1	0	0	0	0	0	0	—	1
$F' =$	1	1	1	1	1	1	1	1		

図 4 $k = 4$ のときの行列 F', S', T'

Fig. 4 Matrices F', S', T' for $k = 4$.

$1 \leq z \leq d'$ である z について

$$\begin{aligned} s'_{1,z} &= \begin{cases} 1 & z \leq w' - 1 \\ \square & \text{それ以外} \end{cases} \\ s'_{2,z} &= \begin{cases} 0 & z \bmod 4 = 2 \text{ または } 3 \\ \square & \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned}$$

$1 \leq x \leq w'$ である x について

$$t'_{x,x+1} = \begin{cases} 1 & x \bmod 4 = 3 \text{ または } 0 \\ \square & \text{それ以外} \end{cases}$$

$2 \leq x \leq w'$ である x について

$$t'_{x,x-1} = \begin{cases} 1 & x \bmod 4 = 1 \text{ または } 2 \\ \square & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$t'_{1,1} = 1$$

上記以外の T' の要素はすべて 0.

$k = 4$ の場合の F', S', T' を図 4 に示す. F', S', T' は, 一つのリテラルの真偽値を複数の場所に「複製」するための構造である. $2 \times w'$ 行列 F'' を, $y = 1$ の行が F' と等しく $y = 2$ の行の要素がすべて \square である行列とし, F'', S', T' からなる立体ピクロス問題を考える. T' 中の 0 でないヒントの配置と F'' 及び S' の $y = 1$ の行のヒントにより, 位置 (1, 1, 1) のブロックを消去せずに残すならば, 位置 (1, 1, 2), (2, 1, 1), (3, 1, 4), (4, 1, 3), ... のブロックはすべて消去し, 位置 (2, 1, 3), (3, 1, 2), (4, 1, 5), (5, 1, 4), ... のブロックはすべて残さなければならない. 位置 (1, 1, 1) のブロックを消去するならば, 前者のブロック群はすべて残し, 後者のブロック群はすべて消去しなければならない. つまり, 位置 (1, 1, 1) のブロックの有無が位置 (2, 1, 3), (3, 1, 2), (4, 1, 5), (5, 1, 4), ... に複製され, 位置 (1, 1, 1) のブロックの有無の反転が位置 (1, 1, 2), (2, 1, 1), (3, 1, 4), (4, 1, 3), ... に複製

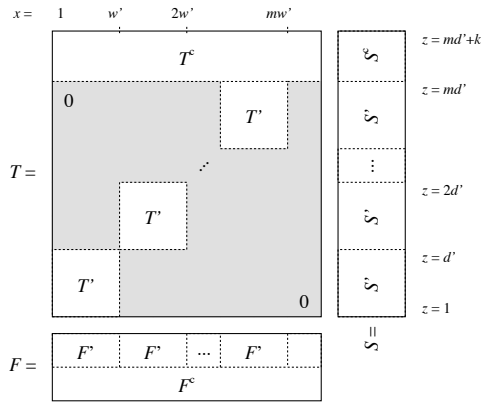


図 5 3SAT からの帰着に用いる PICROSS-3D-NS インスタンス
Fig. 5 The PICROSS-3D-NS Instance for the Reduction from 3SAT.

される。

$1 \times w$ 行列 $F^c = (f_{x,1}^c)$, $2 \times k$ 行列 $S^c = (s_{y,z}^c)$, $k \times w$ 行列 $T^c = (t_{x,z}^c)$ をさらに定義する。

まず補助関数 $pn^+(j)$, $pn^-(j)$ を以下のように定義する。

$$pn^+(j) = 1 - (j \bmod 2), \quad pn^-(j) = j \bmod 2.$$

$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k$ である i, j と $pn \in \{0, 1\}$ について

$$x = (i-1)w' + 2j - 1 + pn \quad \text{に対して}$$

$$f_{x,1}^c = \begin{cases} 1 & (x_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^+(j)) \text{ または} \\ & (\bar{x}_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^-(j)) \\ \square & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$t_{x,j}^c = \begin{cases} \square & (x_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^+(j)) \text{ または} \\ & (\bar{x}_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^-(j)) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$t_{x,z}^c = 0 \quad \text{ただし } 1 \leq z \leq k, z \neq j$$

$mw' + 1 \leq x \leq w$, $1 \leq z \leq k$ である x, z について

$$f_{x,1}^c = t_{x,z}^c = \square,$$

$$s_{1,z}^c = 0,$$

$$s_{2,z}^c = 2.$$

S^c, T^c は、各節 cl_j の中に少なくとも 1 つ真であるリテラルがある (偽であるリテラルが 2 個以下である) ことを保証するための構造である。

変換後の立体ピクロス問題 F, S, T は、 $F', S', T', F^c, S^c, T^c$ を図 5 のように配置することで得られる。 T 中の $z \leq md'$ の範囲のうち T' を配置しない部分のヒントはすべて 0 である。また $f_{mw'+1,1} = f_{mw'+2,1} = \square$ である。図 6 は論理式 $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ に対する F, S, T を示している。

以降、この F, S, T が条件 R_B を満たす解 P を持つと

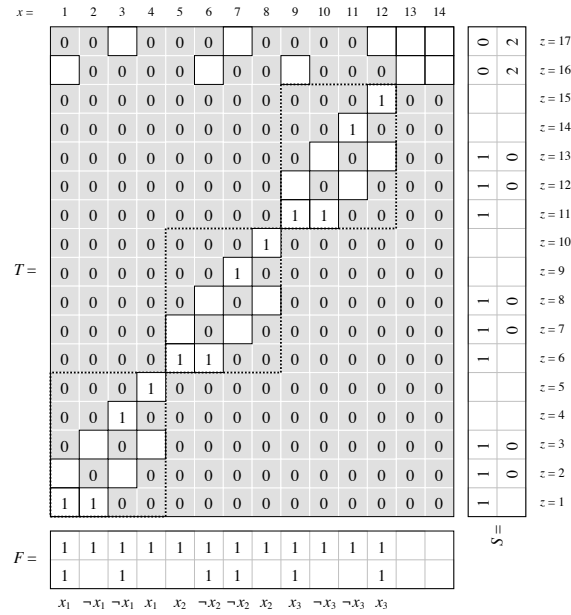


図 6 $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ に対する F, S, T
Fig. 6 The Instance for $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

き、かつそのときのみ、 ϕ が充足可能であることを示す。

補題 1 $0 \leq i < m$ とし、 $x = iw' + 1$, $z = id' + 1$ とする。上記 F, S, T が条件 R_B を満たす解 $P = (p_{xyz})$ を持つとき、以下の (1), (2) が成り立つ: (1) $1 \leq j \leq 2k-1$ である j について、 $p_{x+j-1,1,z+j} = p_{x+j,1,z+j-1}$ である。 j が奇数ならば $p_{x,1,z} \neq p_{x+j,1,z+j-1}$, j が偶数ならば $p_{x,1,z} = p_{x+j,1,z+j-1}$ である。 (2) $p_{x,1,z} = p_{x+2k-1,1,z+2k}$ である。

(証明) (1) j に関する帰納法により示す。

T の構成から、 X 列 $X_{1,z}$ の中でブロックを残せる位置は $(x, 1, z)$, $(x+1, 1, z)$ の 2 箇所のみである。 $s_{1,z} = 1$ より、この 2 箇所のうちちょうど一方のみブロックを残せる。従って $p_{x,1,z} \neq p_{x+1,1,z}$ 。

また、 T の構成と $s_{1,md'+1} = \dots = s_{1,md'+k} = 0$ から、 Z 列 $Z_{x,1}$ の中でブロックを残せる位置は $(x, 1, z)$, $(x, 1, z+1)$ の 2 箇所のみである。 $f_{x,1} = 1$ より、この 2 箇所のうちちょうど一方のみブロックを残せる。従って $p_{x,1,z} \neq p_{x,1,z+1}$ 。 P の要素は 0, 1 のいずれかなので $p_{x,1,z+1} = p_{x+1,1,z}$ 。よって $j=1$ のときは言える。

$2 \leq j \leq 2k-1$ である j についても、 X 列 $X_{1,z+j-1}$ 及び Z 列 $Z_{x+j-1,1}$ の中でブロックを残せる位置はそれぞれ 2 箇所のみである。 $s_{1,z+j-1} = f_{x+j-1,1} = 1$ より $p_{x+j-2,1,z+j-1} \neq p_{x+j,1,z+j-1}$ かつ $p_{x+j-1,1,z+j-2} \neq p_{x+j-1,1,z+j}$ 。帰納法の仮定を適用すると題意が言える。

(2) (1) より $p_{x,1,z} \neq p_{x+2k-1,1,z+2k-2}$ である。 Z 列 $Z_{x+2k-1,1}$ に関する上記と同じ議論から、 $p_{x,1,z} = p_{x+2k-1,1,z+2k}$ である。 \square

補題 2 $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k$ とし、 $x = (i-1)w' + 1$, $z = (i-1)d' + 1$, $z' = md' + j$ とする。上記 F, S, T が条件 R_B を満たす解 $P = (p_{xyz})$ を持つとき、以下の (1), (2)

が成り立つ: (1) $x_i \in cl_j$ ならば, $x' = x + 2j - 2 + pn^+(j)$ に対して $p_{x,2,z} \neq p_{x',2,z'}$. (2) $\bar{x}_i \in cl_j$ ならば, $x' = x + 2j - 2 + pn^-(j)$ に対して $p_{x,2,z} = p_{x',2,z'}$.

(証明) (1) T^c の定義から $t_{x',z'} = t_{x',j}^c = \square$ である. T 中の x 座標が x' である要素のうち 0 でないものは, $z'' = z + 2j - 1 + pn^+(j)$ とすると, $t_{x',z'}, t_{x',z''}, t_{x',z''-2}$ (ただし $j = 1$ の場合は $t_{x',z}$) の 3 要素のみである. また, $f_{x',2} = f_{x',1}^c = 1$ である.

j が偶数の場合を考える. $x' = x + 2j - 1, z'' = z + 2j$ である. $2j \bmod 4 = 0$ より $s_{2,z''-2} = s_{2,2j-1}^c = 0$ であるので, Z 列 $Z_{x',2}$ の中でブロックを残せる位置は $(x', 2, z')$, $(x', 2, z'')$ の 2 箇所のみである. $f_{x',2} = 1$ より $p_{x',2,z'} \neq p_{x',2,z''}$ である. 一方, 補題 1 の j に $2j$ を当てはめると $p_{x,1,z} = p_{x',1,z''}$ が言える. $t_{x,z} = t_{1,1}^c = 1$ 及び $t_{x',z''} = t_{2j,2j+1}^c = 1$ より $p_{x,2,z} = p_{x',2,z''}$ である. よって題意が言える.

$j > 1$ かつ j が奇数の場合を考える. $x' = x + 2j - 2, z'' = z + 2j - 1$ である. $2j \bmod 4 = 2$ より $s_{2,z''} = s_{2,2j}^c = 0$ であるので, Z 列 $Z_{x',2}$ の中でブロックを残せる位置は $(x', 2, z')$, $(x', 2, z'' - 2)$ の 2 箇所のみである. また, 補題 1 の j に $2j - 2$ を当てはめると $p_{x,1,z} = p_{x',1,z''-2}$ が言える. よって j が偶数の場合と同様に題意が言える.

$j = 1$ の場合も $j > 1$ かつ j が奇数の場合と同様にして題意が言える.

(2) も (1) と同様にして言える. □

補題 3 上記 F, S, T が条件 R_B を満たす解 $P = (p_{xyz})$ を持つならば, 論理式 ϕ は充足可能である.

(証明) $1 \leq i \leq m$ である i に対し, $p_{(i-1)w'+1,2,(i-1)d'+1}$ の値を変数 x_i の値とする. \dots (*)

$1 \leq j \leq k$ である任意の j について考える. $z' = md' + j$ とする. T^c の構成から, $1 \leq x' \leq mw'$ かつ $t_{x',z'} = \square$ である x' が 3 つある. $s_{2,z'} = s_{2,j}^c = 2$ より, これらの x' のうち $p_{x',2,z} = 0$ であるものが少なくとも 1 つある. この x' について考えると, T^c の構成から, $1 \leq i \leq m$ を満たすある i に対して

$$x' = (i-1)w' + 2j - 1 + pn, \quad pn \in \{0, 1\}$$

であり, $pn = pn^+(j)$ ならば $x_i \in cl_j$, $pn = pn^-(j)$ ならば $\bar{x}_i \in cl_j$ である.

$pn = pn^+(j) = 1 - (j \bmod 2)$ の場合, $x_i \in cl_j$ であり, 補題 2 より $p_{x,2,z} \neq p_{x',2,z'}$. 従って $x_i = p_{x,2,z} = 1$ であり, この真偽値割り当てにおいて節 cl_j は真である.

$pn = pn^-(j) = j \bmod 2$ の場合, $\bar{x}_i \in cl_j$ であり, 補題 2 より $p_{x,2,z} = p_{x',2,z'}$. 従って $x_i = p_{x,2,z} = 0$ すなわち $\bar{x}_i = 1$ であり, この真偽値割り当てにおいて cl_j は真である.

以上より, (*) の真偽値割り当てによってすべての節が真となるので, ϕ は充足可能である. □

		1	
		1	1
	5	1	3
3			
1			
3			
1 1			
3			

		5	3	4
3				
1				
3				
2				
3				

図 7 通常のののぐらむとセグメント情報のないののぐらむ
Fig. 7 A NONOGRAM Instance and Its Copy without Segment Information.

補題 4 論理式 ϕ が充足可能ならば, 上記 F, S, T に対して条件 R_B を満たす解 $P = (p_{xyz})$ が存在する.

(証明) $\phi = 1$ となる真偽値割り当てを一つ固定する. $1 \leq j \leq k$ である各 j について, $t_{x,md'+j} = \square$ である x が $1 \leq x \leq mw'$ の範囲にちょうど 3 箇所あり, cl_j 中の 3 個のリテラルにそれぞれ対応している. X 列 $X_{2,md'+j}$ の中で, cl_j 中の真であるリテラルに対応するブロックを消去し, 偽であるリテラルに対応するブロックを残す. cl_j 中に少なくとも一つ真であるリテラルが存在することから, 位置 $(mw' + 1, 2, md' + j)$, $(mw' + 2, 2, md' + j)$ のブロックを必要だけ消去することで, ヒント $s_{2,md'+j} = 2$ を満たすことができる.

一方, $1 \leq i \leq m$ である i について $p_{(i-1)w'+1,2,(i-1)d'+1} = x_i$ と置き, それに合わせて $1 \leq x \leq w, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq md'$ の範囲の p_{xyz} を, $f_{x,1}, s_{y,z}, t_{x,z}$ を満たすように決定することができる.

このようにして決めた P は, F^c, T^c の構成から, $1 \leq x \leq w$ の範囲の $f_{x,2} = f_{x,1}^c$ に矛盾しない. □

補題 3 及び 4 から定理 1 が言える.

定理 1 PICROSS-3D-NS^(h=2) は NP 完全である.

なお, ϕ から F, S, T への変換を以下のように変更すれば, 上記の証明は, 条件 R_S を考慮する場合の (すなわち PICROSS-3D^(h=2) の) NP 完全性の証明にもなる: T 中の $x = mw'$ の列と $x = mw' + 1$ の列の間, 及び $x = mw' + 1$ の列と $x = mw' + 2$ の列の間に, 全要素が 0 の列をそれぞれ追加し, $w = mw' + 4$ とする. F においては, 増加した列に対するヒントは \square とする. S 中のヒント数字 2 をすべて ② に置き換える. このように変更すると, 節数 k は偶数と仮定しているので $k \geq 2$ であること, 及び各節 cl_j が同じ変数の正リテラルと負リテラルを同時に含まないと仮定していることから, 列 $t_{1,j}^c, \dots, t_{w,j}^c$ の中で 0 でない要素同士が隣接することはない. 従って, ヒント $s_{2,j}^c = ②$ に関して, 条件 R_B を満たせば R_S も自動的に満たされる.

5. 高さ 1 の立体ピクロス NP 完全性

高さ 1 の立体ピクロスはののぐらむ (ピクロス, お絵かきロジックとも呼ばれる) と類似している. 図 7 左はののぐ

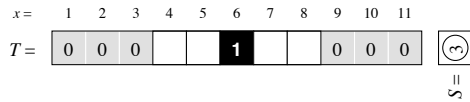


図 8 真偽値割り当ての複写を行う立体ピクロス
Fig. 8 A Structure Duplicating a Truth Assignment.

らむの問題例とその解を表している。図の左部及び上部の数字が問題として与えられるヒントであり、ヒントに従って一部のマス黒く塗り、隠された図形を見つけ出すことが、パズルの目的である。通常のののぐらむでは、ヒントはその行あるいは列の個々のセグメントの長さを表している。通常のののぐらむの解存在判定は NP 完全である [4]。一方、図 7 右のように、ヒントとしてその行あるいは列の黒マスの総数のみ与え、セグメントに関する情報を与えない問題とした場合、最大フロー問題に帰着して多項式時間で解存在判定を行うことができる [2]。

高さ 1 の立体ピクロスはののぐらむに類似しているが、(1) 上面のヒント T がある、(2) ヒントが空白である列があり得る、(3) 個々のセグメントの長さではなくブロック総数とセグメント数のみ与えられる、また、3 以上のセグメント数は区別されない、という違いがある。文献 [2] では、セグメント数が与えられない高さ 1 の立体ピクロスの解判定問題 (PICROSS-3D-NS^(h=1)) が多項式時間可解であることが示されている。具体的には、PICROSS-3D-NS^(h=1) から、各辺の流量に上限と下限があるフロー問題への帰着を示している。一方、セグメント数の情報が与えられる高さ 1 の立体ピクロスの解判定問題 PICROSS-3D^(h=1) については、多項式時間可解かどうかわかっていなかった。セグメントを考慮する必要があるため、上記のフロー問題への帰着はそのままでは適用できない。一方、上記 (1)–(3) の違いから、ののぐらむの NP 完全性の結果も適用できない。

以下では、3SAT から PICROSS-3D^(h=1) への多項式時間帰着を示すことにより、PICROSS-3D^(h=1) が NP 完全であることを示す。

この帰着では、図 8 の構造を基本的構成要素として用いる (ヒント F の要素はすべて \square とする)。ヒント $s_{1,1} = \textcircled{3}$ より、この列の中にちょうど 3 個のブロックを残し、かつセグメント数を 2 にしなければならない。ヒント $t_{6,1} = 1$ より位置 (6, 1, 1) のブロックは必ず残さなければならない。従って、条件 R_B, R_S を満たす解は、

$$P = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0),$$

または $P = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$

の 2 通りしかない。つまり、 $p_{4,1,1} \neq p_{5,1,1}$ かつ $p_{4,1,1} = p_{7,1,1}$ かつ $p_{5,1,1} = p_{8,1,1}$ が必ず成り立つ。この構造により、1 変数への真偽値割り当ての模倣と割り当てた値の複製を同時に行う。図 8 の構造以外は、第 4 節と同じ方法で、3SAT から高さ 1 の立体ピクロス問題への帰着を行う。

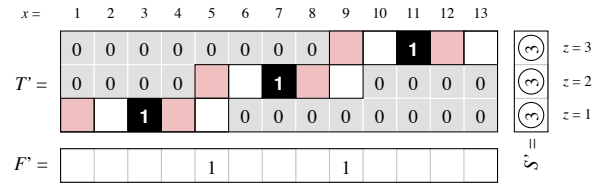


図 9 PICROSS-3D^(h=1) における $k = 4$ のときの F', S', T'
Fig. 9 Matrices F', S', T' for $k = 4$ in PICROSS-3D^(h=1).

以下、 m 変数、 k 節の 3SAT インスタンス U, ϕ から高さ 1 の立体ピクロス問題への変換を定義する。一般性を失うことなく $k \geq 2$ と仮定する。

w, h, d は以下のように定める。

$$w = mw' + 4, \quad \text{ただし } w' = 4k - 3.$$

$$h = 1,$$

$$d = md' + k, \quad \text{ただし } d' = k - 1.$$

$1 \times w'$ 行列 $F' = (f'_{x,1})$, $1 \times d'$ 行列 $S' = (s'_{1,z})$, $d' \times w'$ 行列 $T' = (t'_{x,z})$ を以下のように定義する。

$1 \leq x \leq w', 1 \leq z \leq d'$ である x, z について

$$f'_{x,1} = \begin{cases} 1 & x \bmod 4 = 1 \text{ かつ } 5 \leq x \leq 4k - 7 \\ \square & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$s'_{1,z} = \textcircled{3}$$

$$t'_{x,z} = \begin{cases} 0 & x < 4z - 3 \text{ または } x > 4z + 1 \\ 1 & x = 4z - 1 \\ \square & \text{それ以外} \end{cases}$$

$k = 4$ の場合の F', S', T' を図 9 に示す。

$1 \times w$ 行列 $F^c = (f^c_{x,1})$, $1 \times k$ 行列 $S^c = (s^c_{1,z})$, $k \times w$ 行列 $T^c = (t^c_{x,z})$ をさらに定義する。

補助関数 $pn^+(j), pn^-(j)$ を以下のように定義する。

$$pn^+(j) = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & 1 < j \leq k \end{cases} \quad pn^-(j) = \begin{cases} 2 & 1 \leq j < k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k, 0 \leq pn \leq 3$ である i, j, pn に対して以下を定義する。ただし、 $j = 1$ のときは $1 \leq pn \leq 3, j = k$ のときは $0 \leq pn \leq 1$ とする。

$$x = (i - 1)w' + 4(j - 1) + pn \quad \text{に対して}$$

$$f^c_{x,1} = \begin{cases} 1 & (x_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^+(j)) \text{ または } \\ & (\bar{x}_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^-(j)) \text{ または } \\ & (1 < j < k \text{ かつ } pn = 1) \\ \square & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$t^c_{x,j} = \begin{cases} \square & (x_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^+(j)) \text{ または } \\ & (\bar{x}_i \in cl_j \text{ かつ } pn = pn^-(j)) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$t^c_{x,z} = 0 \quad \text{ただし } 1 \leq z \leq k, z \neq j$$

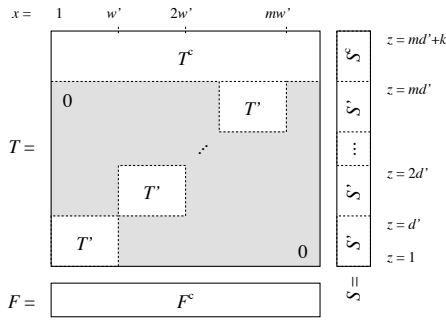


図 10 3SAT からの帰着に用いる PICROSS-3D^(h=1) インスタンス
Fig. 10 The PICROSS-3D^(h=1) Instance for the Reduction from 3SAT.

$mw' + 1 \leq x \leq w, 1 \leq z \leq k$ である x, z について

$$f_{x,1}^c = \sqcup,$$

$$s_{1,z}^c = \textcircled{2},$$

$$t_{x,z}^c = \begin{cases} \sqcup & x - mw' = 2 \text{ または } 4 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

なお、上の定義から、 $f_{x,1}^c = 1$ ならば $f_{x,1}^c = 1$ である。また、各節 cl_j が同じ変数の正リテラルと負リテラルを同時に含まないと仮定しているため、列 $t_{1,j}^c, \dots, t_{w,j}^c$ の中で 0 でない要素同士が隣接することはない。

変換後の立体ピクロス問題 F, S, T は、 S', T', F^c, S^c, T^c を図 10 のように配置することで得られる。 T 中の $1 \leq z \leq md'$ の範囲のうち T' を配置しない部分のヒントはすべて 0 である。

以降、この F, S, T が条件 R_B, R_S を満たす解 P を持つとき、かつそのときのみ、 ϕ が充足可能であることを示す。

補題 5 $0 \leq i < m$ とし、 $x = iw' + 1, z = id' + 1$ とする。上記 F, S, T が条件 R_B, R_S を満たす解 $P = (p_{xyz})$ を持つとき、 $0 \leq j \leq k - 2$ である j について、

$$p_{x,1,z} = p_{x+4j,1,z+j},$$

$$p_{x+4j,1,z+j} \neq p_{x+4j+1,1,z+j},$$

$$p_{x+4j,1,z+j} = p_{x+4j+3,1,z+j},$$

$$p_{x+4j+1,1,z+j} = p_{x+4j+4,1,z+j}.$$

(証明) T', S' の構成から容易に言える。□

補題 6 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$ とし、 $x = (i - 1)w' + 1, z = (i - 1)d' + 1, z' = md' + j$ とする。上記 F, S, T が条件 R_B, R_S を満たす解 $P = (p_{xyz})$ を持つとき、以下の (1), (2) が成り立つ: (1) $x_i \in cl_j$ ならば、 $x' = x + 4j - 5 + pn^+(j)$ に対して $p_{x,2,z} \neq p_{x',2,z'}$. (2) $\bar{x}_i \in cl_j$ ならば、 $x' = x + 4j - 5 + pn^-(j)$ に対して $p_{x,2,z} = p_{x',2,z'}$.

(証明) 補題 5 と F, T の構成から、補題 2 と同様にして言える。□

補題 7 上記 F, S, T が条件 R_B, R_S を満たす解 $P =$

(p_{xyz}) を持つならば、論理式 ϕ は充足可能である。

論理式 ϕ が充足可能ならば、上記 F, S, T に対して条件 R_B, R_S を満たす解 $P = (p_{xyz})$ が存在する。

(証明) 補題 6 から、補題 3, 4 と同様にして言える。□

定理 2 PICROSS-3D^(h=1) は NP 完全である。

6. まとめ

本稿では、高さに制限はないがセグメント情報が与えられない立体ピクロス、及びセグメント情報は与えられるが高さを 1 に制限した立体ピクロスの両者について、解の存在判定が NP 完全であることを示した。前者については高さを 2 に制限しても NP 完全であることがわかった。文献 [2] により、一般の場合は NP 完全であること、及び高さが 1 でかつセグメント情報が与えられない場合には多項式時間可解であることがわかっていたが、今回の結果から、高さが 1 であること、及びセグメント情報が与えられないことのどちらの条件が欠けても、 $P = NP$ でない限り、立体ピクロスの解存在判定問題は多項式時間では解けないことがわかった。

今回、高さ 1 の場合の NP 完全性の証明では、丸数字すなわち「セグメント数がちょうど 2 である」というヒントが重要な役割を担っていた。文献 [2] では、丸数字と四角数字を区別しないとした場合、すなわちセグメント数が 1 か 2 以上かの区別しか行わない場合に、高さが 4 以上であれば NP 完全であることが示されていた。本稿の第 4 節の末尾で述べた PICROSS-3D^(h=2) の NP 完全性の証明は四角数字を使っていないので、高さが 2 以上であれば丸数字と四角数字を区別しない場合でも NP 完全であることが言える。高さが 1 でかつ丸数字と四角数字を区別しない場合、立体ピクロスの解存在判定が NP 完全かどうかはまだ未解決である。

参考文献

- [1] Garey, M. R. and Johnson, D. S.: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, pp.48–50, W. H. Freeman and Company (1979).
- [2] 草野, 成澤, 篠原: 立体ピクロスは NP 完全, 第 15 回ゲームプログラミングワークショップ, pp.108–113 (2010).
- [3] 任天堂: 立体ピクロス, <http://www.nintendo.co.jp/ds/c6pj/> (2016-06-14 閲覧).
- [4] Ueda, N. and Nagao, T.: NP-completeness results for NONOGRAM via parsimonious reductions, Technical Report TR96-0008, Tokyo Institute of Technology (1996).
- [5] 八登: NP 完全なペンシルパズルの一覧, 第 2.0 版, <http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yato/data2/puzcc.pdf> (2016-06-14 閲覧).