4Y-2

ブラウン運動による複雑曲面の衝突ループ検出

城 良友 *, 田中覚 †, 仲田晋 †, 木村彰徳 ‡, 長谷川恭子 §, 岡将史 *, 柴田章博 ¶

1 はじめに

形状モデリングやコンピュータ・グラフィックスにおいて, 3 次元曲面の衝突を検出・可視化することが, しばしば要求される. 一方, 近年のレンジセンサなどの形状計測装置の発展により, 物体形状を計測し 3 次元点群データとして保存することが可能である. また, 得られた大規模点群データから, 複雑な陰関数曲面を容易に生成する技術が発展してきた [1]. このため, 複雑な形状を精密にモデリングする際に, 陰関数曲面が重要な役割を果たしている.

複雑な陰関数曲面同士が衝突している空間では, 多くの衝突ループが散在しており, それらを漏れなく探索し, 検出することは難しい問題である. その問題を解決するために, 本報告では, 確率過程サンプリング法を用いた. 同手法によって, 衝突ループを確率的に探索し, 漏れなく検出・可視化する. また, 同手法を応用することで, 複雑な陰関数曲面の精密な等高線を描画することができる.

2 確率過程サンプリング法

確率過程サンプリング法とは, 陰関数曲面上でのブラウン運動をシミュレートし, その軌跡上に点を生成することで, 陰関数曲面を高速・精密にサンプリングする手法である [2].

方程式 $F(\mathbf{q}) = 0$ で定義される陰関数曲面 I_F 上に閉じ込められた一様なブラウン運動は, 確率微分方程式 (1) で定義できる. ここで, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ はブラウン粒子の位置ベクトルである.

$$dq_i(t) = dq_i^{(T)}(t) + dq_i^{(S)}(t) + dq_i^{(N)}(t), \tag{1}$$

$$dq_i^{(T)}(t) \equiv \sum_{j=1}^{3} P_{ij} dw_j, \tag{2}$$

$$dq_i^{(S)}(t) \equiv -\frac{\alpha}{|\nabla F|^2}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\mathrm{Tr}\{(\partial^2 F)\cdot\mathbf{P}\}dt, \tag{3}$$

$$dq_i^{(N)}(t) \equiv -K\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\frac{F}{|\nabla F|^2}dt. \tag{4}$$

ただし, t は時間変数であり, α, K はそれぞれ正の定数である. また, dw_j はガウス型のランダム変数であり, 式 (5) の確率的な特性を満たす.

$$\langle dw_i(t)\rangle = 0, \quad \langle dw_i(t)dw_j(t)\rangle = 2\alpha\delta_{ij}dt. \tag{5}$$

ただし, $\langle\cdot\rangle$ は期待値記号, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. さらに, $dw_i(t)$ に作用している $\mathbf{P}$ は曲面 I_F 上への射影行列であり, 式 (6) で定義される.

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{1}{|\nabla F|^2}\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial q_j}. \tag{6}$$

$dq_i^{(T)}(t)$ は曲面 I_F の接平面方向へランダムに変位する項であるが, $dq_i^{(T)}(t)$ のみではブラウン粒子は I_F から飛び出ため, $dq_i^{(S)}(t)$ によって再び曲面 I_F 上へ引き戻す. $dq_i^{(N)}(t)$ は $F(\mathbf{q}) = 0$ の法線方向の強い拘束力を作り出す項である. また, 有限な離散時間系において, dt は Δt に置き換えられ, 時刻 $t_k(t_k = t_{k-1} + \Delta t, k = 1, 2, 3, ...)$ でのサンプル点を求める. $\mathbf{q}(t_k)$ は I_F から飛び出すため, ニュートン法によって補正する.

3 衝突ループ検出

本節では確率過程サンプリング法に基づいた陰関数曲面の衝突ループ検出・可視化の方法を説明する.

まず, 式 (7) で定義される 2 つの陰関数曲面 I_F, I_G の衝突を考える.

$$F(\mathbf{q}) = 0, \quad G(\mathbf{q}) = 0. \tag{7}$$

陰関数曲面 I_F 上でブラウン運動をシミュレートすることで生成される連続したサンプル点 $\mathbf{q}(t_{k-1})$, $\mathbf{q}(t_k)$ が式 (8) を満たせば, $\mathbf{q}(t_{k-1})$ と $\mathbf{q}(t_k)$ の間に曲面の交点が存在する.

$$\mathrm{sgn}\{G(\mathbf{q}(t_{k-1}))\}\cdot\mathrm{sgn}\{G(\mathbf{q}(t_k))\} = -1, \tag{8}$$

$$\mathrm{sgn}\{G(\mathbf{q}(t))\} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if} \quad G(\mathbf{q}(t)) > \varepsilon, \\ -1 & \text{if} \quad G(\mathbf{q}(t)) < -\varepsilon, \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise}. \end{cases} \tag{9}$$

ただし, ε は小さな正数である. $\mathbf{q}(t_{k-1})$ と $\mathbf{q}(t_k)$ の間の交点 $\mathbf{r}_0$ を求めるには, まず, 2 分法で直線的に交点まで近づけた後ニュートン法で補正をする.

次に交点 $\mathbf{r}_0$ を初期点として衝突ループ, すなわち I_F と I_G の交点の集合を求める. 衝突ループ上の点 $\mathbf{r}_i(i = 1, 2, 3, \cdots)$ における衝突ループの接線ベクトルを $\mathbf{v}_i$ とし, 式 (10) に従って, 交点 $\mathbf{r}_{i+1}$ を衝突ループに沿って逐次的に求めていくことができる.

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\Delta\omega, \quad \mathbf{v}_i = \frac{\nabla F(\mathbf{r}_i)\times\nabla G(\mathbf{r}_i)}{|\nabla F(\mathbf{r}_i)\times\nabla G(\mathbf{r}_i)|}. \tag{10}$$

*立命館大学大学院 理工学研究科
†立命館大学 情報理工学部
‡科学技術振興機構
§立命館大学 理工学部
¶高エネルギー加速器研究機構 計算科学センター

ただし, $\Delta\omega$ は数値計算上の小さな正数である. また, 計算で生じる衝突ループとの微小な誤差はニュートン法で補正する.

以上のように, ブラウン運動で 2 つの陰関数曲面の交点 $\mathbf{r}_0$ を検出する. その交点を初期点として衝突ループ上に多数の交点 $\mathbf{r}_i(i > 1)$ を生成するという手順を十分繰り返し, 衝突ループを発見・描画する. また, 描画は衝突ループ上に生成された高密度点群を使って, ポイントレンダリングで行う.

4 結果

前節で述べたアルゴリズムを C++言語で実装し, 衝突ループを検出した結果を示す. 図 1 は, 文献 [1] の手法で点群データから生成したドラゴン型 (Stanford Dragon) の陰関数曲面上でブラウン運動をシミュレートし, 3 つ穴トーラス型の陰関数曲面との衝突ループを検出した図である. 衝突ループ上の点数は 150,000 点である. 同図は, 本手法が曲面上での一様な確率的探索により複雑な陰関数曲面の全ての衝突ループを検出し, 精密に描画できることを示している.

また, 同様にして複雑な陰関数曲面の等高線を精密に描いた. 図 2-(A), (B) はそれぞれ式 (11) で表わされる水平面群, 式 (12) で表される同心球面群との衝突ループを検出することで描画できる.

$$\sin(aq_2) = 0, \tag{11}$$

$$\cos(b|\mathbf{q} - \mathbf{c}|) = 0. \tag{12}$$

ただし, a, b は正の定数であり, $\mathbf{c}$ は同心球群の中心である. 同図は本手法が複雑な陰関数曲面の等高線を精密に描画できることを示している.

5 おわりに

本報告では, 陰関数曲面上でブラウン運動をシミュレートすること, つまり, 確率的な一様探索を行うことで, 他の陰関数曲面との交点を検出し, 散在する多数の衝突ループを可視化した. また, 本手法を応用することにより, 複雑な等高線も可視化できることを示した.

参考文献

[1] Y. Ohtake, A. Belyaev, M. Alexa, G. Turk, H. Seidel: Multi-level partition of unity implicits, *ACM TOG (Proc. SIGGRAPH 2003)* 22(3):463-470, 2003.

[2] S. Tanaka, A. Shibata, H. Yamamoto, H. Kotsuru: Generalized stochastic sampling method for visualization and investigation of implicit surfaces, *Computers & Graphics Forum* 19(3): 359-367, 2001.

図 1: 陰関数曲面の衝突ループ検出の例.

(A) 直交座標での等高線.

(B) 球座標での等高線.

図 2: 等高線の描画例.