

# Cournot 市場における集団学習ダイナミックスの複雑性

國上真章<sup>†</sup> 寺野隆雄<sup>††</sup>

独占あるいは寡占市場における Cournot ゲームに対しては、非線形動力学の立場からも多くの研究が行われてきた。この論文は、価格が競合しあう複数のバリエーション間の拡張された Cournot 型の逆需要関数を持つ財の生産に無数の主体が参入退出を繰り返す新しい市場のモデルを提案し、簡単な連続動力学によって記述されるこの市場の複雑な挙動を調べる。この新しい市場モデルでは、個々の合理的なプレーヤの複雑な振舞いではなく、限定合理的な主体と市場のマイクロ-マクロ相互作用における複雑な振舞いを考える。この論文の主要な成果は以下のとおりである。(1) この市場動力学は、進化的ゲーム理論の Replicator Dynamics と同型である。(2) この市場動力学は、市場内部の構造を表すパラメータの変化により、市場が多様で安定な状態から特定種のみを生産あるいは生産比率が内生的に変動する状態へと分岐する。(3) 特に線形な逆需要関数による連続動力学であるにもかかわらずカオスへも分岐する。

## Complexity of Collective Learning Dynamics in Linear Cournot-type Market

MASAAKI KUNIGAMI<sup>†</sup> and TAKAO TERANO<sup>††</sup>

This paper presents a new model of market described by continuous and deterministic dynamics. On Cournot duopoly or oligopoly game, lots of papers investigate with nonlinear price or cost curves. In this new model, we introduce an expanded Cournot type “inverse demand function” of several interfering variations of the goods. Then, we add a collective learning mechanism of numberless players (producers). Our new model focuses on not each rational players' complex behavior but complex behavior of micro-macro interaction within bounded rational agents and the market. The main contribution of this paper is as follows. (1) The market dynamics is equivalent to Replicator Dynamics that has been found in evolutionary game theory. (2) With little changes of market structure parameters, this market dynamics shows bifurcation, which means the sudden transition from states with diversity and stability to other states that fluctuate endogenously or produce only a few variations. (3) In spite of deriving from the linear inverse demand function and continuous time modeling, this market dynamics also shows a bifurcation with proper chaotic behavior.

### 1. はじめに

Cournot モデルは、複占・寡占市場における完全情報同時手番の非協力ゲームとして、マイクロ経済学/ゲーム理論の教科書において標準的な問題であり(たとえば Gibbons<sup>1)</sup> [pp.14–21]), 次のように記述される(以下特にことわらない場合ゴチックで数ベクトル, イタリアックで数ベクトルの成分ないしはスカラー量を表記する)。すなわち市場におけるある財の価格  $P$  が財の

総供給量  $Y$  の逆需要関数  $P(Y)$  として与えられるとき、複数の生産主体 ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) が、自身の収益  $\pi_k \equiv P(Y) \cdot y_k - c \cdot y_k$ ,  $Y = \sum y_k$  を最大化するように戦略としての財の生産(出荷)量  $y_k \in (0, a/b)$  を定める。ここで逆需要関数は、市場における需要構造を財の供給量による価格変動として表現するもので、通常供給量の減少関数(財の供給  $Y$  が増加すると価格  $P$  が下がる)として  $P(Y) = a - bY$  (価格  $P(Y)$  は正値の実関数,  $a$  および  $b$  は正の定数, 財の供給量  $Y$  は区間  $(0, a/b)$  内の実数変数)のように与えられる。このときすべての生産主体が、逆需要曲線および他主体の合理性に関する共通知識に基づき、他主体の戦略に対する最適反応を瞬時に計算できることを前提とすれば、各生産主体の最適反応どうしの対応全体は Nash 均衡となる。

<sup>†</sup> 筑波大学大学院ビジネス科学研究科

Graduate School of Business Science, University of Tsukuba

<sup>††</sup> 東京工業大学大学院総合理工学研究科

Computational Intelligence and Systems Science, Tokyo Institute of Technology

Cournot モデルは、消費および需要にかかわる複雑性を逆需要関数に縮減し所与とすることで、生産者の戦略的行動についてのモデルを得る。このため複占・寡占市場についても、価格および費用の構造、情報の不完全性や遅れ、プレーヤの学習等を加味することにより、比較的簡単な動力学モデルを構築しつつプレーヤの複雑な挙動を観察することができる (Puu ら<sup>2)</sup>。

一方、複雑系研究の領域においては、少数プレーヤの戦略的行動自体の複雑性よりも、多数の利己的主体個々の意思決定と集団全体の状態の間における「マイクロ-マクロ相互作用」がもたらす「複雑な挙動」に関心がある。この立場から、進化ゲーム (Hofbauer ら<sup>3)</sup>)、社会学習動力学 (出口<sup>4),5)</sup>) らの手法と、Cournot 型の需要構造を持つ市場モデリングを接合することには重要な意味があると考えられる。本研究のアプローチと主要な結論は以下のとおりである。

複数のバリエーションがその供給量と価格に競合性を持つ財に拡張された Cournot 型の逆需要関数のもとで、無数の生産主体が市場のマクロ状態をもとに参入・退出を繰り返す市場モデルを、出口の「社会学習動力学」(Social Learning Dynamics<sup>4),5)</sup>) に依拠して構築する。これによりマイクロ-マクロ相互作用を含む市場動力学を、生物進化的描像を用いずに進化ゲームでよく知られた Replicator Dynamics と同様な動力学として表現できる (2 章)。

この市場力学では、財の価格構造 (逆需要関数のパラメータ) の小さな変化が市場に供給されるバリエーションの多様性に質的に不連続的な変化 (分岐) をもたらし、多様性の消失あるいは内生的変動の発生を観察することができる (3.1-2 節)。

また、市場の内部に価格—費用間の相互作用を持つセグメントが存在するという設定において、この相互作用の強さによって市場がカオス的な変動に分岐することが示される (3.3 節)。

寡占市場動力学では、Puu ら<sup>2),6)</sup>、Kopel<sup>7)</sup> が離散時間において非単調反応曲線と学習過程を導入することでカオスの振舞いを示す市場動力学を見出した。これらの示唆に富む先行研究では、非線形の価格あるいは費用関数に由来した非単調な最適反応曲線上の学習プロセスから離散系のパイ捏ね変換を導くことでカオスを導出する。本研究では、Cournot モデルから逆需要関数という道具立てを取り出してこれを多数のバリエーションを持つ財の間の競合補完関係に自然に拡張することで、出口の「社会学習動力学」が線形な価格—費用モデルと接合することを示し、Replicator Dynamics と同様な連続市場動力学を導く。これ

により、Replicator Dynamics におけるカオスの発生 (Skryms<sup>8)</sup>) という性質を用いながらも、マトリクス型 2 人ゲームの繰返しと適応度による進化という非市場的な描像に拠らず、比較的次元の線形な価格—費用モデルにおいても不自然でない程度の係数と広い分岐パラメータの範囲で市場がカオス的に変動しうことが示される。

## 2. モデル

ここでは Cournot 型の逆需要関数を拡張するとともに、これに出口<sup>4),5)</sup> によって提案された「社会学習動力学」を適用し、マイクロ-マクロ相互作用によって駆動される市場の動力学を導出する。新しいモデルを構築する方針は以下のとおりである。

- 財に対する逆需要曲線を、競合性をともなう多額のバリエーションを持つ財に対する線形な逆需要関数 (：価格平面) へ拡張する。ここで競合性には、第  $i$  種の供給量増加によって第  $j$  種の需要を低下させる場合 (正の競合) と増大させる場合 (負の競合) の双方を考慮する。
- プレーヤは財の各種類の生産に参入・退出を繰り返す無数の単位生産者とする。彼らにとっては、逆需要関数の正確な特性あるいは他のプレーヤ個々の決定を知ったうえで最適な財の生産を選択することが現実的ではなく、市場からの巨視的な情報をもとにある確率で不利な種類の生産から退出しより有利な種類に生産をシフトさせるという「限合理的」な主体であるものとする。

これらにより、マクロ情報に基づいた個々の利己的主体のマイクロな意思決定と、これらマイクロな意思決定の集積によるマクロ状態変化のマイクロ-マクロ相互作用による経済の動力学を記述してゆく。

### 2.1 需要と価格の構造

Cournot 型の逆需要関数を一般化するために、相互に競合のある  $m$  種類のバリエーションを持つ財の価格と供給量についてその関係を定式化する。ここに  $m$  次元のベクトル  $x(t)$  は時刻  $t$  において生産 (通常 Cournot モデルでは在庫や流通時間は考えないので生産量=出荷量と見なす) された財の量を表す状態変数であり、その第  $i$  成分  $x_i$  は第  $i$  種の生産量として定義する。各プレーヤは、各時点においてつねに財のバリエーションのうち 1 種類を選択して生産しているものとし、その生産性はすべて 1 であると仮定する。さらに、プレーヤは十分多数存在するものとし、その総数を 1 に規格化する。これにより、市場の状態量ベクトル  $x(t)$  の第  $i$  成分  $x_i$  は第  $i$  種のバリエーション

の生産量であるとともに、第  $i$  種バリエーションの生産を選択しているプレーヤの集団内比率と同一視される（すなわち  $\sum x_i = 1$ ）。以下、財について「第  $i$  種」と記した場合は「第  $i$  種のバリエーション」を意味する。

式 (1) において、要素が各種類の市場単価を示す価格ベクトル  $p(x)$  を供給量ベクトル  $x$  の線形非斉次な逆需要関数として表し、これにより価格平面が定義される。ここで、 $p_0$  は逆需要関数の価格切片であり、経済的には市場内に財が最小単位しか供給されなかった場合の極限における価値を表す。本モデルの場合、財のバリエーション  $1 \sim m$  は派生的形質（たとえば色・包装）の差であり、上記の極限における使用価値（たとえば栄養価）に差はないものとし、 $p_0$  を共通の定数、すなわち  $p_0 \equiv (p_0, p_0, \dots, p_0)^T$  であると仮定すれば、 $p(x)$  は  $x$  の線形斉次式 (1) で表される。行列  $P = (P_{ij})$  は、財の間の競合関係を示し、 $P_{ij}$  が負（正）の場合は第  $j$  種が第  $i$  種に対して正（負）の競合関係がある財であることを意味する。

$$p(x) = p_0 + Px = (P_0 + P)x, \quad (1)$$

$$p_0 \equiv (p_0, p_0, \dots, p_0)^T \in \mathbf{R}_+^m,$$

$$P_0 \equiv (p_0, p_0, \dots, p_0), \quad P = (P_{ij}) \in \mathbf{M}_{mm}.$$

ここで  $x^T$  は  $x$  の転置ベクトル、 $\mathbf{R}_+^m$  は正の実数値を要素に持つ  $m$  次元ベクトルの集合、また  $\mathbf{M}_{mm}$  は  $m \times m$  実数値行列の集合である。

同様に財の単位生産費用を示す費用ベクトル  $c(x)$  を供給量ベクトル  $x$  の線形非斉次な費用関数により式 (2) で表し、費用平面を定義する（ $c_0$  は価格面の  $c$ -切片であり、価格における  $p_0$  と同様の仮定を置き、 $c_0$  を共通の定数、すなわち  $c_0 = (c_0, c_0, \dots, c_0)^T$  であるとすれば、 $c(x)$  は  $x$  の線形斉次式で表される (2)）。行列  $C = (C_{ij})$  は、財のたとえば原料間の競合・補完関係を示し、 $C_{ij}$  が負（正）の場合は第  $j$  種が第  $i$  種に対して正（負）の競合関係がある財であることを意味する。

$$c(x) = c_0 + Cx = (C_0 + C)x, \quad (2)$$

$$c_0 \equiv (c_0, c_0, \dots, c_0)^T \in \mathbf{R}_+^m,$$

$$C_0 \equiv (c_0, c_0, \dots, c_0), \quad C = (C_{ij}) \in \mathbf{M}_{mm}.$$

ここで価格ベクトル  $p(x)$ 、費用ベクトル  $c(x)$ 、利益ベクトルを定める定数ベクトル  $p_0, c_0$  係数行列  $P, C$  が満たすべき条件として、(a) 状態ベクトル  $x(t)$  のとりうる値に対し価格、費用、収益の値がつねに正になること、が必要である。また、経済的な尤もらしさを担保するため、(b) 価格行列の対角成分は負であること、(c) 価格行列および費用行列の非対角成分は符号対称であること、を要求する。

$$\begin{aligned} (a) \quad & p_i(x) \geq c_i(x) \geq 0 \quad \forall_i \forall x, \\ (b) \quad & P_{ii} \leq 0 \quad \forall_i, \\ (c) \quad & \text{sgn}(P_{ij}) = \text{sgn}(P_{ji}), \\ & \text{sgn}(C_{ij}) = \text{sgn}(C_{ji}) \quad \forall_i \forall_j. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで  $\text{sgn}(\cdot)$  は符号関数である。

## 2.2 集合的な学習メカニズム

各プレーヤにとって、各財の間の競合補完関係を正確に把握し、かつ無数に存在する他の生産者の意思決定内容に最適に反応することはほとんど困難である。しかし各財の現在価格・費用およびプレーヤ全体の平均収益等のマクロ情報は知りえてもよい。したがって、このような「限定合理的」プレーヤがマクロ情報に基づいて行うミクロな意思決定と、ミクロな意思決定の集積によるマクロ状態の変化（ミクロ-マクロ相互作用）を記述することが必要である。

このようなミクロ-マクロ相互作用のメカニズムとして、ここでは出口<sup>4),5)</sup>によって提案された社会学習動力学 (SLD: Social Learning Dynamics) を適用する。SLD により「ランダムマッチングと繁殖/淘汰」という生物進化的アナログを持ち込むことなくマルコフ決定プロセスに基づいて、進化的ゲームにおける複製子動力学 (Replicator Dynamics) と同様な動力学を得ることができる。

以下、出口<sup>4),5)</sup>に従い社会学習動力学: SLD の定式化を行う。SLD においては、状態変数  $x_i$  は、あるミクロな主体が社会的代替案  $i$  を選択している確率であるとともに、社会において代替案  $i$  が選択されている人口比率と同一視される。このため前節で拡張を行った価格-費用の定式化とそのまま接合することができる。

SLD では、各ミクロ主体が社会における他の平均利得に比例して自身の態度を変容させるという基本仮説をとり「他のエージェントの平均利得に関する内部モデルが各エージェントによって形成され、それがそれに学習されている」(出口<sup>5)</sup> p.97) と見なす。これにより社会のマクロ状態  $\Rightarrow$  ミクロ主体の態度変容の集積  $\Rightarrow$  マクロ状態の変化という、ミクロ-マクロ相互作用のモデル構築が可能になる。

ここで遷移確率  $q_{ij}$  は主体が自身の生産対象を第  $i$  種から第  $j$  種へと（惰性や逡巡を克服して）変更する単位時間あたりの確率であるが（図 1）、これは第  $i$  種を生産する人口集団のうち自身の生産対象を第  $j$  種へと変更する人口の単位時間あたりの割合として解

( $\text{sgn}(z) = 1(z > 0), = 0(z = 0), = -1(z < 0)$ ).

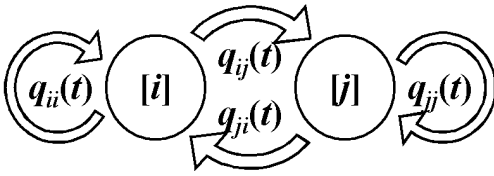


図1 意思決定のマルコフ過程； $q_{ij}$  は各マイクロプレーヤが生産する財の種類が  $i$  から  $j$  に遷移する確率

Fig. 1 Markov process for decision; Each player alters own products from the  $i^{\text{th}}$  to the  $j^{\text{th}}$  with a transition probability  $q_{ij}$ .

積される。

さらに  $E_i(\mathbf{x})$  は市場の状態が  $x$  であるときの第  $i$  種の期待利益であり、 $W(\mathbf{x})$  は  $E_i(\mathbf{x})$  の市場平均とする。2.1 節の Cournot 型価格—費用の拡張から  $E_i(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$  は、状態  $x$  の関数として表すことができる(式(4))。式(5)は、基本仮説であり、遷移確率  $q_{ij}$  が  $j$  種の相対利益  $E_j/W$  と市場占有率  $x_j$  の積に比例していることを示す。すなわち  $j$  種の生産が有利であるほど、また  $j$  種の生産を支持する主体が多いほど、 $j$  種の生産に切り替えるという態度変化が増加することを反映している。定数  $r$  は所与の学習レートである。

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{x}) &\equiv p_i(\mathbf{x}) - c_i(\mathbf{x}) \\ &= ((\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x})_i, \end{aligned} \quad (4)$$

$$W(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^n E_i(\mathbf{x}) x_i.$$

$$q_{ij} \equiv \Pr(i \rightarrow j | i) = r x_j E_j(\mathbf{x}) / W(\mathbf{x}). \quad (5)$$

基本仮説(5)のもと、図1のマルコフ過程の時間発展を求め連続極限をとると市場動力学(6)を得る。

$$\begin{aligned} &(x_i(t + \Delta t) - x_i(t)) / \Delta t \\ &= \sum_j q_{ji}(\mathbf{x}) x_j(t) - \sum_j q_{ij}(\mathbf{x}) x_i(t) \\ &= r \sum_j \{E_i(\mathbf{x}) x_i x_j - E_j(\mathbf{x}) x_j x_i\} / W(\mathbf{x}) \\ &= r x_i \{E_i(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x})\} / W(\mathbf{x}). \\ \frac{dx_i}{dt} &= r \frac{x_i \{E_i(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x})\}}{W(\mathbf{x})} \\ &= r x_i \frac{(\mathbf{R}\mathbf{x})_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$(\mathbf{R} \equiv (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C}), (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) \equiv \mathbf{y}^T \mathbf{z}.)$$

この市場動力学においては右辺分母が  $i$  によらないため、時間尺度の変換で進化ゲーム理論の Replicator Dynamics (RD) と同型の動力学を得られる<sup>(4),(5)</sup>。

SLD を適用する利点をまとめると以下のとおりである。

- 価格メカニズムと同じ状態変数を利用することができる。

- 限定合理的主体からなる集団のマイクロ-マクロ相互作用を表現できる。
- 非定常なマルコフ過程から動力学を構築しているため、定常解以外の複雑な挙動を表現できる。
- 進化・適応度・ランダムな繰返し2人ゲーム等の進化ゲーム固有の非市場的な設定抜きに RD と同型の動力学を得られる。これにより RD あるいは連結 RD<sup>(9),(10)</sup> の性質が市場においても生じうることを示すことができる。

### 3. 市場の複雑性

ここまで定式化された市場動力学について、少数のパラメータで表現される市場のマイクロ構造の変化によって、市場のマクロな挙動が質的に変化する様子を調べる。

#### 3.1 構造不安定性(対称系における共存と集中)

最も簡単な設定である財が2種のバリエーションからなる場合 ( $m = 2$ ) において市場の価格構造が市場のマクロな状態をどのように変化させるか(分岐)について示す。式(6)において簡略化のため対称な場合を考え、生産の限界費用は一定とする。市場の性質は異なる生産品種相互の競合性を  $\alpha$ 、同品種の場合を1とし、さらに規格化条件 ( $x_1 = x, x_2 = 1 - x$ ) をも考慮すると式(7)(以下  $\tau$  は右辺分母が消えるよう時間尺度を変換)を得る。

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0) &= (p_0 - c_0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{dx_1}{d\tau} &= (1 - \alpha) r x_1 (2x_1 - 1)(x_1 - 1). \end{aligned} \quad (7)$$

一見して分かるとおり(図2)、競合性  $\alpha$  が対角要素1より小さく、異なる2種の競合性が弱い場合は共存状態が安定であるが、 $\alpha$  が1より大きくなり競合性が強まると、共存状態は不安定となり、市場はどちらか片方が支配的な状態に(初期値に依存して)収束してゆくこととなる。

同様に、式(6)について次式の係数で示される3種対称系の場合(式(8))においても、

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0) &= (p_0 - c_0) (\mathbf{1}), \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (\mathbf{O}), \\ (\mathbf{1})_{ij} &= 1, (\mathbf{O})_{ij} = 0 \text{ for } i, j = 1 \sim 3, \end{aligned}$$

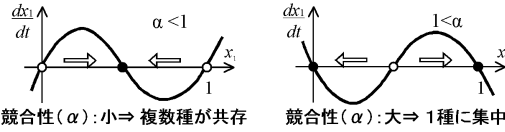


図 2 2 種対称系の分岐

Fig.2 A bifurcation of a 2-variations symmetrical system; If the competitiveness parameter  $\alpha < 1 (> 1)$ , two variations coexist (either one dominates) in the market.

$$x = x_1, y = x_2, x_3 = 1 - x - y,$$

$$0 < x, y < x + y < 1.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (1 - \alpha)rx(2x^2 + 2y^2 + 2xy - 3x - 2y + 1) \\ \frac{dy}{d\tau} = (1 - \alpha)ry(2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 3y + 1) \end{cases} \quad (8)$$

大域解析により、競争性  $\alpha$  の大小によって 3 種共存の場合と 1 種のみが集中的に生産される場合に分岐することが分かる (図 3)。

3.2 構造不安定性 (歪対称系における内発的変動)

さらに、式 (6) について次式の係数で示される 3 種歪対称系 (9) においては、平衡点周囲の局所解析により

$$(P_0 - C_0) = (p_0 - c_0) \mathbf{1},$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{pmatrix}, C = (\mathbf{O}),$$

$$(1)_{ij} = 1, (\mathbf{O})_{ij} = 0 \text{ for } i, j = 1 \sim 3,$$

$$x = x_1, y = x_2, x_3 = 1 - x - y,$$

$$0 < x, y < x + y < 1.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = rx\{- (1 - \beta)x^2 - (\alpha - \beta)xy - \beta + (2 - \alpha - \beta)(x^2 + y^2 - x - y + xy) + 1\} \\ \frac{dy}{d\tau} = ry\{- (1 - \alpha)y^2 - (\beta - \alpha)xy - \alpha + (2 - \alpha - \beta)(x^2 + y^2 - x - y + xy) + 1\} \end{cases} \quad (9)$$

- $1 < \alpha, 1 < \beta$ :  $(0,0), (1,0), (0,1)$  が安定  $\Rightarrow$  1 種へ集中,
  - $\alpha + \beta < 2$ :  $(1/3, 1/3)$  が安定  $\Rightarrow$  3 種共存,
  - $2 < \alpha + \beta, \alpha < 1 < \beta$  (or  $\beta < 1 < \alpha$ ):  $\Rightarrow$  ヘテロクリニックサイクル.
- となり、一種への生産集中と 3 種の共存のほか内発

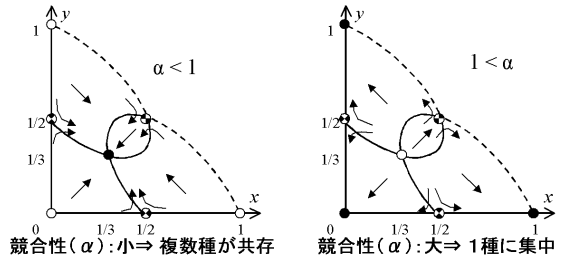


図 3 3 種対称系の分岐

Fig.3 A bifurcation of a 3-variations symmetrical system; If the competitiveness parameter  $\alpha < 1 (> 1)$ , three variations coexist (either one dominates) in the market.

的な変動、すなわち生産されるバリエーションの入替わりが現れる。

3.3 状態不安定性 (カオス)

次に市場動力学における内生的な複雑挙動として、市場構造の変化がカオスを発生させることを示す。

財のバリエーションが 3 種の場合、規格化条件を除く独立な自由度は 2 であるため、ポアンカレ・ベンディクソンの定理から市場の振舞いには均衡点のほか周期軌道とリミットサイクルしか生じえない。しかし 4 種以上の場合には、進化ゲームにおいて Skyrms<sup>8)</sup> が示したようにカオスが発生しうる。

線形な価格・費用から構築できる市場動力学から取り出せる複雑な挙動の一例として、ここでは市場内の 2 つのセグメントが相互作用を強めていく過程を想定し、この過程で生産される財の種類が安定した 1 つの市場で淘汰整理される代わりに、複雑で予測不能な変動が永続する状況を示す。

$$\frac{dx_i}{dt} = rx_i \frac{(\mathbf{R}\mathbf{x})_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x})}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2m), \sum_{i=1}^{2m} x_i(0) = 1.$$

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C} \quad (10)$$

$$= \mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + (\mathbf{P}^S + \gamma \mathbf{P}^I) - (\mathbf{C}^S + \gamma \mathbf{C}^I).$$

$$\mathbf{P}^S = \begin{pmatrix} p_1^s & 0 \\ 0 & p_2^s \end{pmatrix}, \mathbf{P}^I = \begin{pmatrix} 0 & p_1^I \\ p_2^I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}^S = \begin{pmatrix} c_1^s & 0 \\ 0 & c_2^s \end{pmatrix}, \mathbf{C}^I = \begin{pmatrix} 0 & c_1^I \\ c_2^I & 0 \end{pmatrix}.$$

式 (10) は、市場を内部で 2 つのセグメント ( $i = 1 \sim m, i = m + 1 \sim 2m$ ) に分けて考えられる場合について書き直したものである (ここで  $\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{P}^S, \mathbf{P}^I, \mathbf{C}^S, \mathbf{C}^I$  は  $2m \times 2m$  行列, 小行列  $p_1^s, p_2^s, p_1^I, p_2^I, c_1^s, c_2^s, c_1^I, c_2^I$  は

$p_2^I, c_1^S, c_2^S, c_1^I, c_2^I$  は  $m \times m$  小行列, 小行列  $O$  は  $m \times m$  零行列). 同一市場内であるため式 (7) の価格・費用行列のうち  $(P_0, C_0)$  は共通なまま, 相互作用行列  $(P, C)$  を, 各セグメント内部における価格費用の挙動を表現する行列  $(P^S, C^S)$  およびこれら市場セグメント間の価格費用の相互作用を表す  $(P^I, C^I)$  さらにこれらを結合する定数  $\gamma$  により, 形式的に分けて  $(P = P^S + \gamma P^I, C = C^S + \gamma C^I)$  と表した. 結合定数  $\gamma (\geq 0)$  は, 市場内セグメント間の統合とその度合いを表し,  $(\gamma = 0)$  ならば市場は各  $m$  種からなる 2 つの内部セグメントが独立している状態を,  $\gamma$  が大きいほど市場統合が進みセグメント間の相互作用が大きくなった状態を表す.

$$\begin{aligned}
 P^S &= - \begin{pmatrix} .75 & .9 & 0 & 0 \\ .1 & .75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .2 \\ 0 & 0 & .5 & .75 \end{pmatrix}, \\
 C^S &= \begin{pmatrix} -.3 & -.1 & 0 & 0 \\ -1.2 & -.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .15 & -.1 \\ 0 & 0 & -.2 & .3 \end{pmatrix}, \\
 P^I &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & .5 & -.1 \\ 0 & 0 & .7 & .8 \\ 1 & .5 & 0 & 0 \\ -.4 & .1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 C^I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & .1 & .4 \\ 0 & 0 & -.1 & .9 \\ .4 & -.2 & 0 & 0 \\ .3 & .2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11} \\
 R &= P_0 - C_0 \\
 &+ (P^S + \gamma P^I) - (C^S + \gamma C^I) \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\
 &- \begin{pmatrix} .45 & .8 & 0 & 0 \\ -1.1 & .25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .65 & -.8 \\ 0 & 0 & .3 & 1.05 \end{pmatrix} \\
 &- \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & .6 & -.6 \\ 0 & 0 & .6 & 1.7 \\ 1.4 & .3 & 0 & 0 \\ -.1 & .3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

( $m = 2$ ) において数値例: 式 (11) で与えられる価

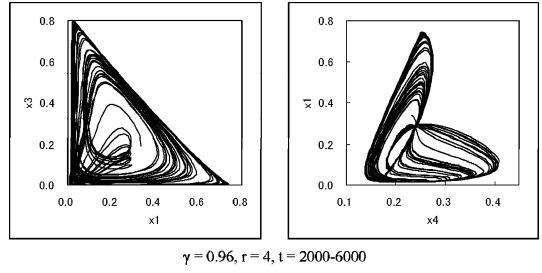


図 4 カオス状態の市場動力学 (10), (11) におけるアトラクタ  
Fig. 4 An attractor of a chaotic market dynamics (10), (11).

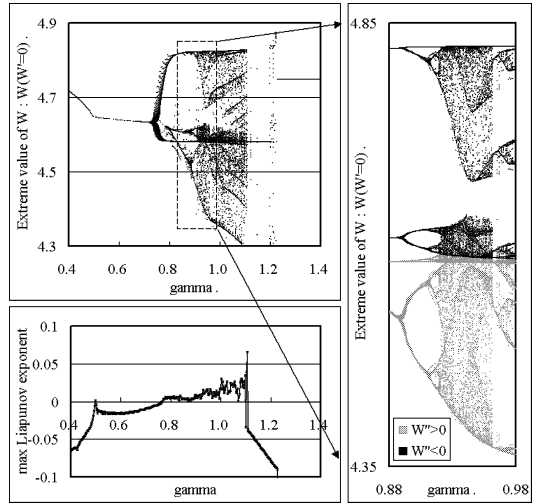


図 5 カオス系の分岐: 市場動力学 (10), (11) における市場平均収益  $W$  の極値でとった分岐図 (左上), 分岐図に対応した最大リアプノフ指数の変化 (左下), 分岐図の一部の拡大図 (右)  
Fig. 5 A bifurcation of a chaotic market. A bifurcation diagram of the market dynamics (10), (11) with extreme values of  $W$  (upper left), corresponding maximum Liapunov exponents (lower left), a magnification of the left bifurcation diagram (right).

格—費用の構造が式 (3) における条件 (a) ~ (c) を満たすことは明らかである. この市場におけるカオス状態のアトラクタを図 4 に, また分岐図と対応する最大リアプノフ指数の変化を図 5 に示す. かなり広い  $\gamma$  の範囲において典型的な自己相似形の分岐パターンが発生していること, これに対応し最大リアプノフ指数が正の値へ遷移していくことが観察される.

市場動力学 (10), (11) は, 線形な逆需要関数とマルコフ決定過程から構成された比較的簡単な連続動力学であり, 最適反応曲線の組合せにおけるパイ捏ね変換や時間応答の遅れを明示的に用いてはいない. にもかかわらず市場における財のバリエーションの増大やそれら相互の競合関係の深化等, 通常市場の発展や統合等の文脈においてもカオスが生起しうることを示し

ている。

#### 4. まとめおよび展開

以上をまとめると、

- 複数のバリエーションが相互に競合性を持つ財に Cournot 型の逆需要関数を拡張し、無数の主体が生産に参入・退出する市場のモデルを社会学習動力学 (Social Learning Dynamics) として構築し、これによりマイクロ-マクロ相互作用を含む市場動力学を構築した (2 章)。
- この市場力学では、財の価格構造の小さな変化が市場に供給される財の多様性に質的变化 ( : 多様性の消失あるいは内生的変動の発生) をもたらすことを表現できた (3 章)。
- 離散系のバイ捏ね変換や時間遅れを仮定せず、また進化ゲーム特有の非市場的描像に依拠せずに線形な逆需要関数から構築された連続動力学においても、市場として不自然でない係数の範囲で、市場の拡大や統合という構造変化につれてカオスの発生がありうることを示された (3 章)。

これら以降の展開については、カオス制御手法である自己適応遅延時間フィードバック制御を適用し、カオス状態にある市場を「牧羊犬」型のエージェントで「飼い馴らす」(Kunigami ら<sup>9)</sup>、國上<sup>10)</sup>) ことができる、これについては紙幅の都合上別の機会に稿を改めて紹介することしたい。

謝辞 東京工業大学の出口弘先生、青森公立大学の小野崎保先生、ソニー研究所の高安秀樹先生には、特別講義・研究会における意見交換・質疑等を通じて貴重なご指摘・ご意見をいただきました。また、匿名の査読者からは大変丁寧な査読意見をいただき、論旨の不明瞭な部分を訂正することができました。この場を借りて御礼申し上げます。

#### 参 考 文 献

- 1) Gibbons, R.: *Game Theory for Applied Economics*, Princeton University Press, Princeton (1992).
- 2) Puu, T. and Sushko, I.: *Oligopoly Dynamics*, Springer, Berlin Heidelberg (2002).
- 3) Hofbauer, J. and Sigmund, K.: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge (1998). 竹内康弘ほか (訳) : 進化ゲームと微分方程式, 現代数学社 (2001).
- 4) Deguchi, H.: *Economics as an Agent-Based Complex System*, Springer, Tokyo (2004).
- 5) 出口 弘: 複雑系としての経済学, 日科技連

(2000).

- 6) Puu, T.: Chaos in Duopoly Pricing, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol.1, pp.573–581 (1991).
- 7) Kopel, M.: Simple and Complex Adjustment Dynamics in Cournot Duopoly Models, *Chaos Solitons and Fractals*, Vol.7, pp.2031–2048 (1991).
- 8) Skyrms, B.: Chaos and the explanatory significance of equilibrium: Strange attractors in evolutionary game dynamics, *The Dynamics of Norms*, Bicchieri, C. (Ed.), pp.199–222, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- 9) Kunigami, M. and Terano, T.: Connected Replicator Dynamics and Their Control in a Learning Multi-agent System, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.2690, pp.18–26 (2003).
- 10) 國上真章, 寺野隆雄: エージェント系としてのレプリケータダイナミクスとその制御, 第 10 回マルチエージェントと協調計算ワークショップ論文集 (MACC2001), 武田英明 (編), pp.152–157, 日本ソフトウェア科学会, 東京, 日本ソフトウェア科学会 (2002).

(平成 17 年 11 月 22 日受付)

(平成 18 年 2 月 1 日再受付)

(平成 18 年 3 月 28 日再々受付)

(平成 18 年 4 月 26 日採録)



國上 真章

昭和 40 年生。平成 2 年九州大学大学院工学研究科応用物理学専攻修士課程修了。工学修士。同年防衛庁入庁。平成 8 年米海軍大学院作戦分析課程修了。MS.(OR)。平成 12 年より筑波大学ビジネス科学研究科博士後期課程在籍。



寺野 隆雄（正会員）

昭和 27 年生．昭和 51 年東京大学  
工学部計数工学科数理工学コース卒  
業．昭和 53 年同大学院工学系研究  
科情報工学専攻修士課程修了．昭和  
53 年～平成元年（財）電力中央研究

所勤務．平成 2 年より筑波大学大学院経営システム科学専攻，平成 8 年同教授．工学博士．平成 8 年イリノイ大学ならびにスタンフォード大学客員研究員．現在東京工業大学大学院総合理工学研究科知能システム科学専攻教授．機械学習，創発的計算手法，組織行動，知識システム開発方法論等の研究に従事．主要著書：『知識システムハンドブック』（1990），オーム社（共編著）；『エキスパートシステム』（1991），丸善（共著）；『エキスパートシステム評価マニュアル』（1992），オーム社（編著）；『知識システム開発方法論』（1993），朝倉書店ほか．人工知能学会，計測自動制御学会，日本 OR 学会，電気学会，経営情報学会，社会情報学会，IEEE，AAAI 各会員．

---